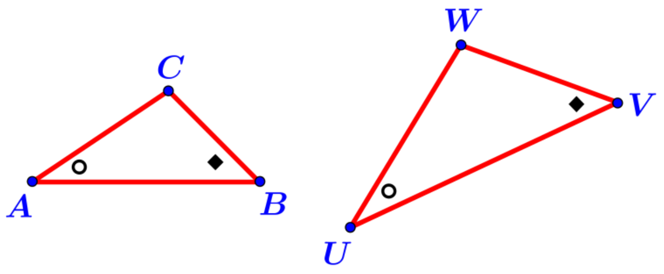
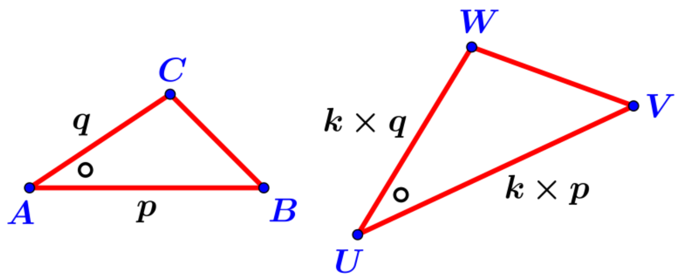
Gelijkvormigheid en congruentie

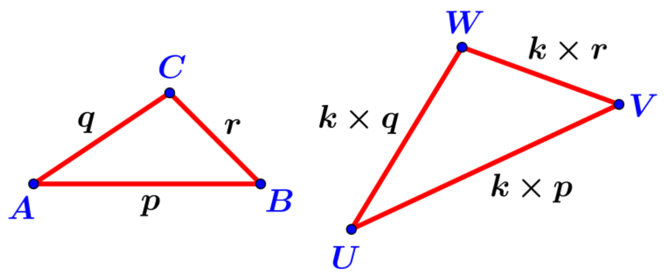
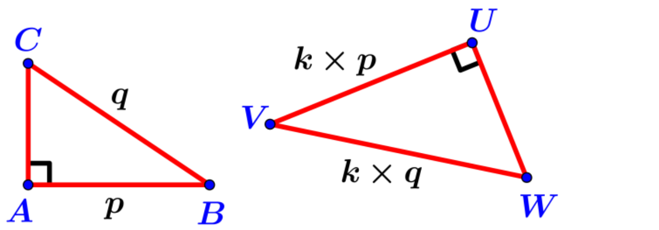
A) Gelijkvormigheidskenmerken

Twee driehoeken ABC en UVW heten **gelijkvormig** als er een vergroting is (met een bepaalde factor $k > 0$) waarbij ΔUVW het beeld is van ΔABC.

Informeel uitgedrukt: twee driehoeken zijn gelijkvormig als de ene driehoek een vergrote of verkleinde kopie is van de andere driehoek.

Twee driehoeken ABC en UVW zijn gelijkvormig, notatie $\Delta ABC \sim \Delta UVW$, als ze gelijk hebben:

twee paren hoeken (**hh**) 	een paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden (**zhz**) 

de verhouding van de zijden (**zzz**) 	een paar rechte hoeken en de verhouding van twee niet-omliggende zijden (**zzr**) 

Opmerking

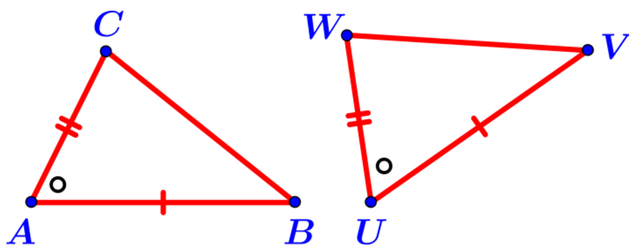
Het vaakst wordt het kenmerk **hh** toegepast. Soms moet je het kenmerk **zhz** gebruiken.

B) Congruentiekenmerken

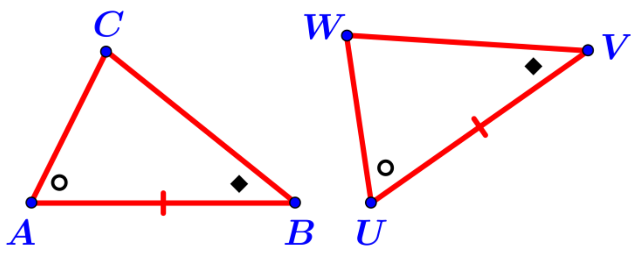
Twee driehoeken ABC en UVW heten **congruent** als ze dezelfde vorm en dezelfde grootte hebben.
Informeel uitgedrukt: twee driehoeken zijn congruent als de ene driehoek na eventueel verschuiven, roteren of omklappen precies op de andere driehoek past.

Twee driehoeken ABC en UVW zijn congruent, notatie $\Delta ABC \cong \Delta UVW$, als ze gelijk hebben:

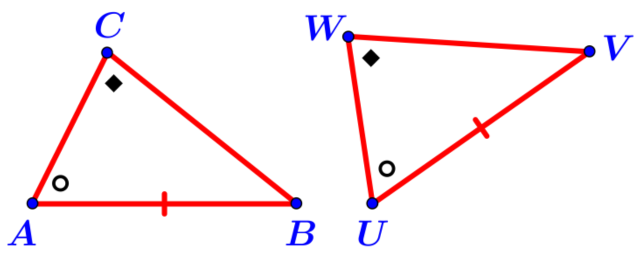
twee zijden en de ingesloten hoek (**ZHZ**)



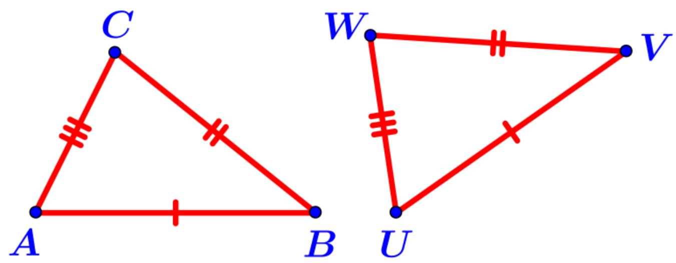
een zijde en twee aanliggende hoeken (**HZH**)



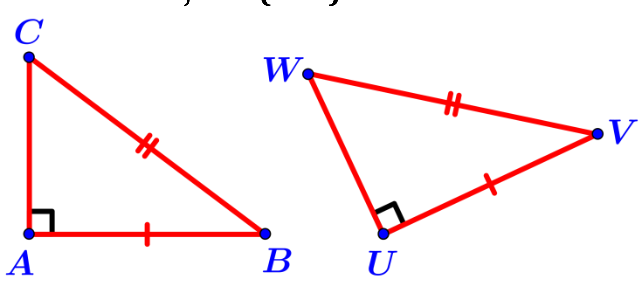
een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek (**ZHH**)



drie zijden (**ZZZ**)



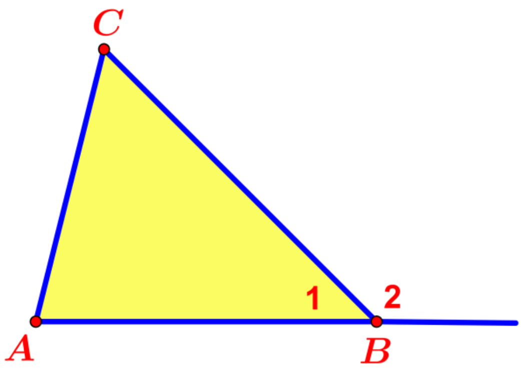
twee zijden en een rechte hoek tegenover een van die zijden (**ZZR**)



Buitenhoek driehoek

$\angle B_2$ heet een **buitenhoek** van ΔABC.
Er geldt de volgende eigenschap.

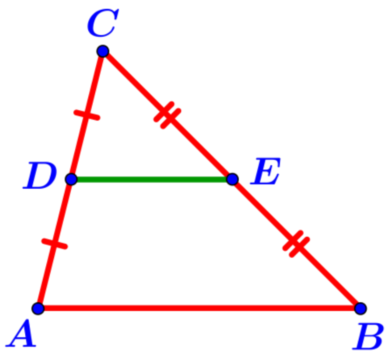
Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.



Een **middenparallel** in een driehoek is een lijnstuk dat de middens van twee zijden van die driehoek met elkaar verbindt.
In de figuur hiernaast is DE een middenparallel in ΔABC.

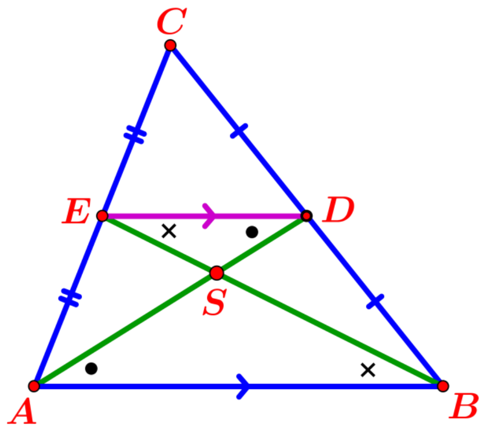
Stelling

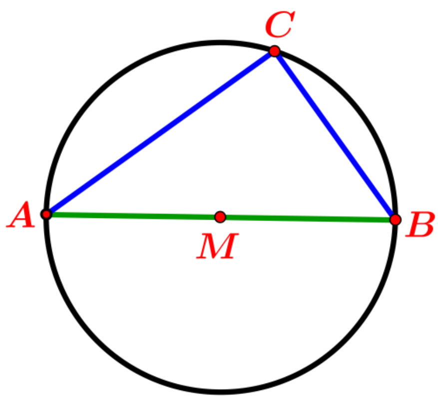
Een middenparallel is evenwijdig aan de derde zijde en heeft een lengte die de helft is van de lengte van die derde zijde.



Stelling

De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt.
Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijnen in de verhouding 2 : 1.





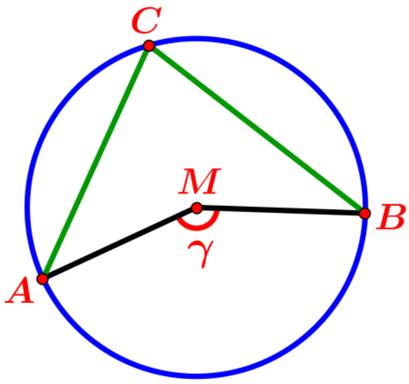
Stelling van Thales

Op de cirkel met middelpunt M liggen de punten A, B en C, waarbij AB een middellijn is. Dan geldt: $\angle ACB = 90°$.

Omkering van de stelling van Thales

Als ΔABC rechthoekig is met de rechte hoek in C, dan ligt C op de cirkel met AB als diameter.

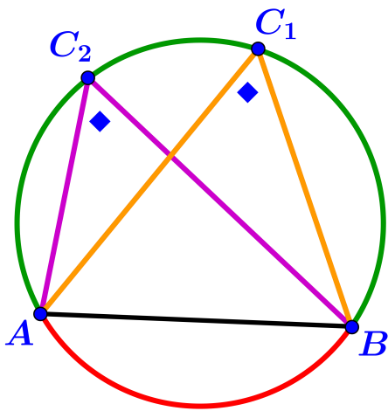
Omtrekshoek en middelpuntshoek



Neem drie punten A, B en C op een cirkel met middelpunt M. We noemen $\angle ACB$ een **omtrekshoek.** De cirkelboog tussen A en B waar C niet op ligt bepaalt de **middelpuntshoek** $\gamma = \angle AMB$. Er geldt:

$\boldsymbol{\gamma = 2 \cdot \angle ACB}$.

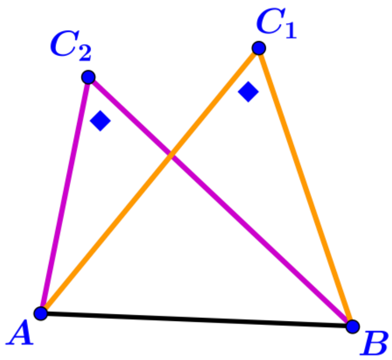
Constantehoek-stelling



Neem een cirkel met daarop twee vaste punten A en B. Deze twee punten verdelen de cirkel in twee cirkelbogen. Kies twee willekeurige punten C_1 en C_2 op een van deze twee bogen. Dan geldt: $\boldsymbol{\angle AC_1B = \angle AC_2B}$.

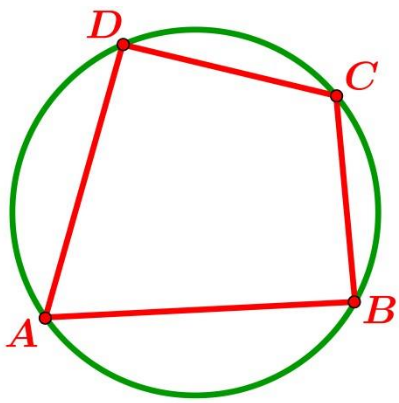
Anders uitgedrukt $\angle ACB$ heeft een vaste (constante) waarde als C beweegt langs een van de cirkelbogen, bepaald door de punten A en B.

Omkering constantehoek-stelling



Als de punten C_1 en C_2 aan dezelfde kant van lijn AB liggen en er voldaan is aan $\angle AC_1B = \angle AC_2B$, dan liggen de punten A, B, C_1 en C_2 op één cirkel.

Koordenvierhoek-eigenschap

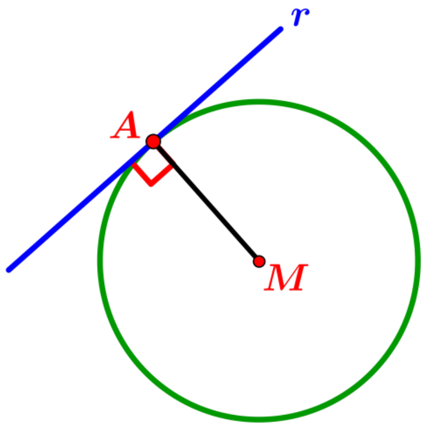


Stel dat $ABCD$ een koordenvierhoek is. Dan zijn overstaande hoeken samen 180°

Dus $\boldsymbol{\angle A + \angle C = 180°}$ **en** $\boldsymbol{\angle B + \angle D = 180°}$.

Omkering koordenvierhoek-eigenschap

Als $ABCD$ een vierhoek is zodanig dat $\boldsymbol{\angle A + \angle C = 180°}$, dan is $ABCD$ een koordenvierhoek, d.w.z. de punten A, B, C en D liggen op één cirkel.



Raaklijn loodrecht op voerstraal

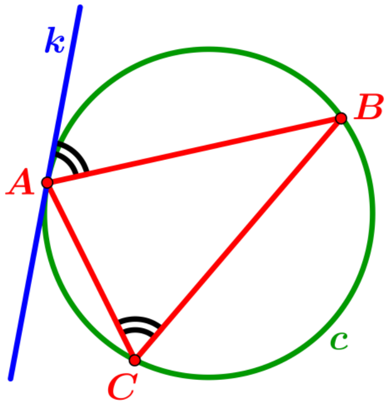
Stel dat lijn r een cirkel met middelpunt M raakt in punt A.

AM heet dan de voerstraal naar het raakpunt.

Dan geldt: r staat loodrecht op AM.

Omkering eigenschap raaklijn loodrecht op voerstraal.

Stel dat lijn r een cirkel met middelpunt M snijdt in punt A, zodanig dat $r \perp AM$. Dan raakt r aan de cirkel.

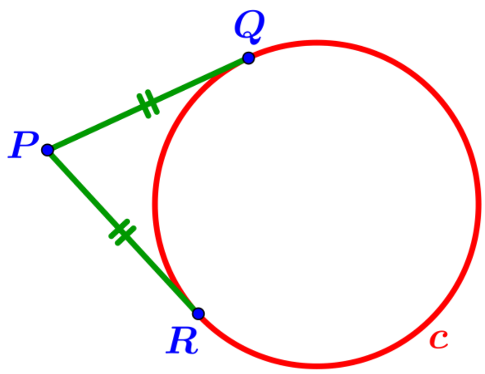


Hoek tussen raaklijn en koorde

Lijn k raakt aan een cirkel c in punt A.

AB is een koorde in c. Verder is C een willekeurig punt op c zodanig dat $\angle C$ niet stomp is.

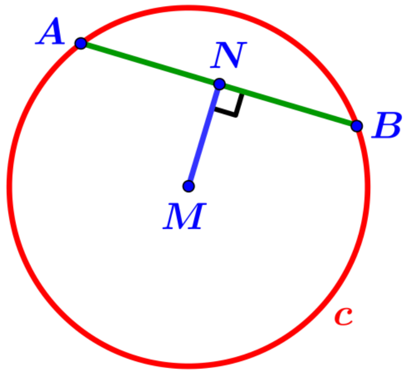
Dan geldt: $\boldsymbol{\angle(k, AB) = \angle C}$.



Gelijke raaklijnstukken

Vanuit punt P buiten cirkel c worden twee raaklijnen aan c getrokken. De twee raakpunten zijn P en Q.

Dan geldt: $\boldsymbol{PQ = PR}$.



Loodlijn op koorde

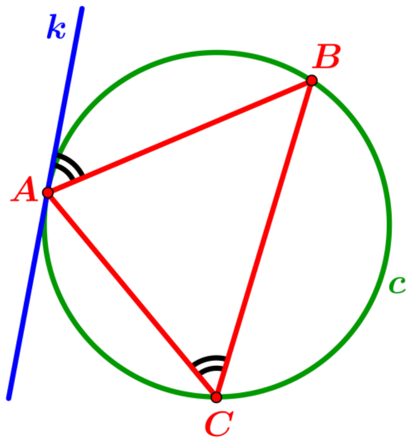
In de cirkel c met middelpunt M is AB een koorde.

MN staat loodrecht op AB, waarbij M op AB ligt.

Dan geldt: $\boldsymbol{AN = BN}$.

Stelling

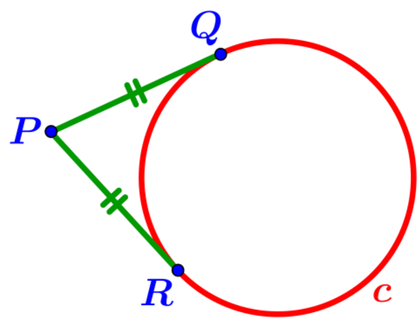
In een cirkel geldt dat de hoek tussen een raaklijn en koorde gelijk is aan de niet-stompe omtrekshoek die staat op die koorde.



Stelling

Gegeven een cirkel c en een punt P buiten c. Vanuit P worden twee raaklijnstukken PQ en PR getrokken.

Dan geldt dat $PQ = PR$.

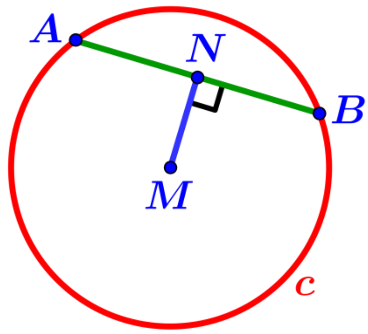


Stelling

In de cirkel c met middelpunt M is AB een koorde.

MN staat loodrecht op AB, waarbij M op AB ligt.

Dan geldt: $AN = BN$.



Stelling

Een lijn m die loodrecht staat op een koorde AB in een cirkel c en die koorde in twee gelijke stukken verdeelt, gaat door het middelpunt van M van c.

Elke driehoek heeft een **omgeschreven cirkel**. Dit is de cirkel dit gaat door de drie hoekpunten van de driehoek.

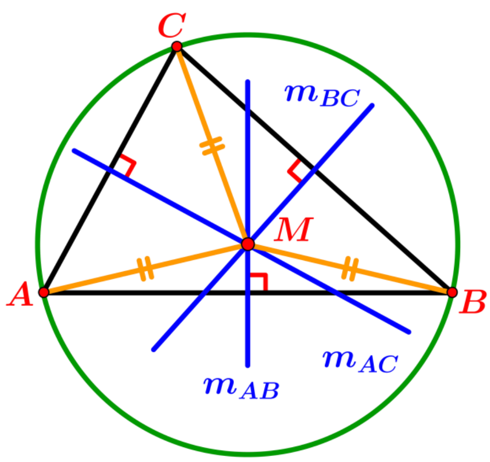
Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.

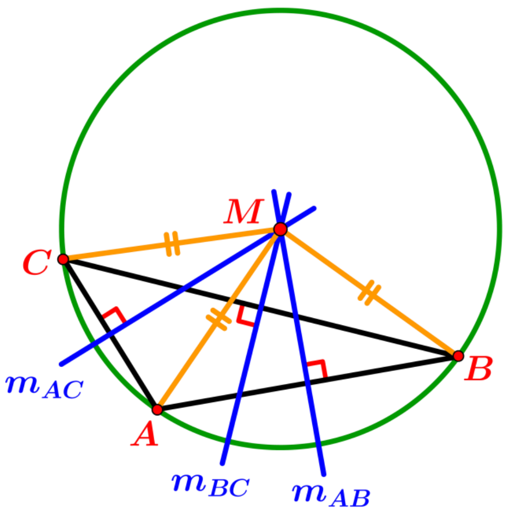
Als de driehoek scherphoekig is, zoals hiernaast, dan ligt het middelpunt van de omgeschreven cirkel binnen de driehoek.

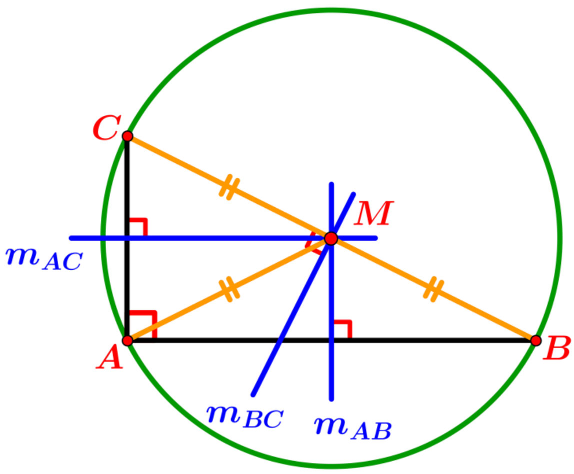
Als de driehoek stomphoekig, dan ligt het middelpunt van de omgeschreven cirkel buiten de driehoek.

Als de driehoek rechthoekig is, dan is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

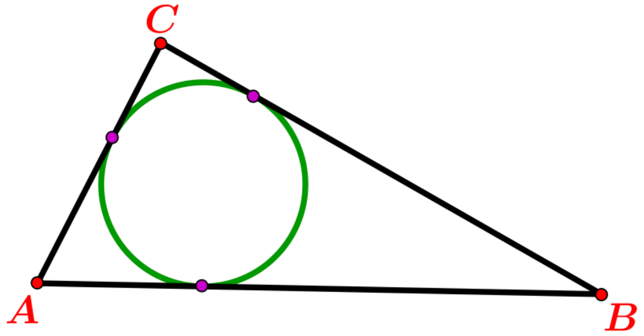
Zie voor de laatste twee situaties de volgende figuren.







Elke driehoek bezit een zogenaamde **ingeschreven cirkel**. Dit is een cirkel die (inwendig) raakt aan de zijden van de driehoek. Het middelpunt van deze ingeschreven cirkel is het snijpunt van de bissectrices.



Stelling (bissectricestelling)

In ΔABC is CD de inwendige of uitwendige deellijn uit $\angle C$. Dan geldt: $AD : BD = AC : BC$.