Tellen

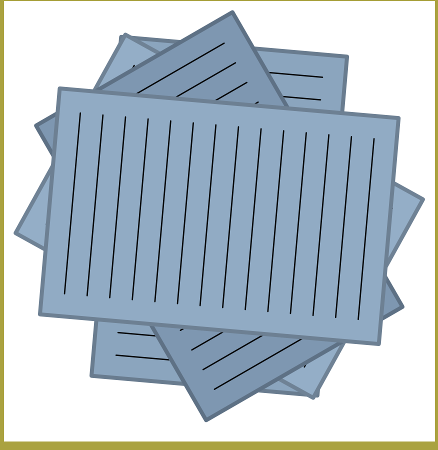
Combinatoriek

Havo Wiskunde A / Docentenboek

2024

ConTeXt College

J. Hagen



1

Tellen

1.1 Mogelijkheden

Inleiding

Misschien heb je je wel eens afgevraagd hoeveel verschillende postcodes, hoeveel nummerborden, hoeveel pincodes er zijn. Of hoeveel mogelijkheden er zijn om een dubbel-zes te gooien met twee dobbelstenen in verhouding tot het totaal aantal mogelijkheden. Maar dan moet je wel een idee hebben welke mogelijkheden er zijn. Om daar een goed overzicht over te krijgen kun je het best systematisch te werk gaan. Boomdiagrammen en tabellen helpen er bij.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- mogelijkheden systematisch tellen;
- mogelijkheden in kaart brengen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met kansen.

Voor de docent

Bij het onderwerp 'Tellen' gaat het in eerste instantie om het leren om mogelijkheden in kaart te brengen om ze daarmee systematisch te kunnen tellen. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen een probleem waarvan de oplossing niet meteen voor de hand ligt. Ze werken daar dan in groepjes van 2 of 3 leerlingen aan. Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen. Bij telproblemen lukt dat meestal al door het totale aantal op te schroeven.

Gewenste materialen:

- Voldoende muntjes van 10 cent om mee te experimenteren.
- Voldoende dobbelstenen om mee te experimenteren.
- Bij de derde opdracht hoort een figuur, die kan met de hand worden getekend, of vooraf gekopieerd.

Opdracht 1

Bij tossen wordt met een munt geworpen. Het werpen met een munt heeft de uitkomst 'kop' of 'munt'. Bij een zuivere munt zijn beide uitkomsten even waarschijnlijk. Je gooit met vier zuivere munten. Laat zien waarom je meestal twee keer 'kop' en dus ook twee keer 'munt' zult krijgen.

Toelichting

Leerlingen die geen idee hebben hoe ze dit moeten aanpakken, geef je vier muntjes en vraag je om op te schrijven wat ze aantreffen op het gebied van 'kop' of 'munt'. Stel dan de vraag "Maakt het uit op welk muntje 'kop' zit?" of de vraag "Is KMMM hetzelfde als MKMM?".

Leerlingen die zo maar proberen om mogelijkheden op te schrijven vraag je "Kan dit systematischer? En zo ja, hoe dan?".

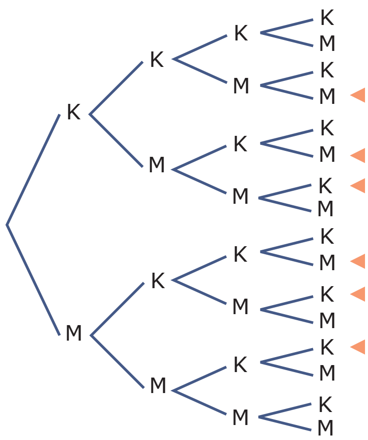
Een (nuttige) vervolgvraag is: "Kun je een paar manieren van systematisch tellen beschrijven?".

Leerlingen die dit snel zien, daag je uit met: "Hoe doe je dit met vijf, zes muntjes?".

Uitwerking

De ‘gunstige’ mogelijkheden zijn KKMM, KMKM, KMMK, MKKM, MKMK, MMKK. Dat zijn er 6 van de in totaal 16.
Dit kun je vaststellen door:

- Alle mogelijkheden systematisch te tellen: 0 K is alleen MMMM, 1 K is KMMM, MKMM, MMKM, MMMK, etc.
- Een boomdiagram te maken: zie figuur.
- Een wegendiagram is minder geschikt.



Figuur 1.2

Opdracht 2

Je gooit met twee gewone, zuivere dobbelstenen en kijkt hoeveel ogen er samen boven liggen. Welk aantal zal het meest voorkomen? Laat zien waarom dat zo is.

Toelichting

Leerlingen die geen idee hebben hoe ze dit moeten aanpakken, geef je twee dobbelstenen en vraag je om op te schrijven wat ze aantreffen v.w.b. de totale aantallen ogen. Stel dan de vraag “Kun je elk aantal ogen op evenveel manieren krijgen?” of de vraag “Is 1-2 hetzelfde als 2-1?”.

Leerlingen die zo maar proberen om mogelijkheden op te schrijven vraag je “Kan dit systematischer? En zo ja, hoe dan?”.

Leerlingen die dit snel zien, daag je uit met: “Hoe doe je dit met drie, vier dobbelstenen?” (roosters gaan niet echt gemakkelijk, een boomdiagram is ook nogal wat, misschien een wegendiagram?).

Uitwerking

Een handig overzicht van de mogelijkheden is nu:

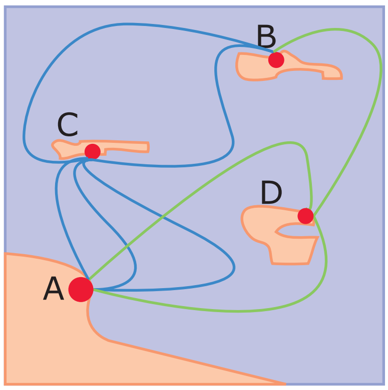
- Alle mogelijkheden systematisch te tellen: 2 ogen is 1-1, 3 ogen is 1-2 en 2-1, etc.
- Een boomdiagram te maken met voor de eerste dobbelsteen 6 getallen en bij elk getal voor de twee dobbelsteen weer 6 getallen.
- Een rooster is hier het handigst, zie figuur.

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figuur 1.3

Opdracht 3

Je kunt van A naar B via C of via D. Je ziet alle verbindingen getekend.
Op hoeveel manieren kun je van A naar B?



Figuur 1.4

Toelichting

Leerlingen die geen idee hebben hoe ze dit moeten aanpakken, stel je deelvragen als “Via welke twee eilanden moet je in ieder geval?” en/of “Op hoeveel manieren kun je van A naar C?” en/of “Op hoeveel manieren kun je van A via C naar B?”.

Leerlingen die dit snel zien, daag je uit met: “Hoe werk je hier met optellen en vermenigvuldigen?” en/of “Wanneer ga je optellen en wanneer vermenigvuldigen?”.

Uitwerking

Je kunt van A naar B gaan via C. Dus $3 \cdot 2 = 6$ manieren. Of je kunt van A naar B via D op $2 \cdot 1 = 2$ manieren. Totaal kun je op $6 + 2 = 8$ manieren van A naar B.
Misschien zien ze de handige vuistregel dat je bij en-mogelijkheden vermenigvuldigt en bij of-mogelijkheden optelt. Je gaat van A naar C én van C naar B óf van A naar D én van D naar B. Het aantal manieren is $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$.

Opdracht 4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op in de reader.

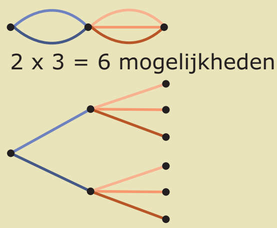
Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht. Misschien zou je er nog iets aan kunnen toevoegen als vuistregel: bij ‘en’ vermenigvuldigen en bij ‘of’ optellen.

Theorie

Om te onthouden

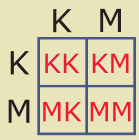
Voor het systematisch tellen van mogelijkheden bestaan hulpmiddelen.



Figuur 1.5

- Het **wegendiagram**. Kijk in de figuur. Het is een schema (een graaf) waarin je de mogelijkheden weergeeft als verbindingslijnen tussen punten. Het kan ontstaan als compacte versie van een boomdiagram. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door de mogelijkheden om van punt naar punt te komen te vermenigvuldigen.
- Het **boomdiagram**. Kijk in de figuur. Het is een schema waarin je alle mogelijkheden weergeeft als vertakkingen vanuit punten. Dit boomdiagram heeft twee lagen met in de eerste laag twee takken en in de tweede laag drie takken. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door het aantal takken in de laatste laag te tellen. Een boomdiagram kun je altijd maken, maar het kan erg groot zijn.
- Systematisch **uitschrijven**. Er zijn zes manieren om bij het gooien met vier geldstukken twee keer kop en twee keer munt te gooien: KKMM, KMKM, KMMK, MKKM, MKMK, MMKK. Uitschrijven kan altijd, maar het kan veel tijd kosten en je vergeet snel mogelijkheden.

- Een **rooster**. Kijk in de figuur. Dit rooster laat het aantal even waarschijnlijke mogelijkheden bij het werpen met twee munten zien. Het totaal aantal mogelijkheden is het aantal vakjes met een uitkomst. Een rooster kun je maken als je maar twee verschillende series mogelijke uitkomsten hebt.



Figuur 1.6

Verwerken

★ **Opgave 1**

Een toets bestaat uit zes meerkeuzevragen. Bij elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen. Er is steeds één antwoord goed.

a Als je alle mogelijkheden in een wegendiagram weergeeft, hoeveel wegen zijn er dan?

b Hoeveel mogelijke verschillende antwoorden zijn er voor de hele toets?

c Je hebt de toets goed voorbereid en je weet vier antwoorden zeker. Hoeveel mogelijke antwoorden voor de hele toets zijn er nog?

d Hoeveel mogelijke antwoorden voor de hele toets zijn er mogelijk, als je alleen let op ‘goed’ of ‘fout’?

★ **Opgave 2**

Om het cijferslot van een koffer open te krijgen, moet je een code van 3 cijfers onthouden.

a Je weet alleen het eerste cijfer nog. Hoeveel mogelijke codes zijn er dan nog?

b Je weet alle drie de cijfers nog, maar de volgorde niet meer. Hoeveel mogelijke codes zijn er?

★ **Opgave 3**

Je gooit met drie dobbelstenen.

a Als je alle mogelijkheden in een wegendiagram weergeeft, hoeveel wegen zijn er dan?

b Waarom is een boomdiagram in dit geval niet zo geschikt?

c Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je precies één zes?

d Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je minstens twee zessen?

e Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je hoogstens twee zessen?

f Hoeveel mogelijkheden zijn er om totaal zes ogen te gooien?

g Hoeveel mogelijkheden zijn er om minstens zestien ogen te gooien?

★ **Opgave 4**

Je bestelt een pizza. Je hebt keuze uit een kleine pizza, een gewone pizza en een extra grote pizza. Er zijn twee soorten pizzabodems, de Pizza Crossa en de Pizza Classica. Verder zijn er twaalf verschillende smaken. Je kunt de pizza zelf halen of je kunt hem laten bezorgen.

a Uit hoeveel verschillende pizza's kun je kiezen?

b Hoeveel keuzemogelijkheden heb je als je een pizza wilt eten?

c Je houdt niet van vis. Daarom vallen er vijf smaken af. Uit hoeveel verschillende pizza's kun je nu kiezen?

★★ **Opgave 5**

Een fruitautomaat heeft drie vensters waarachter banden met plaatjes draaien. Op elke band staan twintig plaatjes. Je brengt ze in beweging door aan een hendel te trekken. Eén druk op de knop en de banden stoppen. Zie je drie dezelfde plaatjes, dan win je een bepaald bedrag. Je ziet het aantal plaatjes per band. Bekijk de tabel goed en beantwoord de vragen.

plaatje	band 1	band 2	band 3
BAR	1	2	1
bel	8	1	7
pruim	2	7	3
sinaasappel	2	8	4
twee kersen	7	2	0
citroen	0	0	5

Figuur 1.7

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om drie plaatjes op een rij te krijgen?

b Op hoeveel manieren krijg je drie keer bar?

c Op hoeveel manieren krijg je bel of sinaasappel?

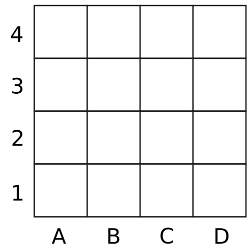
d Op hoeveel manieren krijg je één keer kersen en twee keer pruim?

e Op hoeveel manieren kun je winnen?

★★ **Opgave 6**

Je hebt een veld van 4×4 vierkante hokjes. Van deze zestien hokjes wil je er precies vier zwart kleuren. Het moet zó gebeuren dat elke rij en elke kolom precies één zwart hokje krijgt. Bovendien mogen er geen twee zwarte hokjes diagonaal (met een hoekpunt) aan elkaar grenzen.

Op hoeveel manieren kun je de vier hokjes kiezen?



Figuur 1.8

Toepassen

★★★ **Opgave 7: WK voetbal 2010**

Aan het WK voetbal 2010 in Zuid-Afrika deden 32 landen mee. Ze speelden eerst een groepsfase. Hierin speelden de landen in acht poules van vier teams. In zo'n poule speelt elk team één wedstrijd tegen elk ander team. De twee hoogst eindigende teams per poule gingen door naar de knock-outfase. Deze overgebleven teams speelden allemaal één wedstrijd tegen een ander team en de verliezer moest naar huis. De winnaars gingen door en speelden weer één wedstrijd tot er uiteindelijk nog twee teams over waren. Die speelden de finale. Er was ook nog een wedstrijd om de derde plaats, de troostfinale.

In eerdere edities van het WK waren er minder deelnemende teams. Zo waren er in 1974 in West-Duitsland maar zestien teams. Die speelden volgens hetzelfde schema. Eerst in poules van vier teams en de twee hoogst eindigende teams naar de knock-outfase.
Er werden in 1974 natuurlijk veel minder wedstrijden gespeeld dan in 2010.

a Ga met een berekening na of de verdubbeling van het aantal deelnemende teams ook geleid heeft tot een verdubbeling van het totaal aantal wedstrijden.

Alle WK's kenden een groepsfase met poules van vier teams. Er kunnen ook meer teams in een poule zitten. Dat leidt dan tot een groter aantal poulewedstrijden.

$W(n)$ is het aantal wedstrijden in een poule met n teams. Er geldt dat $W(n+1) = W(n) + n$ waarbij $W(n+1)$ het aantal wedstrijden in een poule met $n+1$ teams is.

b Toon aan dat dit klopt.

(naar: pilotexamen 2013, tweede tijdvak)

1.2 Herhaling of niet

Inleiding

Bij het systematisch tellen heb je tot nu toe vooral gewerkt met diagrammen. Eigenlijk gaat dat alleen als het aantal mogelijkheden niet al te groot is. Want gooi je bijvoorbeeld met drie of meer dobbelstenen, dan wordt het aantal even waarschijnlijke uitkomsten al snel zo groot, dat een boomdiagram niet meer te maken is. Wegendiagrammen zijn dan nog wel te maken, maar daarin kun je niet gemakkelijk de afzonderlijke mogelijkheden zien. Vaak kun je ook aantallen mogelijkheden berekenen zonder diagrammen. Daarbij is als eerste belangrijk om onderscheid te maken tussen situaties met herhaling en situaties zonder herhaling.

Je leert in dit onderwerp

- werken met machten als je mogelijkheden telt in situaties waarin herhaling optreedt;
- werken met faculteit;
- werken met permutaties als je mogelijkheden telt in situaties waarin steeds een mogelijkheid wordt afgestreept.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen.

Voor de docent

Een volgende stap bij systematisch ‘Tellen’ is het verschil herkennen tussen herhaling (waarbij je steeds uit hetzelfde aantal mogelijkheden kunt kiezen) of geen herhaling (waarbij het aantal mogelijkheden steeds verandert, of systematisch ééntje minder wordt). Daaraan wordt in de volgende opdrachten gewerkt. In de tweede opdracht wordt het begrip **faculteit** ook ingevoerd, in de derde opdracht kan het begrip **permutatie** worden ingevoerd.

Gewenste materialen:

- Grafische rekenmachines om het begrip ‘faculteit’ en de bijbehorende knoppen van de grafische rekenmachine te bespreken.

Opdracht 1

Een PIN-code (PIN betekent Persoonlijk Identificatie Nummer) bestaat uit vier cijfers.

1. Hoeveel PIN-codes kun je maken als op elke positie elk cijfer kan staan?
2. Hoeveel PIN-codes kun je maken als op elke positie elk cijfer, maar er geen 0 vooraan mag staan?
3. Hoeveel PIN-codes kun je maken als op elke positie een ander cijfer moet staan?
4. Waarom is het niet langer handig om bij dergelijke vragen met een boomdiagram te werken, of alle mogelijkheden systematisch te noteren? Hoe doe je zoiets dan wel?

Toelichting

Leerlingen die geen idee hebben hoe ze dit moeten aanpakken, geef je vragen die terug slaan op het voorgaande, zoals “Kun je het aantal mogelijkheden uittekenen? Welk soort diagram zou je willen gebruiken?” of de vraag “Hoeveel mogelijkheden heb je voor het eerste cijfer? En het tweede?”.

Mogelijke vervolgvragen zijn: “Wat is het kenmerkende verschil tussen de eerste en de derde vraag? Kun je daar een systeem voor bedenken?”.

Uitwerking

Antwoorden:

1. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ bankrekeningnummers.
2. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^3$ bankrekeningnummers.
3. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ bankrekeningnummers.
4. Het aantal mogelijke takken in een boomdiagram wordt te groot. En ook voor systematisch uitschrijven heb je nu teveel mogelijkheden. Op dit moment doe je zoiets door per cijfer te kijken naar het aantal mogelijkheden en dan die mogelijkheden te vermenigvuldigen (zoals je dat ook zou doen in een boomdiagram als je dat zou willen maken.

Opdracht 2

In de wiskunde bestaat het begrip **faculteit**. Zo is 10-faculteit: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1$.
Dit wordt geschreven als $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1$.

Hoe kun je met behulp van dit begrip je antwoord op de derde vraag van de vorige opgave opschrijven?

Toelichting

Leerlingen die geen idee hebben hoe ze dit moeten aanpakken, stel je vragen zoals “Hoe kun je uit een vermenigvuldiging een deel weglaten?” of de vraag “Welke bewerking heft een vermenigvuldiging met een getal op?”.

De leerlingen komen vast niet zomaar op het idee om alleen met de 10 en de 7 te werken.

Mogelijke vervolgvragen zijn: “Welke getallen bepalen het probleem? Kun je het antwoord zo schrijven dat alleen die getallen erin voorkomen?”.

Uitwerking

Antwoord: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$.

Het belang van de laatste notatie is, dat de 10 en de 4 die karakteristiek zijn voor dit probleem, erin voorkomen.

Opdracht 3

Tijdens de finale van de 100 meter hardlopen op de Olympische Spelen strijden acht lopers om drie medailles. De lopers zijn allemaal topatleten. Veronderstel dat alle denkbare volgordes van binnenkomst mogelijk zijn.

Op hoeveel manieren kunnen de medailles worden verdeeld?
En op hoeveel manieren kunnen de acht lopers de finish passeren?

Toelichting

Dit is het moment om het voorgaande toe te passen. En misschien ook een moment om het gebruik van de grafische rekenmachine onder de aandacht te brengen. Misschien ga je ze vertellen waar de knopjes voor faculteit en nPr zitten, misschien laat je ze dit zelf uitpluizen. Ook de term ‘permutaties’ zou nu voorbij moeten komen als term voor ‘een afgebroken faculteit’.

Uitwerking

Voor de eerste positie zijn acht mogelijke kandidaten, voor de tweede dan nog zeven en voor de derde nog zes.
Er zijn $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ mogelijke uitslagen. Dit is het aantal mogelijke permutaties van drie elementen uit acht elementen waarbij de volgorde van belang is. De grafische rekenmachine kent hiervoor een speciale functie, het plaatje is van de TI-84.

Figuur 1.1

De acht lopers kunnen op $8! = 40320$ volgordes de finish passeren.

Opdracht 4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op in de reader.

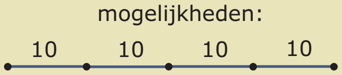
Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht. Misschien zou je er nog iets aan kunnen toevoegen als vuistregel: bij ‘en’ vermenigvuldigen en bij ‘of’ optellen.

Theorie

Om te onthouden

Als je vier elementen kiest uit tien beschikbare elementen en herhaling is toegestaan en je let op de volgorde, dan heb je 10^4 mogelijkheden.



Figuur 1.2

Als je vier elementen kiest uit tien beschikbare elementen en herhaling is niet toegestaan en je let op de volgorde, dan heb je $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ mogelijkheden.

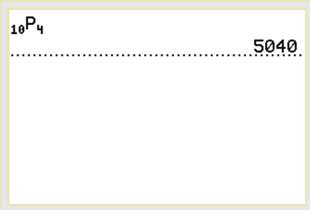
Dit noem je het aantal **permutaties** van vier uit tien elementen. Het woord 'permutationem' (Latijn) betekent verwisseling.

Figuur 1.3

Als herhaling niet is toegestaan, dan krijg je te maken met vermenigvuldiging van een rij getallen die steeds met één vermindert. De vermenigvuldiging van de aflopende rij opeenvolgende getallen n tot en met 1 wordt n-**faculteit** genoemd. Dit schrijf je als $n!$.
Dus $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Afgesproken is dat $0! = 1$. De rekenmachine heeft een functie om faculteiten te berekenen.

Bij permutaties heb je te maken met vermenigvuldiging van een aflopende rij opeenvolgende getallen. Alleen stopt die rij niet altijd bij 1. De rekenmachine heeft ook een speciale functie om het aantal permutaties zoals $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ te berekenen.



Figuur 1.4

Zie het **Practicum**.

Verwerken

★ **Opgave 1**

In Nederland bestaat de postcode uit vier cijfers, gevolgd door twee letters. Alle cijfers zijn op elk van de vier plaatsen mogelijk. Ook elke letter is op elk van de twee plaatsen mogelijk.
Hoeveel postcodes zijn er in Nederland totaal mogelijk?

★ **Opgave 2**

De tekens van een grafische rekenmachine bestaan uit puntjes. Elk klein teken past in een rechthoekje van 10 bij 12 puntjes. Een teken wordt gemaakt door deze puntjes aan of uit te zetten.
Hoeveel tekens zijn er in principe mogelijk?

★ **Opgave 3**

Aan de herenfinale op de steeple-chase doen bij de Olympische Spelen vijftien mannen mee. De nummers 1, 2 en 3 komen op het erepodium.
Op hoeveel manieren kunnen die ereplaatsen theoretisch worden verdeeld?

★ **Opgave 4**

Een groep van zeven vrienden (drie meisjes en vier jongens) komt tegelijk met de fiets aan op school. Zij zetten hun fietsen naast elkaar in de fietsenstalling.

a Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

b Eén van de zeven vrienden wil per se zijn fiets aan de buitenkant van de groep fietsen zetten. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de fietsen nu neergezet worden?

c Twee personen willen per se hun fietsen naast elkaar zetten. Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

d De drie meisjes willen hun fietsen naast elkaar zetten en de vier jongens ook. Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

★ ★ **Opgave 5**

Een kaartspel bestaat uit de kaartsoorten harten, ruiten, schoppen en klaveren. De kaartsoorten harten en ruiten zijn rood gekleurd en de kaartsoorten schoppen en klaveren zijn zwart gekleurd. Van elke kaartsoort zitten er dertien kaarten in het spel. Dat zijn de kaarten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer, aas. Iemand pakt uit een kaartspel één voor één vier kaarten.

a Op hoeveel manieren kan dat?

b Op hoeveel manieren kan hij vier kaarten van dezelfde soort pakken?

c Op hoeveel manieren kan hij vier kaarten van dezelfde kleur pakken?

d Op hoeveel manieren kan hij vier kaarten van verschillende soort pakken?

★ ★ **Opgave 6**

Je werpt met vier dobbelstenen.

a Op hoeveel manieren kun je 23 of meer ogen gooien?

b Op hoeveel manieren kun je met het product van de ogen 24 krijgen met verschillende ogen van de vier dobbelstenen?

Toepassen

★ ★ ★

Opgave 7: Mobiel dataverkeer

Het gebruik van apparatuur voor mobiel dataverkeer (zoals tablet en laptop) is in de loop der jaren toegenomen. In 2014 verscheen daarover een nieuwsbericht.

> Er komt een tekort aan 06-nummers aan. Steeds meer apparatuur maakt gebruik van mobiele datacommunicatie en communiceert door middel van een simkaart. Denk aan mobiel internet op tablet en laptop, maar ook aan liftinstallaties, snoep- en frisdrankautomaten, OV chipkaart systemen, mobiele reisinformatie in het openbaar vervoer, navigatiesystemen, enzovoort.
> Omdat de komende jaren een explosieve groei wordt verwacht in het aantal mobiele data-aansluitingen, heeft de overheid een nieuwe, twaalfcijferige nummerreeks in gebruik genomen. Deze nummerreeks begint met 097 en is alleen bedoeld voor mobiele datacommunicatie. In de toekomst moeten alle mobiele datatoepassingen gebruikmaken van een 097-nummer om zo de huidige 06 nummerreeks te ontlasten.

Mobiele telefoons behouden de bekende tiencijferige 06-nummers, overige apparatuur krijgt een twaalfcijferig 097-nummer. Nederland telt ongeveer 17 miljoen inwoners.

Met welk aantal neemt het maximale aantal apparaten voor mobiele datacommunicatie per Nederlander toe door de introductie van de 097-nummers?

★ ★

Opgave 8: IP-adressen

IP-adressen worden gebruikt om nummers toe te kennen aan computers die verbonden zijn met het internet. Een IP-adres V4 is een adres dat bestaat uit vier getallen die gescheiden zijn door een punt. Een voorbeeld van zo'n adres is 135.75.43.52. Elk van de vier getallen kan een waarde van 0 tot en met 255 aannemen en de getallen mogen meerdere keren voorkomen.
Hoeveel IP-adressen V4 zijn er mogelijk?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met een grafische rekenmachine kun je met machten en faculteiten werken. Ook kan de machine permutaties voor je berekenen. Zie het practicum:

- **Tellen en de TI84**
- **Tellen en de TInspire**
- **Tellen en de Casio cfx-9850**
- **Tellen en de HPprime**
- **Tellen en de NumWorks**

1.3 Combinaties

Inleiding

In dit onderdeel bekijken we situaties waarin je een keuze maakt van een aantal elementen uit een groep. Je leert onderscheid te maken tussen situaties waarin de volgorde waarin de elementen gekozen worden wel uitmaakt (permutaties) en niet uitmaakt (combinaties).

Je leert in dit onderwerp

- het verschil onderscheiden tussen permutaties en combinaties;
- het aantal combinaties van r uit n elementen berekenen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en permutaties toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling.

Voor de docent

Nu moet de stap van het gebruik van **permutaties** en **combinaties** worden gezet Daaraan wordt in de volgende opdrachten gewerkt. In de eerste opdracht kunnen deze begrippen worden ingevoerd. Maar dan moet wel voor iedereen het idee van het 'uitdelen van gelijke groepjes' zijn geland.

Gewenste materialen:

- Grafische rekenmachines om 'permutaties' en 'combinaties' met de grafische rekenmachine te bespreken.

Opdracht 1

Acht hardlopers doen mee aan een wedstrijd over 100 meter. Hun volgorde van aankomst hangt uitsluitend van het toeval af.

1. Op hoeveel manieren kunnen drie van de acht hardlopers als eerste, tweede en derde aankomen?
2. De eerste drie lopers gaan door naar de volgende ronde. Hoeveel mogelijke drietallen zijn dat?

Toelichting

De eerste vraag zou voor de leerlingen eenvoudig moeten zijn, werken met permutaties zouden ze moeten kunnen. Voor de tweede vraag gaat het om het 'uitdelen van gelijke groepjes'. Vragen als "Wat is het verschil met de voorgaande vraag?" of "Zijn er nu meer of juist minder mogelijkheden?" of "Is er nu verschil tussen ABC of BAC als eerste drie?".

Mogelijke vervolgvragen zijn: "Kun je dit handig opschrijven met faculteiten?".

Hierna zal er een moment moeten zijn om termen als 'permutaties' en 'combinaties' te introduceren en het verschil duidelijk te krijgen. Ook dat kan vragenderwijs, maar de notatie $\binom{8}{3}$ is wellicht handig om in te voeren, hoewel nCr tegenwoordig ook echt geaccepteerd lijkt.

Uitwerking

Antwoorden:

1. Op $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ manieren.
2. Het gaat om het aantal mogelijke combinaties van 3 uit 8, dus om $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ mogelijkheden.

Opdracht 2

Je wilt binnen een groep van acht meisjes en tien jongens vijf verschillende klusjes door loting verdelen.
Op hoeveel manieren kan dat als dit twee meisjes en drie jongens moeten zijn?

Toelichting

Dit is in feite een toepassing van het werken met permutaties en combinaties.
Hulpvragen als “Is hier sprake van herhaling op niet?” en “Zitten er gelijke groepjes bij?” en “Hoe let je op het feit dat het twee meisjes en drie jongens moeten zijn?” zijn meteen bruikbaar.
Daarna moet er nog rekening worden gehouden met het verdelen van de klusjes.

Misschien dat ook dit antwoord voorbij komt: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 40320$. Leuk is dan het gesprek waarom dit fout is.

Uitwerking

De twee meisjes en drie jongens kun je op $\binom{8}{2} \cdot \binom{10}{3} = 28 \times 120 = 3360$ manieren kiezen.

Binnen elk vijftal kun je op $5! = 120$ manieren de klussen verdelen. Het totaal aantal mogelijkheden is $5! \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{10}{3} = 120 \cdot 3360 = 403200$.

Opdracht 3

Een podium wordt belicht door zes spotlights die ‘aan’ of ‘uit’ kunnen staan.

Op hoeveel manieren kunnen vier van de zes lichten ‘aan’ staan?

Toelichting

Hulpvragen als “Hoeveel keuzes heb je voor de eerste lamp?” en “En voor de tweede?” en “Hoe ga je daarmee verder?” en “Is er nu verschil tussen ABCD of BACD als lampen die aanstaan?”.

Het is nu belangrijk dat de leerlingen ook hier de stap naar ‘combinaties’ duidelijk krijgen, leid ze toe naar de notatie $\binom{6}{4}$ of ${}_6C_4$ en het werken met de GR.

Uitwerking

Het gaat om het aantal mogelijke combinaties van 4 uit 6, dus om $\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ mogelijkheden.

Opdracht 4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op in de reader.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht. Misschien zou je er nog iets aan kunnen toevoegen als vuistregel: bij ‘en’ vermenigvuldigen en bij ‘of’ optellen.

Theorie

Om te onthouden

Als je drie elementen kiest uit acht beschikbare zonder herhaling waarbij de volgorde wel van belang is, heb je $8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = 336$ mogelijkheden.

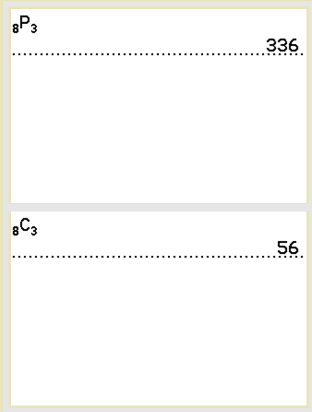
Dit is het aantal **permutaties** van drie elementen uit acht elementen.

Als je drie elementen kiest uit acht beschikbare zonder herhaling waarvan hun onderlinge volgorde niet van belang is, heb je $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$ mogelijkheden.

Dit heet het aantal **combinaties** van drie elementen uit acht elementen.

Je noteert $\binom{8}{3}$ en je zegt: 'acht boven drie'.

De rekenmachine heeft hier een speciale functie voor, zie het **Practicum**.



Figuur 1.1

Verwerken

★ **Opgave 1**

Iemand moet 10 vragen met 'ja' of 'nee' beantwoorden.

a Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies drie keer 'ja'?

b Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies 9 keer 'ja'?

c Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er in totaal mogelijk?

★ **Opgave 2**

Je gooit met vijf verschillende geldstukken en je let op het aantal keren 'kop'.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er mogelijk?

b Hoeveel mogelijke uitkomsten met precies twee keer 'kop' zijn er?

c Je gooit nu met 50 geldstukken. Op hoeveel manieren kun je 20 keer 'kop' werpen?

★ **Opgave 3**

Voor een schaaktoernooi hebben zich 24 deelnemers gemeld. Ze spelen een halve competitie, dus iedere deelnemer speelt precies één maal tegen iedere andere deelnemer. Het aantal wedstrijden kun je berekenen met behulp van combinaties. Leg uit waarom je met combinaties rekent en bereken het aantal te spelen wedstrijden.

★ **Opgave 4**

Een groep muizen bestaat uit acht mannetjes en twaalf vrouwtjes. Er wordt willekeurig een groepje van vijf muizen gekozen.

a Het groepje bestaat uit uitsluitend vrouwtjes. Hoeveel verschillende groepjes zijn er mogelijk?

b Het groepje bestaat uit hoogstens twee mannetjes. Hoeveel verschillende groepjes zijn er mogelijk?

★★ **Opgave 5**

Op hoeveel manieren kun je acht verschillende boeken op een rij op een boekenplank plaatsen onder de volgende voorwaarden?

a Elke volgorde is toegestaan.

b De drie wiskundeboeken moeten bij elkaar staan.

c De twee woordenboeken aan het eind of aan het begin moeten naast elkaar staan.

d Er worden eerst drie boeken uitgekozen om hetzelfde te worden gekaft en worden dan aan het eind van de rij gezet.

★ **Opgave 6**

Je werpt met drie dobbelstenen.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er? Let op! Er is één manier om drie te gooien, maar er zijn meerdere manieren om vier te gooien.

b Je kunt op verschillende manieren twaalf ogen gooien. Bijvoorbeeld door driemaal vier te gooien, maar ook door een zes en tweemaal drie te gooien.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om twaalf ogen te gooien?

c Op hoeveel manieren kun je hoogstens zestien ogen gooien?

★★ **Opgave 7**

Op een scholengemeenschap bestaat de medezeggenschapsraad uit twaalf personen: zes personeelsleden, drie ouders en drie leerlingen. Deze medezeggenschapsraad kiest een dagelijks bestuur van drie personen.

a Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als er verder geen eisen aan dat dagelijks bestuur worden gesteld?

b Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als er een personeelslid, een ouder en een leerling in moeten zitten?

c Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als eerst de voorzitter, vervolgens de vice-voorzitter en ten slotte de secretaris in functie worden gekozen?

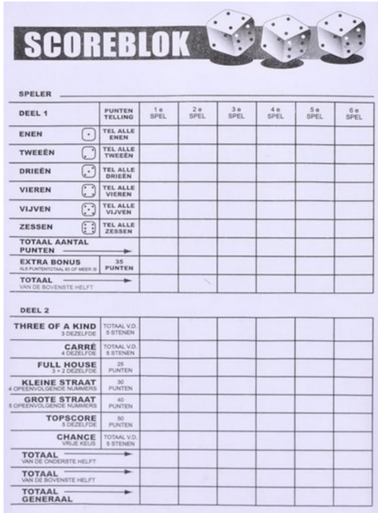
Toepassen

★ ★ **Opgave 8: Yahtzee**

Bij het dobbelspel Yahtzee gooi je met vijf dobbelstenen. Bij dit spel kun je afhankelijk van het aantal ogen op de dobbelstenen op een scoreformulier een puntentotaal noteren.

a Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er bij het gooien met vijf dobbelstenen?

b Eén van de worpen die punten oplevert, is Full House. Bij deze worp gooi je een aantal ogen driemaal en een ander aantal ogen tweemaal; bijvoorbeeld driemaal 5 en tweemaal 1. Hoeveel manieren zijn er om in één worp met vijf dobbelstenen Full House te gooien?

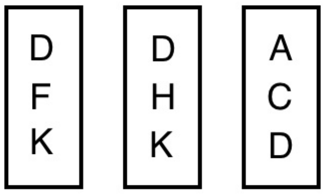


Figuur 1.2

★ ★ ★ **Opgave 9: Straten vergelijken**

Een planoloog wil weten op grond van welke eigenschappen de bewoners de straten van hun wijk beoordelen. Hij legt een aantal proefpersonen groepjes van drie straten voor. Hij vraagt hun bij elk groepje aan te wijzen welke twee van de drie straten het meest op elkaar lijken.

Het onderzoek heeft betrekking op tien straten, straat A, B, C, D, E, F, G, H, K en L genoemd. Hieruit worden alle mogelijke groepjes van drie gevormd en elk groepje wordt in alfabetische volgorde op een kaartje geschreven. Je ziet drie voorbeelden.



Figuur 1.3

a Hoeveel kaartjes zijn er nodig?

b Op hoeveel kaartjes komt straat A voor?

c Op hoeveel kaartjes komen straat A en B samen voor?

Een proefpersoon is bereid om bij alle kaartjes zijn keuze te maken.

d Onderzoek of het mogelijk is dat hij zeven keer voor de combinatie AB, zeven keer voor de combinatie AC en zeven keer voor de combinatie AD kiest.

(bron: examen havo wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties en combinaties snel kunnen worden berekend.

- **Tellen en de TI84**
- **Tellen en de TInspire**
- **Tellen en de Casio cfx-9850**
- **Tellen en de HPprime**
- **Tellen en de NumWorks**

1.4 Driehoek van Pascal

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- mogelijke routes zonder omwegen tellen in een rooster;
- de driehoek van Pascal gebruiken.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en permutaties toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling;
- permutaties en combinaties toepassen bij het kiezen van r elementen uit n elementen.

Voor de docent

Tenslotte leren leerlingen in dit onderdeel met name combinaties toepassen in roosters. De eerste opdracht is bedoeld om dit op te roepen, de volgende is een verder gaande opdracht. Daarin moeten de leerlingen op het idee van het gebruik van de driehoek van Pascal worden gebracht.

Gewenste materialen:

- De figuur bij de eerste opdracht moet vooraf in voldoende hoeveelheid zijn gekopieerd, hij staat op een werkblad.
- De figuur bij de tweede opdracht staat ook op een werkblad, maar kan ook op het bord worden getekend.

Opdracht 1

Figuur 1.1

Bekijk het stratenplan van het centrum van Denver, een grote stad in de VS.
Je staat op Larimer Square op de hoek van Larimer Street en 15th Street. Je wilt naar je hotel, het Hyatt Regency.

Uit hoeveel even lange routes (zonder omwegen) kun je kiezen?

Toelichting

De figuur staat ook op dit **Werkblad**.

Het eerste probleem zou kunnen zijn, dat de leerlingen niet precies door hebben wat de kortste routes zijn. Een hulpvraag als “Kun je de kortste routes aanwijzen?” is dan nuttig. De link met combinaties kan worden gelegd via vragen als “Welke keuzes moet je telkens maken?” en “Hoe kun je die keuzes tellen?”. Desnoods: “Past het werken met permutaties en/of combinaties in deze situatie?”.

Een mogelijke verdergaande vraag is: “Zie wat er bij elke keuze gebeurt met de voorafgaande keuzes?”.

Hiermee komen leerlingen hopelijk op het spoor van ‘tellen in een rooster’ volgens de driehoek van Pascal. Misschien een goed idee om zelf die driehoek ergens te laten zien zonder onmiddellijke toelichting en afwachten of leerlingen op ideeën komen en/of ernaar vragen.

Uitwerking

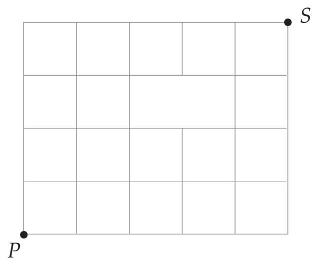
Het totale aantal manieren is: $\binom{7}{3} = 35$. Je kunt dus vier keer west en drie keer noord kiezen uit zeven opties. Je kiest eerst de posities voor N. Dat zijn er drie.

Je kunt ook eerst de vier W's kiezen. Je kiest vier posities uit de zeven mogelijke om een W neer te zetten. Dit kan op $\binom{7}{4}$ manieren en dit is gelijk aan $\binom{7}{3}$, omdat het voor het aantal mogelijkheden niet uitmaakt of je eerst de letters N plaatst en dan de letters W of omgekeerd.

(Het is nuttig om leerlingen te laten narekenen dat $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$.)

Opdracht 2

Hoeveel mogelijke routes (zonder omwegen) zijn er van P naar S?



Figuur 1.2

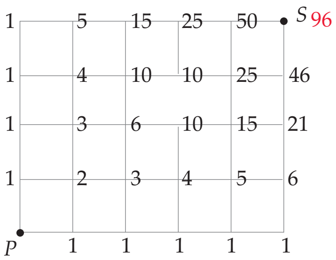
Toelichting

De figuur staat ook op dit `[Werkblad: ha-b24-od2-w01]`.

Bij deze opdracht gaat het vooral om het op het idee komen van ‘tellen in een rooster’ met de driehoek van Pascal. Hulpvragen (en wellicht het resultaat van de vorige opgave) zouden leerlingen op dat spoor moeten zetten.

Uitwerking

Je ziet dat er tussen twee roosterpunten geen weg is. Dus het aantal combinaties van vijf uit negen levert nu niet het goede antwoord op. Je kunt nu het aantal routes uittellen met behulp van het telsysteem van de driehoek van Pascal, zie figuur. Het totaal aantal routes is 96.



Figuur 1.3

Opdracht 3

Bekijk wat iedereen heeft bedacht.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op in de reader.

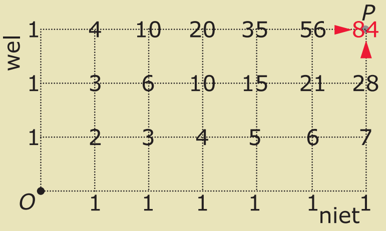
Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht. Misschien zou je er nog iets aan kunnen toevoegen als vuistregel: bij ‘en’ vermenigvuldigen en bij ‘of’ optellen.

Theorie

Om te onthouden

Bekijk het rooster van 6 bij 3. Je vertrekt vanuit punt O richting punt P. Er zijn in elk roosterpunt twee keuzes: je gaat richting 'wel' of richting 'niet'. Je telt het aantal routes zonder omwegen van punt O naar punt P. Elke route (zonder omwegen) bestaat uit een route als NWNNWNWNN, drie keer 'wel' en zes keer 'niet'.



Figuur 1.4

Het aantal routes naar een punt is telkens de som van het aantal routes naar het punt eronder en het aantal routes naar het punt links ervan. Je kunt dat in de figuur gemakkelijk natellen als je bedenkt dat je (bij het doorlopen van kortste routes) alleen naar rechts en omhoog kunt bewegen over de roosterlijnen. Dit telpatroon heet de **driehoek van Pascal** en kun je in een schema weergeven.

Je kunt het aantal routes NWNNWNWNN ook berekenen met **combinaties**. Je kiest drie uit de negen posities om een W neer te zetten. Daarbij speelt de volgorde binnen het groepje van 3 W's en 6 N's geen rol. Je vindt: $\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84$ routes.

Verwerken

★ Opgave 1

Een hockeyer neemt acht keer een strafbal en let op het aantal keren dat hij raak schiet.

a Op hoeveel manieren kan hij drie keer raak schieten?

b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

c Op hoeveel manieren kan hij minstens zes keer raak schieten?

d Op hoeveel manieren kan hij hoogstens zes keer raak schieten?

★ Opgave 2

Een schaakclub telt zeven leden. Als de leden bij elkaar komen, dagen ze elkaar uit voor een partijtje schaak.

a Teken een rooster om alle mogelijkheden te tellen voor iemand die twee willekeurige personen uitdaagt.

b Hoeveel mogelijkheden heeft een schaker om twee personen uit te dagen?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er totaal voor de schaker?

d De zeven leden kunnen maximaal drie partijen tegelijk spelen. Er is dan altijd een lid over. Op hoeveel manieren kan dat?

★ Opgave 3

Een hypotheekverstrekker moet voor volgende week achttien gesprekken inplannen. De klanten die hij moet inplannen kunnen iedere dag van de week. Hij besluit maandag vijf gesprekken te voeren.

a Op hoeveel manieren kan hij vijf van de achttien klanten kiezen?

b Dinsdag plant hij maar drie gesprekken, want hij werkt die dag ook aan zijn administratie. Op hoeveel manieren kan hij die drie klanten nog kiezen?

c Op hoeveel manieren kan hij de overgebleven tien klanten nog over de resterende drie werkdagen verdelen?

d Op hoeveel manieren kan hij de overgebleven tien klanten nog over de drie resterende werkdagen verdelen als hij iedere dag minstens drie klanten wil bezoeken?

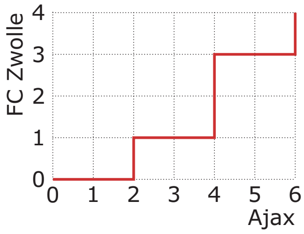
★ Opgave 4

Bij de voetbalwedstrijd Ajax - PEC Zwolle was de uitslag 6 - 4. Het scoreverloop is in de figuur weergegeven.

a Geef het scoreverloop door alle tussenstanden onder elkaar te zetten.

b Als je alleen de uitslag weet, hoeveel scoreverlopen zijn dan mogelijk?

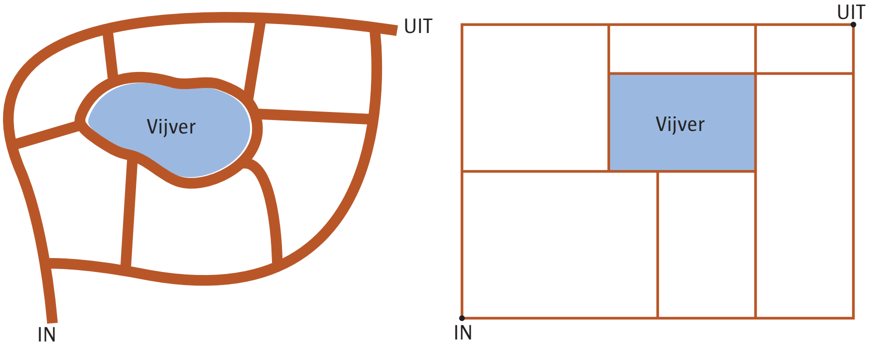
c Hoeveel scoreverlopen zijn er voor deze wedstrijd waarbij de tussenstand 4-1 was?



Figuur 1.5

★ ★ **Opgave 5**

Je ziet een tuin met paden en een vijver. Deze plattegrond kun je schematisch weergeven in een rechthoekig rooster. Bereken met het rooster het aantal routes zonder omwegen dat je kunt lopen van de ingang naar de uitgang.



Figuur 1.6

★ ★ **Opgave 6**

Een docent Engels maakt een meerkeuzetoets met zestien vragen. Op elk van de vragen is het antwoord A, B, C of D mogelijk.

a Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als de docent besluit om acht keer antwoord B en acht keer antwoord D te kiezen?

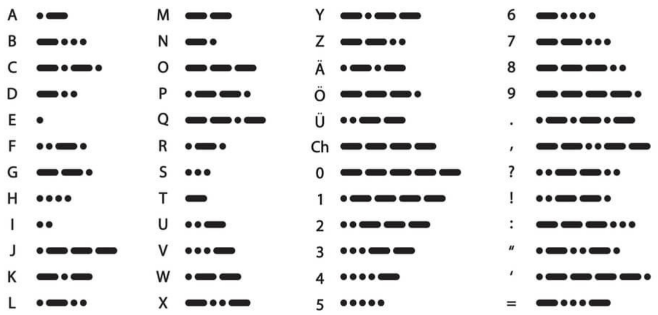
b Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als de antwoorden A, B, C en D evenveel voorkomen?

c Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als er bij de eerste zeven vragen geen C voorkomt en bij de laatste negen vragen precies vier keer een A en drie keer een B voorkomt?

Toepassen

★ ★ **Opgave 7: Morsecode**

Je ziet het morsealfabet. Elke letter bestaat uit maximaal vier signalen; elk cijfer bestaat uit precies vijf signalen. Een signaal kan kort zijn (aangegeven door ·) of lang zijn (aangegeven door –).



Figuur 1.7

a Hoeveel tekens zijn er mogelijk met vijf signalen?

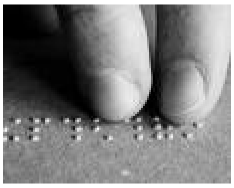
b Is het mogelijk om het alfabet weer te geven met maximaal vier signalen?

c Het is ook mogelijk om alle cijfers weer te geven met twee punten en drie strepen. Laat dat zien door alle mogelijkheden systematisch op te schrijven.

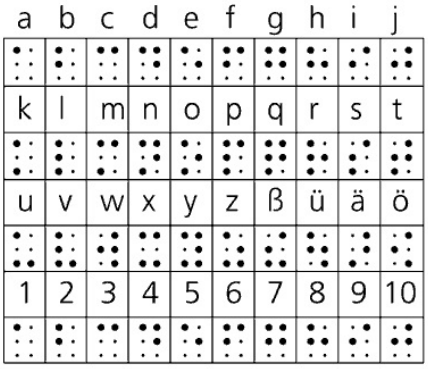
★ ★

Opgave 8: Braille

Speciaal voor blinden en slechtzienden bestaat het Brailleschrift. In het Brailleschrift ontstaat elk teken door van 6 punten een aantal in reliëf weer te geven. De blinde kan het aantal en de positie van de punten voelen en zo het teken herkennen. Je ziet het alfabet en de cijfers in Braille.



Figuur 1.8



Figuur 1.9

a Op hoeveel manieren kun je een Brailleteken maken met 2 punten in reliëf?

b Op hoeveel manieren kun je een Brailleteken maken met 3 punten in reliëf?

c Hoeveel Brailletekens zijn er totaal mogelijk?

d Er zijn Brailletekens die op de kop hetzelfde zijn. Hoeveel Brailletekens met 2 punten betreft dit?

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Tellen**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

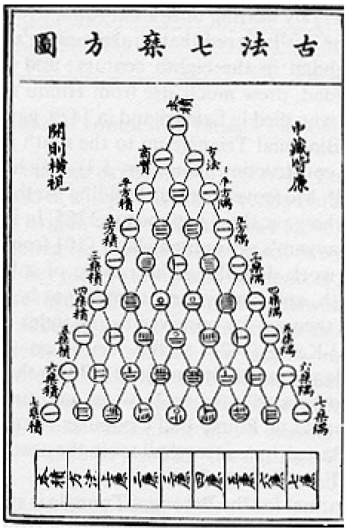
- wegendiagram — boomdiagram — uittellen
- macht — faculteit — permutaties
- combinaties
- driehoek van Pascal

Activiteitenlijst

- mogelijkheden tellen met behulp van diagrammen of uittellen
- machten gebruiken bij herhaling van mogelijkheden — faculteiten en permutaties gebruiken
- combinaties gebruiken — verschil tussen permutaties en combinaties herkennen
- combinaties toepassen bij routes in roosters — de driehoek van Pascal toepassen

Achtergronden

Hoewel de driehoek van Pascal is genoemd naar **Blaise Pascal (1623—1662)** was deze getallendriehoek al honderden jaren voor zijn geboorte bekend. Waarschijnlijk kende de Chinese geleerde Chia Hsien (omstreeks 1050) de driehoek van Pascal al en het is zeker dat de Perzische wetenschapper **Omar Khayyam (1048—1113)** er gebruik van maakte om wortels uit getallen te benaderen. Eén van de eerste weergaves van de driehoek van Pascal is van de Chinees **Yang Hui (1261—1275)**.
Pascal schreef er pas over in 1654 in zijn ‘Traité du triangle arithmétique’, waarin hij diverse eigenschappen van de getallen in deze driehoek liet zien.



Figuur 1.1

Testen

★ Opgave 1

In de Eredivisie spelen achttien voetbalclubs om het landskampioenschap van Nederland. Elk team speelt één keer thuis en één keer uit tegen elk ander team. Bij winst krijgt een team 3 punten, bij gelijkspel 1 punt en bij verlies 0 punten.

a Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld?

b Hoeveel punten kan een team maximaal halen?

De Toto is een spel waarin je voetbaluitslagen voorspelt. Bij Toto13 voorspel je van dertien wedstrijden of de thuisclub wint, verliest of gelijkspeelt.

c Hoeveel verschillende Toto13-uitslagen zijn er mogelijk?

d Hoeveel Toto13-uitslagen zijn er met slechts twee foute voorspellingen?

e Hoeveel Toto13-uitslagen zijn er met hoogstens twee foute voorspellingen?

★ **Opgave 2**

Bij het dagmenu in een restaurant van de hamburgerketen BurgerChief heb je voor het ‘Chiefmenu’ keuze uit:

- Vooraf: tomatensoep of groentesoep.
- Hoofdgerecht: frites met cheeseburger, frites met dubbele hamburger of frites met beefburger.
- Drinken: cola of sinas.
- Nagerecht: chocoladepudding, vanillepudding of citroenpudding.

a Hoeveel menu's zijn er dan mogelijk?

b Hoeveel menu's zijn er mogelijk als iemand beslist een cheeseburger wil en niet van pudding houdt?

★ **Opgave 3**

In een vaas zitten negen balletjes, waarvan twee blauwe, drie rode en vier witte balletjes. De balletjes zijn genummerd. Frits haalt zonder te kijken een balletje uit de vaas, bekijkt de kleur en het nummer, legt het weer terug en haalt (na schudden) opnieuw zonder te kijken een balletje uit de vaas.

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om twee balletjes te trekken?

b Hoeveel mogelijkheden zijn er met een wit en een rood balletje?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er met minstens één blauw balletje?

d Beantwoord a, b en c nog eens als het balletje niet wordt teruggelegd.

e Fleur pakt vijftien keer achter elkaar een balletje uit de vaas en legt het balletje steeds terug. Ze heeft precies acht keer een blauwe balletje gepakt en vier keer een rode. Op hoeveel manieren heeft ze die balletjes kunnen pakken?

★ **Opgave 4**

De cijfers die in het venster van een eenvoudige rekenmachine verschijnen, worden gemaakt door een aantal opgelichte staafjes. Voor elk cijfer zijn maximaal zeven staafjes beschikbaar.

Figuur 1.2

a Staafje ‘aan’ wordt weergegeven door een 1, staafje ‘uit’ door een 0. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b Hoeveel symbolen met drie oplichtende staafjes zijn er?

c Hoeveel symbolen zijn er in totaal te maken?

d Er gaan twee staafjes kapot. Hoeveel symbolen zijn er dan nog met drie oplichtende staafjes te maken?

★ **Opgave 5**

Bij tennis wordt vaak het best-of-five systeem gespeeld. Dit betekent dat er maximaal vijf sets worden gespeeld. Degene die het eerst drie sets wint, heeft de partij gewonnen. A speelt tegen B.

a Hoeveel mogelijke wedstrijdverlopen zijn er?

b Het staat 1-0 voor A. Op hoeveel manieren kan A de wedstrijd winnen?

c Het staat 1-0 voor A. Op hoeveel manieren kan B de wedstrijd winnen?

★ ★ **Opgave 6**

De leerlingenraad bestaat uit 22 personen, verdeeld over diverse jaargroepen. Er zitten 8 leerlingen uit de bovenbouw en 14 leerlingen uit de onderbouw in de raad. Er wordt een dagelijks bestuur gekozen van 5 personen.

a Op hoeveel manieren kun je dit dagelijks bestuur kiezen?

b De leden van het bestuur krijgen allemaal andere taken. Op hoeveel manieren kun je nu het bestuur kiezen als je ook let op de verschillende taken?

c Je let weer op de verschillende taken die de bestuursleden hebben. Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als het moet bestaan uit 2 leerlingen uit de onderbouw en 3 uit de bovenbouw?

d Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als er minstens 3 onderbouwleerlingen deel van moeten uitmaken?

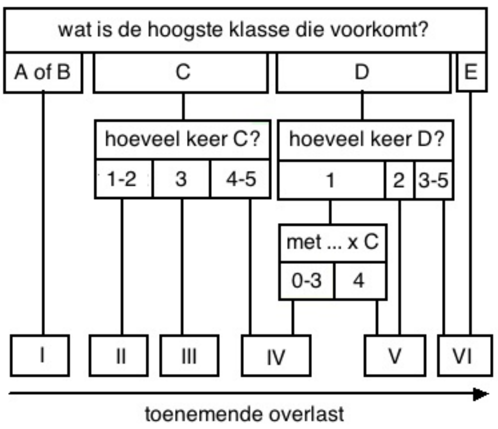
e Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als de voorzitter uit de bovenbouw moet komen?

★ ★ Opgave 7

Om de leefbaarheid van een gebied te classificeren, wordt gekeken naar een aantal omgevingsfactoren die de leefbaarheid negatief kunnen beïnvloeden. Daarbij wordt gekeken naar vijf factoren die overlast kunnen veroorzaken. De factoren zijn lawaai, onveiligheid, geur, kankerverwekkende stoffen en giftige stoffen. De totale overlast wordt op de volgende manier vastgesteld.

Elk van de vijf factoren wordt gemeten en vervolgens ingedeeld in vijf beoordelingsklassen, van de laagste klasse A (nauwelijks overlast) tot en met de hoogste klasse E (grote overlast).

Met behulp van dit schema is de hindercode I, II, III, IV, V of VI te bepalen. Deze hindercode is een maat voor de totale overlast in een gebied.
Als de metingen van de vijf factoren het rijtje A-C-C-B-A opleveren (voor lawaai-onveiligheid-geur-kankerverwekkende stoffen-giftige stoffen), is de bijbehorende hindercode II.



Figuur 1.3

a Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk met hindercode III? Licht je antwoord toe.

b Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk met hindercode I? Licht je antwoord toe.

c Als één van de factoren één klasse hoger wordt, stijgt de hindercode. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de hindercode ook meer dan één niveau kan stijgen.

Toepassen

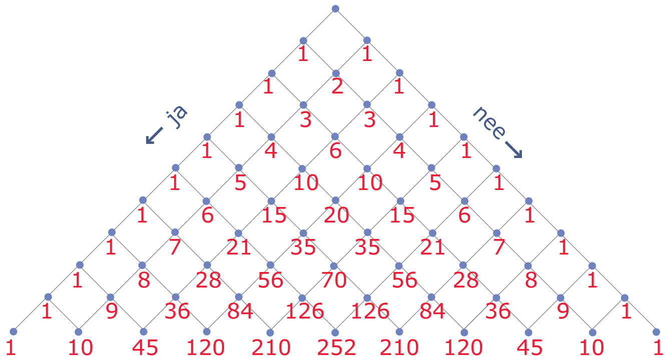
★ ★ Opgave 8: Driehoek van Pascal

De **driehoek van Pascal** is een telsysteem met vele toepassingen.

Hier zie je het telsysteem weergegeven in een rooster. De naam ‘driehoek’ wordt door de figuur duidelijk opgeroepen. Het aantal routes naar één van de punten op de tiende rij is het aantal combinaties van r uit 10: $\binom{10}{r}$. Ga dit zelf na!

Om naar een punt op de tiende rij te komen, moet je 10 keer een ‘ja/nee’-keuze maken. Het aantal mogelijkheden om naar een punt op de tiende rij te komen is daarom in totaal 2^{10}.

Dus: $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 2^{10}$.



Figuur 1.4

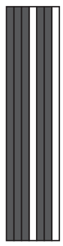
a Laat zien hoe je met behulp van combinaties de getallen op de tiende rij van de driehoek van Pascal kunt vinden.

b Laat zien hoe je vanuit de getallen op de tiende rij de getallen op de elfde rij van de driehoek van Pascal kunt vinden.

★ ★ Opgave 9: BARcode

Bij het werken met allerlei codes zijn telproblemen voortdurend van belang. Zijn er voldoende pincodes voor iedereen? Zijn er voldoende postcodes voor iedereen? Kun je een goed systeem vinden voor het identificeren van artikelen in de winkel?

Bij het ontwerpen van een bepaald soort barcode (streepjescode) is men uitgegaan van een rechthoek die verdeeld is in 7 stroken.
Iedere strook is ‘zwart’ of ‘wit’. Hiernaast zie je de code voor het cijfer 7.



Figuur 1.5

a Hoeveel codes zijn er in totaal mogelijk voor zo’n rechthoek?

b Hoeveel codes zijn er mogelijk met precies 3 zwarte stroken?

Hier zie je een voorbeeld van een streepjescode.

8 710398 010148

Figuur 1.6

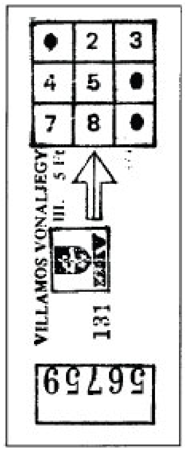
c Uit hoeveel rechthoekjes bestaat dit type barcode?

d Hoeveel verschillende barcodes zijn er van dit type mogelijk als ze uitsluitend uit cijfers bestaan?

Examen

Opgave 10: Metro in Boedapest

Als je in Boedapest met de metro wilt reizen, moet je eerst een kaartje kopen. Zo'n kaartje is voorzien van 9 vakjes met daarin de cijfers 1 tot en met 9 (zie figuur). Zodra je bent ingestapt, moet je je kaartje in een ponsapparaatje steken (volgens de pijlrichting en met de bedrukte zijde boven). Eén of meer (maximaal 9) cijfers worden dan in één keer weggeponst. Daarmee is aan het kaartje te zien in welke trein je reis is begonnen. Hier zie je een afbeelding van een gebruikt kaartje, waarbij de vakjes 1, 6 en 9 zijn voorzien van een gaatje.



Figuur 1.7

a Bereken op hoeveel verschillende manieren er in een kaartje 3 gaatjes kunnen worden geponst.

b In een kaartje worden 2 gaatjes geponst, die niet in dezelfde rij of kolom zitten. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er? Licht je antwoord toe.

Het aantal cijfers dat wordt weggeponst, mag variëren van 1 tot en met 9. Op een dag rijden er op het metronet 400 treinen.

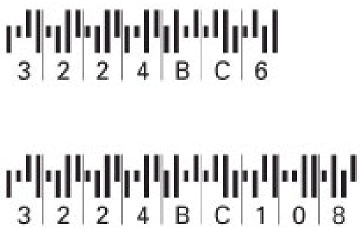
c Is het mogelijk dat in elke trein op een verschillende wijze gaatjes in een kaartje worden geponst? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1992, tweede tijdvak)

Opgave 11: KIX

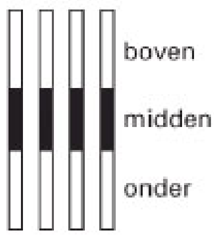
De KIX (KlantIndeX) is een streepjescode die gebruikt wordt om post machinaal te sorteren. Steeds meer bedrijven drukken op poststukken onder het adres de KIX af. Deze bedrijven krijgen daarvoor een korting op de verzendkosten.

Een adres wordt in Nederland volledig bepaald door de postcode en het huisnummer. De KIX bestaat daarom uit 4 cijfers en 2 letters voor de postcode en daarachter het aantal cijfers dat nodig is voor het huisnummer. In de figuur zie je twee voorbeelden van een KIX. Je ziet als voorbeeld de KIX van postcode 3224 BC met huisnummer 6 en van postcode 3224 BC met huisnummer 108. In de KIX heeft elk cijfer en elke letter een eigen symbool. Er wordt daarbij geen onderscheid gemaakt tussen hoofdletters en kleine letters. De letters B en b krijgen dus hetzelfde symbool.
Elk symbool bestaat uit 4 verticale strepen. Zie de laatste figuur.



Figuur 1.8

Het middelste stuk van elke streep is altijd zwart. Boven zijn er 4 stukken en onder zijn er 4 stukken. Elk van die 8 stukken kan wit of zwart zijn. Zo zijn er veel verschillende symbolen te maken waarbij het niet uitmaakt hoeveel van de 4 bovenste en de 4 onderste stukken zwart zijn gemaakt.



Figuur 1.9

a Bereken het aantal verschillende symbolen dat op die manier is te maken.

Bij een KIX-symbool zijn er van de 4 bovenste stukken precies 2 zwart. Ook van de 4 onderste stukken zijn er precies 2 zwart.
Bijvoorbeeld: de 3 heeft symbool , de B (of b) heeft symbool . Zoals je bij de laatste streep van de 3 ziet, mag een streep ook helemaal zwart zijn, als er maar in totaal twee stukken boven en twee stukken onder zwart zijn.

b Hoeveel verschillende KIX-symbolen zijn er op deze manier te maken? Licht je antwoord toe.

Bij elk adres hoort een huisnummer. Huisnummers beginnen nooit met een 0. Bij sommige adressen komt er na het huisnummer een toevoeging, zoals bij het huisnummer 6A. Soms staat er zelfs een heel woord bij: 73 boven. Bij zo’n toevoeging wordt de KIX na het huisnummer aangevuld met eerst de letter X en daarna de letter(s) en/of cijfer(s) die nodig zijn voor de toevoeging.

De KIX is door het huisnummer (zie figuur) en door een eventuele toevoeging niet altijd even lang. We vatten dit samen in deze tabel.

altijd		soms	
postcode	huisnummer	scheidingsteken	toevoeging
4 cijfers en 2 letters	maximaal 5 cijfers	X	maximaal 6 tekens (letters en/of cijfers)
vaste lengte	variabele lengte	vaste lengte	variabele lengte

Tabel 1.1

Hier vind je twee voorbeelden van een KIX met 9 symbolen:

bij het adres:	Dorsvlegel 108, 3224 BC HELLEVOETSLUIS
hoort KIX:	3224BC108
in symbolen:	
bij het adres:	Wethouder Hekkingstraat 9A, 1234 HV JUINEN
hoort KIX:	1234HV9XA
in symbolen:	

Tabel 1.2

De postcode 6801 MG vormt het begin van een KIX van 9 symbolen. Er zijn aan de 6 symbolen van de postcode dus nog 3 symbolen toegevoegd.

c Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om bij postcode 6801 MG een correcte KIX van 9 symbolen te maken? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

★ ★ ★ Opgave 12: IKB-code

Alle eieren die je in de winkel koopt, zijn tegenwoordig voorzien van een code. Een voorbeeld van zo'n code is 1-NL-4118801. Dit is de IKB-code. (IKB betekent integrale ketenbeheersing.) Hiermee is te achterhalen waar het ei vandaan komt.
In de tabel zie je hoe de IKB-code is opgebouwd.

Houderijsysteem	Land van herkomst	Nummer pluimveebedrijf	(Eventueel) stalnummer
0 = Biologisch	NL = Nederland	10000 tot en met 99999	00 tot en met 99
1 = Vrije uitloop	BE = België		
2 = Scharrel	DU = Duitsland		
3 = Kooi	FR = Frankrijk		

Tabel 1.3

Het ei met code 1-NL-4118801 is dus een vrije-uitloopei uit Nederland van pluimveebedrijf 41188 met stalnummer 01.

a Bereken hoeveel verschillende IKB-codes er mogelijk zijn.

b Hoeveel codes zijn er mogelijk voor Franse scharreleieren?

c Een Nederlands pluimveebedrijf met nummer 41188 wil voor elk type ei één stal gaan gebruiken. De pluimveehouder nummert zijn stallen vanaf 00. Hoeveel IKB-codes zijn hiervoor mogelijk?

d Hoeveel Nederlandse, Franse, Duitse en Belgische bedrijven kunnen er met de IKB-codering in totaal worden gecodeerd?

(naar: examen 2008, tweede tijdvak)

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

www.math4all.nl

Werkblad bij Opdracht 1

Dit is het stratenplan van het centrum van Denver, een grote stad in de VS. Je staat op Larimer Square op de hoek van Larimer Street en 15th Street. Je hotel is het Hyatt Regency.

Werkblad bij Opdracht 2