Wiskunde A

45 HAVO

EXAMENTRAINING

Math4all

© 2021

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaart geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaarden ze geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie http://creativecommons.org/licenses/by/3.0).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Inhoud

Examentraining

1 Rekenen en algebra 3
2 Lineaire verbanden 13
3 Exponentiële verbanden 25
4 Diverse verbanden 33
5 Statistiek 43
6 Naar het examen 61

Antwoorden 71

Register 94

1 Rekenen en algebra

Inleiding

Figuur 1

In de Romeinse tijd werden er boogvormige constructies gebouwd om water mee te vervoeren. Deze aquaducten staan soms zelfs vandaag de dag nog overeind en vormen een herinnering aan deze oude beschaving. De Romeinen ontwierpen deze bouwwerken met grote precisie. Zo berekenden ze bijvoorbeeld hoeveel stenen er nodig waren om de constructie te bouwen, of hoeveel m^3 water deze constructies per seconde moesten vervoeren. Dit laatste noemt men het debiet. Om dit te berekenen gebruikten de Romeinen ook al formules, net zoals wij dat vandaag de dag doen.

De Pont du Gard in Zuid-Frankrijk is een voorbeeld van zo'n aquaduct. Het is het hoogste en een van de best bewaard gebleven aquaducten uit de Romeinse tijd. Dit aquaduct voorzag de nabijgelegen stad Nemausus, het huidige Nîmes, van water voor in de fonteinen en badhuizen. Omdat de benodigde hoeveelheid water van de stad vrij goed bekend was, konden de Romeinen precies berekenen hoe groot de afmetingen van de Pont du Gard moesten worden.

Verkennen

Opgave V1

De oppervlakte van dwarsdoorsnede A van het kanaal dat vanuit de bron naar de stad Nemausus stroomt, kan beschreven worden met de volgende formule:

$$A = \frac{\text{debiet}}{1{,}28}$$

Neem aan dat de dwarsdoorsnede van het kanaal de vorm van een rechthoek heeft.

Als Nemausus $2{,}31$ m^3/s water nodig heeft en de breedte van het kanaal $1{,}2$ meter is, hoe groot is dan de hoogte die de rand van de geul boven op het aquaduct minimaal moet hebben? Ga ervan uit dat de geul volledig gevuld is met water.

Kun je alle 200 pakjes kwijt op dit schap?

Theorie

Om te onthouden

Rekenen

Bij het rekenen met getallen en met variabelen hanteer je een vaste **rekenvolgorde**.

1. H: eerst bereken je wat binnen de haakjes staat
2. MW: vervolgens machten en wortels berekenen van links naar rechts
3. VD: daarna vermenigvuldigen en delen van links naar rechts
4. OA: ten slotte optellen en aftrekken van links naar rechts

Met haakjes kun je de rekenvolgorde beïnvloeden: wat binnen de haakjes staat, bereken je eerst.
Zo is: $(3{,}10 + 2{,}25) \cdot 4 = 21{,}40$.
Maar: $3{,}10 + 2{,}25 \cdot 4 = 12{,}10$.

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.
Let op: $(-3)^4 = -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 = 81$, maar $-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$.

Soms kun je machten vereenvoudigen: $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$, $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$ en $\left(3^5\right)^2 = 3^{5 \cdot 2} = 3^{10}$.

Wortels kun je alleen optellen en aftrekken als ze gelijksoortig zijn:
$\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
Wortels kun je wel vermenigvuldigen en delen:

$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ en $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$.

Grootheden en eenheden

Een **grootheid** wordt uitgedrukt in **eenheden**, bijvoorbeeld de grootheid lengte wordt uitgedrukt in meter (m), oppervlakte in m^2 en inhoud in m^3.

Een eenheid kan voorzien worden van een voorvoegsel, zoals: kilo (1000), hecto (100), deca (10), deci (0,1), centi (0,01), milli (0,001).
Bijvoorbeeld: $1{,}2$ km $= 1{,}2 \times 1000 = 1200$ m en 0,8 cL $= 0{,}8 \times 0{,}01 = 0{,}008$ L.

Bij het omrekenen ontstaan soms hele grote of kleine getallen.
Een getal als 135 miljard betekent $135.000.000.000$.
Dat kun je schrijven als $135 \cdot 10^9$ of in de **wetenschappelijke notatie** $1{,}35 \cdot 10^{11}$.
Zo is 135 miljoenste $0{,}000135 = 135 \cdot 10^{-6}$, in de wetenschappelijke notatie $1{,}35 \cdot 10^{-4}$.
In beide gevallen hebben alleen de cijfers 1, 3 en 5 betekenis, dat zijn **significante cijfers**.

Opgave 2

Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{5}{2} \cdot 5 - 3$

b $8 - 3(14 - 4)$

c $\frac{9-4}{6} \cdot 12 + 2 + 2 \cdot 4$

d $-7(3 - 2) + 4 \cdot 2$

e $\sqrt{16 + 9} \cdot \sqrt{16} + \sqrt{9}$

f $3^2 - \frac{2^3}{4}$

Opgave 3

Bereken zonder rekenmachine.

a $2 + 3^2 - 3 \cdot 6 - 2$

b $(2 + 3)^2 - 3 \cdot 6 - 2$

c $2 + 3^2 - 3 \cdot (6 - 2)$

d $2 - 3^2 - (3 \cdot 6) - 2$

Opgave 4

De dikte van een haar is ongeveer 50 µm (= $0{,}05$ mm).
Bereken hoeveel haren je naast elkaar moet leggen om een dikte van een meter te krijgen.

Opgave 5

Een kogel heeft een snelheid van 400 m/s.

a Bereken de snelheid in km/h. Rond je snelheid af op één decimaal.

b Bereken de tijd die een kogel erover doet om 150 meter af te leggen.

Opgave 6

De dikte van een verflaag is gemiddeld 80 µm (= $0{,}08$ mm).
Hoeveel m^2 kun je met een blik van $1{,}5$ liter verven?

Theorie

Om te onthouden

Rekenen met breuken

Het rekenen met breuken gaat zo:

- Bij optellen en aftrekken maak je de eerst breuken gelijknamig:
  $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$ en $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$.
- Bij vermenigvuldigen vermenigvuldig je de tellers met elkaar en de noemers met elkaar:
  $\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}=\frac{3\times1}{4\times7}=\frac{3}{28}$.
- Bij delen maak je ze eerst gelijknamig maken en dan deel je de tellers door elkaar:
  $\frac{2}{5}\Big/\frac{3}{7}=\frac{14}{35}\Big/\frac{15}{35}=\frac{14}{15}$.
- Gehelen werk je eerst om naar breuken:
  $2\frac{2}{3}=2+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$
  en bijvoorbeeld $2\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}=\frac{8}{3}-\frac{5}{4}=\frac{32}{12}-\frac{15}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$.
  Optellen, vermenigvuldigen en delen gaat op dezelfde manier.

Als het mogelijk is, vereenvoudig je de breuk: $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Decimale getallen kun je als **breuk** schrijven en omgekeerd:

- Van decimaal getal naar breuk: $0{,}125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$ en $0{,}42=\frac{42}{100}=\frac{21}{50}$.
- Van breuk naar decimaal getal: $\frac{3}{4}=3/4=0{,}75$ en $\frac{1}{3}=1/3=0{,}33333...\approx0{,}33$.

Rekenen met procenten

Het woord procent is afgeleid van het Latijnse woord ‘pro centum’ dat ‘per honderd’ betekent. Met andere woorden één van elke honderd, oftwel $\frac{1}{100}$ deel.

Met procenten rekenen is rekenen met honderdsten: $45\%=\frac{45}{100}=0{,}45$.
Voorbeelden:

- Bereken 45% van 500.
  45% van 500 is $\frac{45}{100}\times500=0{,}45\times500=225$.
- Hoeveel procent is 20 van de 500?
  $\frac{20}{500}\cdot100\%=4\%$
- Een aantal neemt toe van 20 tot 23. Hoeveel procent is de toename?
  $\frac{23-20}{20}\cdot100\%=15\%$
- Een bedrag is inclusief 21% btw € 342,00. Hoeveel is de prijs exclusief de btw?
  $\frac{342}{121}\cdot100\%\approx282{,}64$ euro

Opgave 7

Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ en $1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4}$

b $\frac{3}{8} - \frac{7}{12}$ en $3\frac{3}{8} - 2\frac{7}{12}$

c $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$ en $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{5}$

d $\frac{4}{9} \Big/ \frac{3}{8}$ en $1\frac{4}{9} \Big/ 2\frac{3}{8}$

Opgave 8

Schrijf de breuken als decimale getallen. Rond af op drie decimalen.

a $\frac{7}{9}$

b $\frac{2}{150}$

Schrijf de volgende decimalen getallen als breuk.

c $0{,}12$

d $0{,}545$

Opgave 9

In de eerste helft van dit jaar kreeg Zalando 960 miljoen bezoekers op de website en deden 19 miljoen mensen een bestelling. “Gemiddeld bestelden klanten drie producten met een waarde van gemiddeld 66 euro”, zegt het bedrijf tevreden in het persbericht.

Welk deel van de websitebezoekers plaatste een bestelling? Geef je antwoord als breuk en als decimaal getal. Rond eventueel af op drie decimalen.

bron: nos.nl

Opgave 10

Doe de volgende berekeningen met procenten.

a Hoeveel procent is 14 van de 312?

b Schrijf $\frac{5}{11}$ als percentage op één decimaal nauwkeurig.

c Bereken de absolute en de relatieve korting als een artikel van 110 euro nog 85 euro kost.

d Wat is meer: 20% van 40 of 15% van 48?

e Hoeveel kost een broek van € 88,00 als je 15% korting krijgt?

f Een e-bike kost met 28% korting slechts € 1367,00. Hoeveel bedroeg de oorspronkelijke prijs?

Opgave 11

Omzet Zalando stijgt 25%: winst verdrievoudigt.

De Duitse modewebwinkel Zalando heeft afgelopen kwartaal weer veel meer schoenen en kleding verkocht. De omzet van het ook in Nederland zeer populaire bedrijf, steeg met 25% tot 916 miljoen euro. De brutowinst bedroeg 77 miljoen, drie keer zoveel als in het tweede kwartaal van vorig jaar. De mooie cijfers komen niet echt als een verrassing. Een paar weken geleden kondigde Zalando al een winstsprong aan. Zalando ontstond in 2008 en kreeg ook in Nederland - door een intensieve reclamecampagne - een grote naamsbekendheid. De omzet stevent nu al af op 4 miljard euro. De webwinkel voert nu 1500 merken, 150000 artikelen en heeft 10600 werknemers.

Is de omzet ten opzichte van de winst absoluut of relatief meer gestegen?

bron: nos.nl

Theorie

Om te onthouden

Rekenen met variabelen

Als van een rechthoek de lengte en breedte onbekend zijn, zijn er nog verschillende getallen mogelijk. De lengte en de breedte zijn variabel, oftewel veranderlijk. Deze variabelen stel je voor door letters. Meestal zijn dit kleine letters die cursief worden gedrukt. De lengte kun je hier l noemen en de breedte b. Voor deze rechthoek geldt dan:

- De omtrek is: $l + b + l + b = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2l + 2b$
- De oppervlakte is: $l \cdot b = lb$

Gebruik hierbij de afspraak dat je het maalteken $\cdot$ weglaat als daardoor geen misverstanden kunnen ontstaan. Bijvoorbeeld $2 \cdot a = 2a$ en $a \cdot b = ab$, maar $2 \cdot 3 \neq 23$.

Bij het rekenen met variabelen (algebra) gebruik je dezelfde regels als bij het rekenen met getallen en er geldt dezelfde rekenvolgorde. Alleen gelijksoortige termen kun je optellen/aftrekken.

Bijvoorbeeld:

$\sqrt{9a + 16a} - \left(\frac{4a}{2}\right)^3 + \frac{6b}{2b} = \sqrt{25a} - (2a)^3 + 3 = 5\sqrt{a} - 8a^3 + 3 = 5\sqrt{a} - 8a^3 + 3$

rekenen met variabelen		
$3a + a = 4a$	$a + b$ kan niet korter	$a \cdot a \cdot a = a^3$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot$	$(a + b)(c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$	
rekenen met wortels		
$\sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
eigenschappen van machten en exponenten		
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$	$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$	$a^0 = 1$

Formules herleiden

Gegeven zijn de formules: $P = 4a + 3b$ en $a = 2b - 3$.

Je kunt deze formules combineren tot één formule waarin P is uitgedrukt in b.

Substitueer $a = 2b - 3$: $P = 4(2b - 3) + 3b = 8b - 12 + 3b = 11b - 12$.

Je kunt deze formules ook combineren tot één formule waarin P is uitgedrukt in a.

Herleid $a = 2b - 3$ naar $a + 3 = 2b$ en $b = 0{,}5a + 1{,}5$.

Substitueer $b = 0{,}5a + 1{,}5$: $P = 4a + 3(0{,}5a + 1{,}5) = 4a + 1{,}5a + 4{,}5 = 5{,}5a + 4{,}5$.

Opgave 12

Herleid.

a $3a + 4b - a$

b $5 \cdot a + 6 \cdot b - 3 \cdot a - b$

c $4a \cdot a - 3a + 5a - a^2$

d $8x^2 - 5x^2 + 2x \cdot x$

e $\frac{1}{2}x \cdot x + 6x - 2x^2 - 3\frac{1}{2}x$

f $(a + b)^2 - a^2 - b^2$

Opgave 13

Herleid.

a $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b $\sqrt{a} + \sqrt{b^2} - \sqrt{a} + \sqrt{b}$

c $\frac{a^6}{a^2} + \left(a^2\right)^2 + a \cdot a^3$

d $3a^4 + \left(2a^2\right)^2 + 4a \cdot 2a^3$

e $6a \cdot \frac{2a}{4a} - 2(a - 1)$

f $(6\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{a}) : (4a - 2a) - 1$

Opgave 14

Een eigenaar van een restaurant heeft via internet voor € 880,00 aan ingrediënten besteld. Het factuurbedrag inclusief p% BTW en € 10,00 verzendkosten bedraagt € 942,80.

a Leg uit dat bij deze factuur de vergelijking $880 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 10 = 942{,}80$ hoort.

b Bereken het percentage p dat in rekening is gebracht.

Opgave 15

Een fabrikant wil een bepaald artikel gaan produceren en de beste prijs p in euro berekenen die hij potentiële klanten kan gaan vragen. Uit marktonderzoek blijkt dat de hoeveelheid van deze artikelen q die hij wekelijks kan verkopen voldoet aan $q = 300 - 0{,}25p$.
Voor zijn wekelijkse opbrengst R geldt $R = p \cdot q$.

a Stel een formule op voor de wekelijkse opbrengst afhankelijk van p.

Voor de productiekosten geldt $K = 750 + 0{,}6q$.

b Stel een formule op voor de wekelijkse winst W afhankelijk van p.

Opgave 16

Piet wil munten van € 1,00 en € 2,00 sparen. Hij heeft al 80 munten met een waarde van € 100,00. Om te berekenen hoeveel munten van € 2,00 hij heeft, stelt hij de volgende vergelijkingen op:
$100 = 1 \cdot E + 2 \cdot T$ en $80 = E + T$

Hierin is:
E: het aantal munten van een euro
T: het aantal munten van twee euro

Combineer de formules tot een vergelijking die je kunt oplossen.

Bereken het aantal munten van € 2,00.

Verwerken

Opgave 17: Schiphol groeit verder: 6% meer reizigers

Schiphol heeft vorig jaar het aantal passagiers fors zien groeien tot ruim 58 miljoen. Dat betekent een toename van 6% in vergelijking met 2014. De omzet van de luchthaven daalde met 1% tot $1{,}42$ miljard euro, maar de nettowinst ging juist met een derde omhoog, naar 374 miljoen euro. Passagiers en bezoekers gaven minder geld uit in de winkels en taxfreeshops, terwijl de omzet in de horeca toenam. Ook de omzet uit parkeren nam toe.

a Bereken het aantal passagiers van Schiphol in 2014.

b Bereken de omzet van Schiphol in 2014.

c Bereken de nettowinst van Schiphol in 2014.

bron: www.nos.nl

Opgave 18: Te zwaar voor je lengte?

Te zwaar zijn is een gevaar voor de gezondheid. Je lengte kun je nauwelijks beïnvloeden, maar je gewicht wel. Daarom worden de lengte en het gewicht van een mens met elkaar vergeleken. Dat kan op verschillende manieren. Bij de eerste manier wordt gebruikgemaakt van het gegeven dat lengte en gewicht normaal verdeeld zijn. Bij de tweede manier is er een index opgesteld die aangeeft of iemand te licht, normaal of te zwaar is.

We definiëren de verhouding V voor een man als volgt:

$$V = \frac{\text{het percentage mannen dat een lager gewicht heeft dan hijzelf}}{\text{het percentage mannen dat een kleinere lengte heeft dan hijzelf}}$$

Er geldt:

- Als V tussen $0{,}25$ en $1{,}25$ ligt, heeft hij een normaal gewicht.
- Als $V > 1{,}25$ dan is hij te zwaar voor zijn lengte.
- Als $V < 0{,}25$ dan is hij te licht voor zijn lengte.

Voor Daan, die 179 cm lang is en 78 kg weegt, geldt $V \approx 1{,}55$. Hij is dus te zwaar voor zijn lengte.
Martin heeft een gemiddelde lengte, dus de helft van de mannen is kleiner dan hij. Zijn gewicht daarentegen is hoger dan gemiddeld.

a Bereken welke waarde van V Martin maximaal kan hebben.

De Quetelet-Index, tegenwoordig meestal Body Mass Index (BMI) genoemd is een bekend verband tussen lengte en gewicht van mensen, namelijk:

$$\text{BMI} = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$$

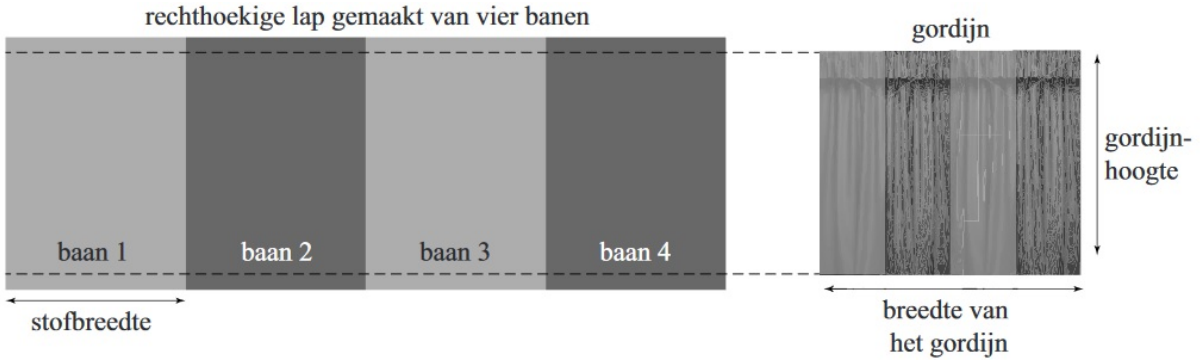
Hierin is gewicht in kg en lengte in meter.
Voor een man met een gemiddeld gewicht ($79{,}6$ kg) en een gemiddelde lengte ($1{,}825$ m) geldt $V = 1$, want 50% van de mannen is kleiner en 50% is lichter dan hij. Volgens de formule heeft hij een BMI van $23{,}9$. Er zijn heel veel mannen met $V = 1$: alle mannen waarbij de twee percentages in de formule van V gelijk zijn. Je kunt je afvragen of al die mannen met $V = 1$ ook allemaal een BMI van $23{,}9$ hebben. Anders gezegd, of bij een ander percentage dan 50 de uitkomst ook $23{,}9$ is.

b Onderzoek met een berekening of dat laatste waar is.

bron: examen havo wiskunde A in 2010, eerste tijdvak

Opgave 19: Gordijnen

Veel mensen hebben geplooide gordijnen voor de ramen hangen. Om zo'n gordijn te maken, heb je gordijnstof nodig. Deze wordt verkocht in verschillende stofbreedtes. In veel gevallen is de gordijnstof niet breed genoeg om er een passend gordijn mee te maken. Daarom wordt er vaak eerst een rechthoekige lap van gemaakt door meerdere banen gordijnstof aan elkaar te naaien. Daarna worden de plooien gemaakt en wordt het geheel afgewerkt tot een gordijn, waarbij de banen altijd verticaal komen te hangen. Bekijk de figuur.



Figuur 2

Ook bij het aan elkaar zetten van de banen gaat gordijnstof verloren. In de ateliers waar gordijnen worden gemaakt, gebruikt men de volgende formule om het aantal banen te berekenen:

$B = \frac{G}{S-7} \cdot P$

Hierin is B het aantal banen, G de breedte van het gordijn in cm, S de stofbreedte in cm en P de plooiverhouding. In de ateliers rekent men altijd met een geheel aantal banen; men rondt B altijd naar boven af om niet te weinig te hebben.

Om een gordijn met een bepaalde breedte te kunnen maken, is het nodig dat de oorspronkelijke lap minimaal 2 en maximaal $2{,}5$ keer zo breed is als het uiteindelijke gordijn. Deze verhouding noemen we de plooiverhouding.

Bij een plooiverhouding van $2{,}5$ kan de formule van B tot $G = 0{,}4B \cdot (S - 7)$ worden herleid.

Geef deze herleiding.

bron: examen havo wiskunde A in 2015, tweede tijdvak

Opgave 20: Bijenonderzoek

Het Nederlands Centrum Bijenonderzoek heeft een rapport opgesteld waarin de binnen het Coloss project verzamelde Nederlandse gegevens over wintersterfte van honingbijen voor 2009-2010 worden geanalyseerd. Hierin stond:

Aan de jaarlijkse monitor wintersterfte is in 2010 door 1568 Nederlandse imkers deelgenomen. Bij benadering heeft 22% van de ongeveer 7000 actieve Nederlandse imkers de vragenlijst ingevuld. Het merendeel (90%) van de imkers had op 1 april 2010 maximaal 12 volken. 25% van de imkers leverde volken voor bestuiving van gewassen in de beroepsmatige landbouw (geëxtrapoleerd; een inzet in Nederland van 32000 volken door 1700 imkers). De wintersterfte 2009-2010 bedroeg $29{,}1\%$ op basis van het totale aantal bijenvolken in oktober 2009. Het gebruik van het ondeugdelijke wintervoer Ambrosius Fructo-Bee droeg in belangrijke mate bij aan de wintersterfte. Na correctie voor dit voer bedroeg de wintersterfte $23{,}1\%$ en week daarmee niet af van de hoge wintersterfte in de twee voorgaande jaren.

a Er hebben 1568 imkers deelgenomen aan het onderzoek. Hoeveel daarvan leverde volken voor bestuiving van gewassen in de beroepsmatige landbouw?

b Hoeveel volken hebben de imkers, die volken leverden voor bestuiving van gewassen in de beroepsmatige landbouw, gemiddeld?

Opgave 21: 1000 meter schaatsen

Op 21 november 2015 schaatste de Nederlander Kjeld Nuis in Salt Lake City de 1000 meter in een tijd van 1:07,02.

a Bereken de gemiddelde snelheid van Kjeld Nuis in km/h. Rond je antwoord af op één decimaal.

b Bereken hoeveel km/h Kjeld sneller moet schaatsten om het wereldrecord (van 1:06,42) dat Shani Davis op 7 maart 2009 in Salt Lake City reed, te verbreken.

bron: wikipedia

Opgave 22

De prijs van een kaartje voor het schoolfeest is € 5,00. De prijs voor een kaartje voor een introducé is € 7,00. Er zijn 647 kaartjes verkocht en de opbrengst is € 3407,00. Noem het aantal leerlingen L en het aantal introducés I.

a Stel twee bijpassende formules op.

b Bereken het aantal introducés op het feest door beide formules te combineren tot één vergelijking.

Opgave 23: Veiligheid in de luchtvaart

Hoewel er geregeld ernstige vliegtuigongelukken in de burgerluchtvaart gebeuren, is vliegen toch zeer veilig te noemen. Analyse van de gegevens laat zien dat er in de afgelopen veertig jaar maar weinig vliegtuigongelukken waren, variërend van 0 tot 10 per maand wereldwijd. Ook blijken de aantallen ongelukken per maand onafhankelijk van elkaar te zijn: het aantal vliegtuigongelukken in een bepaalde maand heeft geen enkele invloed op het aantal vliegtuigongelukken in de volgende maand. Het gemiddelde aantal vliegtuigongelukken per maand bleef door de jaren heen vrijwel gelijk.
Er bestaat een formule waarmee de kans P op n vliegtuigongelukken in een maand berekend kan worden:

$P = \frac{m^n}{n!} \cdot 2{,}7183^{-m}$

Hierin is m het gemiddelde aantal vliegtuigongelukken per maand en

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$

Over de afgelopen veertig jaar is het gemiddelde aantal vliegtuigongelukken per maand $3{,}93$. We gaan ervan uit dat dit gemiddelde in de nabije toekomst hetzelfde blijft.
De formule is met het gemiddelde $m = 3{,}93$ te schrijven als:

$P = 0{,}0196 \cdot \frac{3{,}93^n}{n!}$

a Laat zien hoe deze formule ontstaat uit de eerste formule.

b Bereken met behulp van de tweede formule de kans dat er in januari 2015 drie of vier vliegtuigongelukken zullen gebeuren.

bron: examen havo wiskunde A in 2013, tweede tijdvak

2 Lineaire verbanden

Inleiding

Figuur 1

Als automobilist moet je je rijgedrag aanpassen wanneer de weersomstandigheden veranderen. Bij harde regen of sneeuw is het verstandig om langzamer te rijden.

Wanneer er mist ontstaat, wordt het zicht belemmerd. Bij dichte mist heb je tussen de 50 en 200 meter zicht. Bij een zicht van minder dan 50 meter heb je te maken met zeer dichte mist. Dan moet een bestuurder extra goed opletten om snel in te kunnen grijpen, als er iets uit de mist opdoemt. Het is verstandig om je snelheid aan te passen.

Veel automobilisten houden voldoende rekening met dit soort weersomstandigheden. Toch zijn er bestuurders die dit niet doen, waardoor er bij mist toch ongelukken gebeuren. Het aanpassen van de snelheid en de eventuele ongelukken kunnen files tot gevolg hebben.

Verkennen

Opgave V1

Het aantal meters zicht dat je hebt, heet de ‘zichtafstand’. Mieke rijdt op de snelweg in de mist en vraagt zich af welke snelheid veilig is. Haar rij-instructrice vertelde haar dat de veilige snelheid bepaald kan worden door een basis van 10 km/h te nemen. Tel daar vervolgens voor elke meter zichtafstand $\frac{2}{3}$ km/h bij op. De snelheid die je dan krijgt, zou nog veilig zijn om in de mist te rijden.

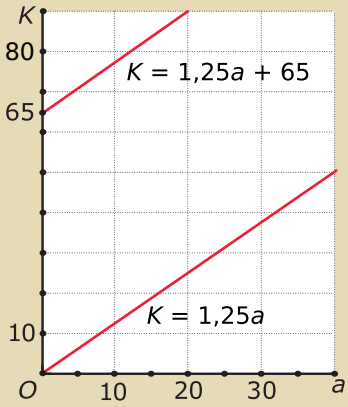
Stel de formule voor de veilige snelheid afhankelijk van de zichtafstand op. Bepaal vervolgens de veilige snelheid in omstandigheden met mist bij een zichtafstand van 100 meter.

Theorie

Om te onthouden

Recht evenredige en lineaire verbanden

De kosten K voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per kubieke meter (m^3) en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Kijk je alleen naar de kosten voor het verbruik v (aantal m^3 per jaar), dan is:
$K = 1{,}25 \cdot v$
De grafiek is dan een rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel.
Je zegt dat K **recht evenredig** is met a.



Figuur 2

Als je ook met het vastrecht rekening houdt, geldt voor de jaarlijkse kosten de formule:
$K = 1{,}25 \cdot v + 65$
De grafiek is dan een rechte lijn door $(0{,}65)$ en er is een **lineair verband** tussen K en a.
Elke toename van v met 1 heeft een stijging van K met $1{,}25$ tot gevolg. Het getal $1{,}25$ noem je het **hellingsgetal** of de **richtingscoëfficiënt** van de lijn.

Snijpunten met de assen

Rechte lijnen hebben snijpunten met de coördinaatassen.

Bij een recht evenredig verband is de oorsprong $O(0,0)$ het snijpunt met beide assen.

Bij een lineair verband zoals $y = ax + b$ zijn er twee snijpunten met de assen:

- snijpunt met de y-as: $x = 0$ invullen geeft $y = b$, dus $(0,b)$;
- snijpunt met de x-as: $y = ax + b = 0$ oplossen geeft $x = -\frac{b}{a}$, dus $\left(-\frac{b}{a},0\right)$.

Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen

Als je van een lineair verband zoals $y = ax + b$ een uitkomst $y = p$ weet, kun je de bijbehorende x-waarde berekenen door de **vergelijking** $ax + b = p$ op te lossen.

Bijvoorbeeld $K = 1{,}25 \cdot v + 65 = 80$:

$$\begin{aligned} 1{,}25 \cdot v + 65 &= 80 \\ 1{,}25 \cdot v &= 15 \\ v &= \frac{15}{1{,}25} = 12 \end{aligned}$$

beide zijden −65

beide zijden delen door 1,25

Om de oplossing van een **ongelijkheid** zoals $K = 1{,}25 \cdot v + 65 > 80$ te bepalen los je eerst de vergelijking op en bekijk je daarna de grafieken van $K = 1{,}25v + 65$ en $K = 80$, bijvoorbeeld met je grafische rekenmachine.
Je ziet leest uit die grafieken de oplossing af: $x > 12$.

Opgave 2

Gegeven is een recht evenredig verband tussen x en y, waarvan de grafiek door het punt $(4,12)$ gaat.

a Bepaal de formule van het recht evenredig verband.

b De grafiek gaat ook door het punt $(p,18)$. Bereken p.

Opgave 3

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,16 per kubieke meter (m^3) en het vastrecht is € 55,00 per jaar.

a Geef de formule voor het verband tussen a het jaarverbruik (m^3) en K de jaarlijkse kosten.

b Waarom is hier niet van een recht evenredig verband sprake, maar wel van een lineair verband?

c Welke betekenis heeft het getal $1{,}16$?

d Waarom heeft het snijpunt met de horizontale as hier geen betekenis? Laat zien, hoe je het toch kunt berekenen.

e Hoe hoog is het verbruik als de jaarlijkse kosten € 320 bedragen.

Opgave 4

Een automobilist reist 50 km van Den Haag naar Amsterdam, met een constante snelheid van 100 km/h. Noem de resterende afstand in kilometer A en de gereden tijd in uren t.

a Leg uit dat de afstand tot Amsterdam een lineair verband is.

b Bepaal de formule van het lineair verband tussen A en t en teken de grafiek.

c Hoe lang doet de automobilist over de reis?

d Na hoeveel minuten is de automobilist minder 15 km van Amsterdam?

Opgave 5

Op 1 januari 1990 waren er 1078 vrouwelijke huisartsen en op 1 januari 2008 bleek dit aantal gestegen tot 2980. Het aantal vrouwelijke huisartsen V_H na t jaar, met $t = 0$ op 1 januari 1990, is te schrijven als $V_H = a \cdot t + 1078$. De waarde van a is ongeveer 106.

Bereken met behulp van bovenstaande gegevens de waarde van a. Rond af op één decimaal.

bron: examen havo wiskunde A in 2013, eerste tijdvak

Opgave 6

Een elektrische Smart ForTwo is een echte stadsauto met een accupakket met een maximaal vermogen van $17{,}6$ kWh (kiloWattuur). In de stad kun je er zuinig mee rijden, per 100 km is het verbruik (bij een goede rijstijl) 12 kWh. Op de snelweg ligt het verbruik veel hoger: 20 kWh per 100 km.

a Neem aan dat de accu helemaal is opgeladen en er alleen in de stad wordt gereden.
Geef een formule voor het vermogen V van de accu afhankelijk van het aantal gereden km k.

b Hoeveel km kun je maximaal rijden in de stad (bij een goede rijstijl)?

Theorie

Om te onthouden

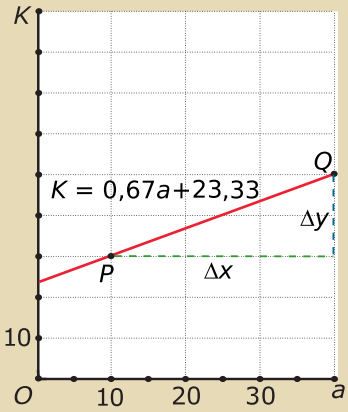
Formule bij een lineair verband opstellen

De formule van een lineair verband is $y = ax + b$. Om de formule op te stellen dient de waarde van a en van b berekend te worden. Hiervoor zijn de coördinaten van twee punten nodig, of de richting en de coördinaten van één punt.

Als de punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ bekend zijn, kan de richtingscoëfficiënt a worden berekend met:

$rc = a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

De waarde van b bereken je door in $y = ax + b$ de x- en y-waarden van één van beide punten en de waarde van a in te vullen.



Figuur 3

Lineaire vergelijking

Een **vergelijking** gebruik je om te bepalen bij welke waarde twee lineaire verbanden dezelfde uitkomst hebben. Dat is het punt waarin de bijbehorende lijnen elkaar snijden. Neem:

- $K_A = 30 + 25a$
- $K_B = 18 + 27{,}5a$

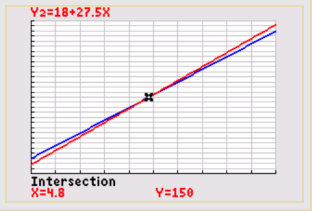
De vergelijking $30 + 25a = 18 + 27{,}5a$ los je op met de balansmethode:

$30 + 25a = 18 + 27{,}5a$ — beide zijden - 18
$12 + 25a = 27{,}5a$ — beide zijden - $25a$
$12 = 2{,}5a$ — beide zijden : 2,5
$a = 4{,}8$

A en B hebben bij $a = 4{,}8$ dezelfde uitkomst, namelijk $K = 150$.

Lineaire ongelijkheid

Wil je weten voor welke a de waarde van K_A lager zijn dan die van K_B dan heb je met een **lineaire ongelijkheid** te maken:
$K_A < K_B$, dus: $30 + 25a < 18 + 27{,}5a$.
Los eerst $K_A = K_B$ op en bepaal dan met grafieken op de grafische rekenmachine waar $K_A < K_B$.
Je ziet de oplossing: $a > 4{,}8$.



Figuur 4

Opgave 7

Bekijk in de **Theorie** hoe je een formule opstelt bij een lineair verband als twee punten van de grafiek zijn gegeven.

a Laat zien dat de formule in de figuur inderdaad past bij de getekende grafiek door P en Q als je benadert in twee decimalen nauwkeurig.

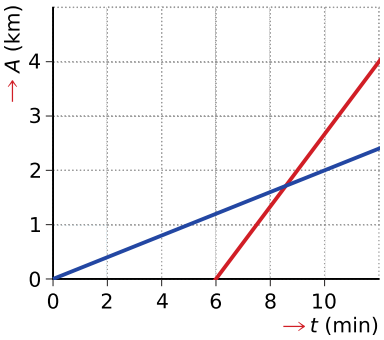
b Gegeven zijn de punten $A(2,-3)$ en $B(4,3)$.
Bepaal de formule van de lijn die door beide punten gaat.

Opgave 8

Bij het de lineaire verband k hoort een rechte lijn door $(0,3)$ en $(2,9)$.
Bij het de lineaire verband l hoort een rechte lijn door $(2,7)$ en $(5,19)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide grafieken.

Opgave 9

De buurjongens Jan en Piet gaan naar dezelfde school, 4 kilometer van huis. Jan gaat met de brommer en rijdt gemiddeld 40 km/h en Piet rijdt met de fiets gemiddeld 12 km/h. Bekijk de figuur waarin de afstand A van huis is uitgezet tegen de tijd t.



Figuur 5

a Lees in de figuur af wie het eerste is vertrokken en leg je antwoord uit.

b Stel bij beide verbanden formules op en bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.

c Leg uit wat het snijpunt van de grafieken betekent.

Opgave 10

Los de ongelijkheden op.

a $7x - 2 \leq 2$

b $-2x + 2 < -3x + 6$

Opgave 11

Een zelfstandige taxichauffeur heeft een vaste maandlast van € 4800,00 voor wegenbelasting, verzekering en salaris. De brandstofkosten per gereden kilometer bedragen € 0,20. Een klant betaalt € 1,80 per kilometer.

a Bepaal de formule voor de kosten K per maand van de taxichauffeur.

b Bepaal de formule voor de opbrengst O per maand van de taxichauffeur.

c Bereken hoeveel kilometer de taxichauffeur per maand moet rijden om winst te maken.

Theorie

Om te onthouden

Lineair interpoleren en extrapoleren

De bevolking van een grote stad is de laatste jaren gestaag gegroeid. Bekijk de tabel:

jaar	1980	1990	2000	2013	2020
aantal inwoners ($\times 10^5$)	2,1	3,8	6,6	8,3	9,7

Tabel 1

Het aantal inwoners in 2010 kun je met **lineair interpoleren** schatten:

$6{,}6 + 10 \cdot \frac{8{,}3-6{,}6}{2013-2000} \approx 7{,}8$ dus ongeveer $7{,}9 \cdot 10^5 = 790\,.\,000$.

Het aantal inwoners in 2022 kun je met **lineair extrapoleren** schatten:

$9{,}7 + 2 \cdot \frac{9{,}7-8{,}3}{2020-2013} \approx 10{,}1$ dus ongeveer $10{,}1 \cdot 10^5 = 101\,.\,000$.

Lineaire vergelijking met twee variabelen

Een **lineaire vergelijking in x en y** zoals $2x + 5y = 10$ kun je herleiden naar de vorm $y = \ldots$

Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 10 \\ 5y &= -2x + 10 \\ y &= -\tfrac{2}{5}x + \tfrac{10}{5} = -0{,}4x + 2 \end{aligned}$$

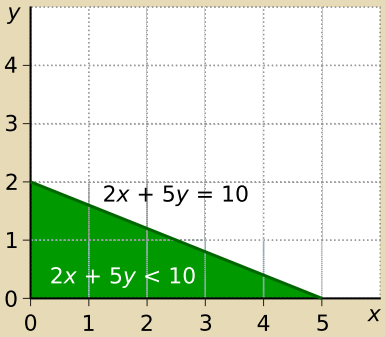
beide zijden $-2x$

beide zijden delen door 5

Je kunt nu meteen het snijpunt $(0,2)$ met de y-as en de richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{5}$ aflezen en de grafiek tekenen.

Uit de vorm $2x + 5y = 10$ kun je overigens heel snel de snijpunten met de assen halen:

1. snijpunt x-as: $y = 0$ geeft $2x = 10$ dus $x = 5$ en punt $(5,0)$.
2. snijpunt y-as: $x = 0$ geeft $5y = 10$ dus $y = 2$ en punt $(0,2)$.



Figuur 6

Lineaire ongelijkheid

Een **lineaire ongelijkheid** zoals $2x + 5y \leq 10$ kun je in een assenstelsel weergeven.
Je krijgt dan een **gebied** dat ofwel onder, ofwel boven de **grenslijn** $2x+5y = 10$ ligt. Je tekent daarom eerst de grenslijn en bepaalt dan door de coördinaten van een punt dat niet op die grenslijn ligt in te vullen, of je het gebied onder of boven de grenslijn moet hebben.

Opgave 12

Gegeven is de tabel met aantal hotelklanten per jaar.

jaar	2010	2014	2016
aantal klanten	3341	4612	4238

Tabel 2

a Schat door lineair interpoleren het aantal bezoekers in het jaar 2013.

b Schat door lineair extrapoleren het aantal bezoekers in het jaar 2020.

Opgave 13

Schrijf het lineair verband $2x + 3y = 12$ in de vorm van $y = ax + b$.

Opgave 14

Gegeven is de vergelijking: $3x - 2y = 6$.

a Bereken het snijpunt met de x-as.

b Bereken het snijpunt met de y-as.

c Schrijf de vergelijking $3x - 2y = 6$ in de vorm $y = ax + b$

Opgave 15

Een zwembad heeft een maximum capaciteit van 400 personen. Tijdens het recreatief zwemmen wil de directie dat er per 2 kinderen minimaal 1 volwassene aanwezig is.

a Waarom geldt: $k + v \leq 400$ en ook $k \leq 2v$?

b Teken de grafieken bij deze ongelijkheden.

c Hoeveel kinderen zijn er maximaal in het zwembad aanwezig?

Opgave 16

Met een digitale camera met een geheugenkaart van 16 Gb (16000 Mb) kunnen foto's genomen worden van 8 Mb of HD-films van 25 Mb per minuut.

Het aantal foto's (f) in combinatie met het aantal minuten film (m) die op de geheugenkaart passen, levert een ongelijkheid op.

a Schrijf deze ongelijkheid op.

b Je hebt al 520 foto's op deze geheugenkaart staan. Hoeveel minuten kun je maximaal nog filmen?

Verwerken

Opgave 17: Supersize Me

In de film Supersize Me besluit de hoofdpersoon, Morgan Spurlock, dertig dagen lang uitsluitend fastfood te eten. Op deze manier krijgt hij elke dag 5000 kcal aan energie binnen. Eerst wordt Morgan, die aan het begin van het experiment 85 kg weegt, nog misselijk van het eten. In het vervolg van de film went Morgan aan het type voedsel en ten slotte gaat hij het zelfs lekker vinden.
Diëtisten kunnen de gewichtstoename voorspellen met een rekenmodel. Voor actieve volwassen mannen, zoals Morgan, is er een formule om de energiebehoefte te bepalen om 'op gewicht' te blijven: $E_b = 33{,}6 \cdot G$
Hierin is E_b de dagelijkse energiebehoefte in kilocalorieën (kcal) en G het gewicht in kg.
Veronderstel dat Morgan een dagelijkse energiebehoefte zou hebben van 5000 kcal om op gewicht te blijven. Dan zou hij volgens bovenstaande formule veel meer wegen dan de 85 kg die Morgan aan het begin van het experiment woog.

a Bereken hoeveel kg hij dan meer zou wegen.

De gewichtstoename T op een bepaalde dag hangt af van de energiebehoefte E_b op die dag. Er geldt: $T = 0{,}000128 \cdot (5000 - E_b)$.
Hierin is T de gewichtstoename in kg per dag.
Wanneer deze formule gecombineerd wordt met de formule $E_b = 33{,}6 \cdot G$, ontstaat een formule van T uitgedrukt in G. Deze nieuwe formule is te herleiden tot de vorm $T = a \cdot G + b$.

b Bereken a en b.

In het rekenmodel wordt verder gebruikgemaakt van het gegeven dat elke 7800 kcal te veel een gewichtstoename van 1 kg veroorzaakt.

c Bereken met behulp van bovenstaande gegevens hoeveel gram de man al na één dag zwaarder wordt volgens het rekenmodel.

d Stel een ongelijkheid op en bereken na hoeveel dagen een man van 85 kg een gewichtstoename van meer dan 1 kg heeft door een inname van 5000 kcal per dag.

bron: examen havo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak

Opgave 18: Drinkwater

Duinwaterbedrijf Zuid-Holland is een bedrijf dat de levering van drinkwater verzorgt. Het bedrijf bepaalt ieder jaar opnieuw de tarieven van het drinkwater dat zij leveren. In 2007 werd het tarief per m^3 drinkwater verlaagd met € 0,14 ten opzichte van het tarief van 2006. Het nieuwe tarief in 2007 werd € 1,10. Tegelijkertijd werd het vastrecht verhoogd van € 47,52 in het jaar 2006 tot € 52,80 in het jaar 2007.

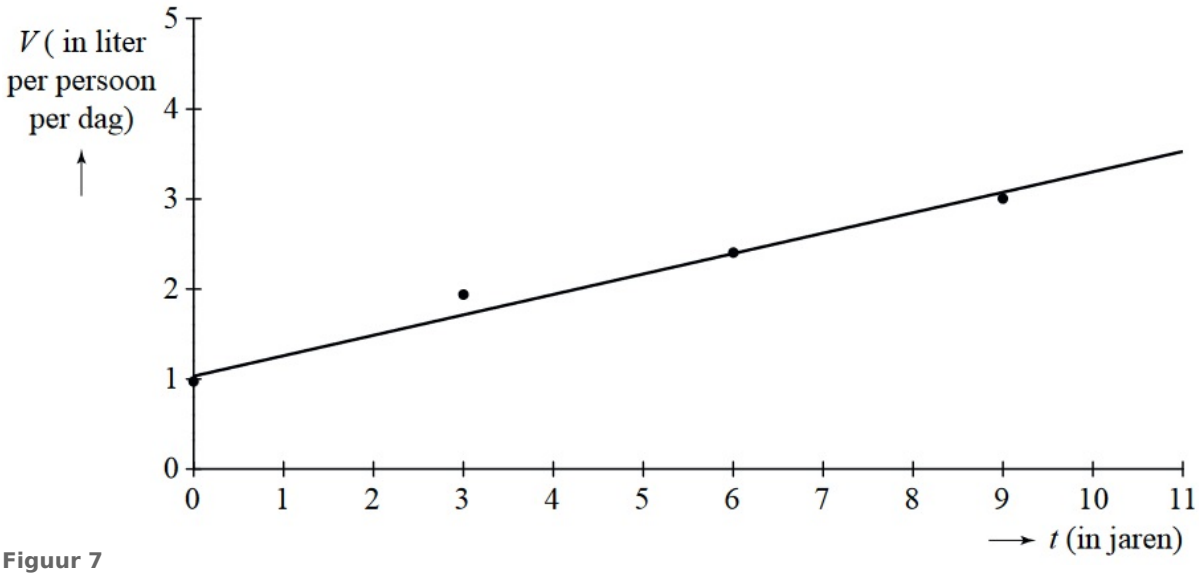
a Bereken met deze gegevens bij welk drinkwaterverbruik je in 2007 goedkoper uit bent dan in 2006.

Bekijk het overzicht van de drinkwatertarieven 2007 van Duinwaterbedrijf Zuid-Holland.

Drinkwatertarieven 2007
Tarief per m^3
Het tarief per m^3 daalt ten opzichte van vorig jaar met maar liefst € 0,14 naar € 1,10.
Vastrecht
Het vastrecht voor woningen stijgt van € 47,52 naar € 52,80 per jaar.
Belasting
Drinkwaterbedrijven zijn verplicht waterbelasting in rekening te brengen. Voor 2007 is het tarief € 0,149 per m^3 drinkwater.
Gemeentelijke belasting
Sommige gemeenten brengen Duinwaterbedrijf Zuid-Holland belasting in rekening voor het hebben van leidingen in hun gemeentegrond. Wie in één van onderstaande gemeenten woont, betaalt per aansluiting een jaarbijdrage in de vorm van een extra gemeentelijke belasting.
Katwijk (inclusief Rijnsburg, Valkenburg) € 21,90
Leiden € 36,10
Leidschendam-Voorburg € 5,50
Zevenhuizen-Moerkapelle € 13,95
Btw
Alle genoemde bedragen zijn exclusief 6% btw.

b In het jaar 2007 heeft de familie Akela 180 m^3 water verbruikt. De familie woont in Leiden.
Hoeveel heeft deze familie voor het hele jaar 2007 in totaal betaald, inclusief btw?

Lang niet al het drinkwater wordt gebruikt om te drinken. Het meeste drinkwater wordt gebruikt voor andere zaken, zoals douchen, wassen en het toilet doorspoelen. Een gedeelte van het drinkwater wordt gebruikt voor de vaatwasmachine. Gegevens daarvan staan in de figuur, waarbij geldt dat 1995 overeenkomt met $t = 0$.



Figuur 7

In deze grafiek kun je bijvoorbeeld aflezen dat er in 2001 ($t = 6$) gemiddeld over alle Nederlanders ongeveer 2,4 liter water per persoon per dag wordt gebruikt voor vaatwasmachines. Het lijkt erop dat V, het waterverbruik van de vaatwasmachine in liter per persoon per dag, bij benadering lineair toeneemt. Daarom is een lijn getekend die zo goed mogelijk bij de gegevens past. De formule van de lijn is $V = a \cdot t + b$, waarbij t de tijd is in jaren na 1995.

c Bereken a en b en rond af op een decimaal.

bron: examen havo wiskunde A in 2010, tweede tijdvak

Opgave 19: Van score naar cijfer

Als je examen hebt gedaan, ben je vaak erg benieuwd naar het cijfer. Thuis kijk je op internet welke vragen je goed had en hoeveel scorepunten je daarmee verdiend zou hebben. Maar welk cijfer hoort daarbij?
Vanaf het jaar 2000 wordt bij veel vakken dezelfde formule gebruikt om het cijfer te berekenen. Deze zogenaamde hoofdformule luidt:

$C = 9 \cdot \frac{S}{L} + N$

In deze formule is C het cijfer, S het aantal behaalde scorepunten, L het maximaal te behalen aantal scorepunten bij het examen en N de normeringsterm. Er geldt: S en L zijn gehele getallen en N is een getal met één decimaal, minimaal $0{,}0$ en maximaal $2{,}0$. C wordt afgerond op één decimaal.

Een alternatieve formule is $C = 10 - (L - S)\frac{9}{L} \cdot 2$.

Deze formule is bij $L = 80$ te herleiden tot de vorm $pS + qC = r$

Geef deze herleiding en bepaal hiermee de gehele getallen voor p, q en r.

bron: examen havo wiskunde A in 2014, eerste tijdvak

Opgave 20: Vogeltrek

Vogels die jaarlijks op een andere plaats overwinteren en na de winter terugkeren naar hun broedgebied, worden trekvogels genoemd. Onderzoekers houden jaarlijks de terugkeerdatum van diverse soorten trekvogels bij. Deze terugkeerdatum is sinds 1980 bij vrijwel alle trekvogelsoorten steeds vroeger geworden.
Uit Engels onderzoek blijkt bijvoorbeeld dat vanaf 1980 de terugkeerdatum van de gierzwaluw per 10 jaar 3 dagen vroeger wordt.
In 1980 keerde de gierzwaluw op 2 mei terug.

a Bereken op welke datum de gierzwaluw in 2020 zal terugkeren als deze trend zich voortzet.

Om voorspellingen voor de toekomst te kunnen doen, wordt een model opgesteld dat deze trend beschrijft. In dit model houden we geen rekening met schrikkeljaren. De dagen van het jaar worden genummerd: 1 januari krijgt dagnummer 1 en 31 december dus dagnummer 365. Het dagnummer waarop de gierzwaluw in het model terugkeert, noemen we A. Bij de datum 2 mei hoort dagnummer $A = 122$. Zoals eerder vermeld, wordt de terugkeerdatum van de gierzwaluw per 10 jaar 3 dagen vroeger. We noemen de tijd in jaren t, met $t = 0$ in 1980. Er kan een lineaire formule worden opgesteld waarin A wordt uitgedrukt in t.

b Stel deze formule op.

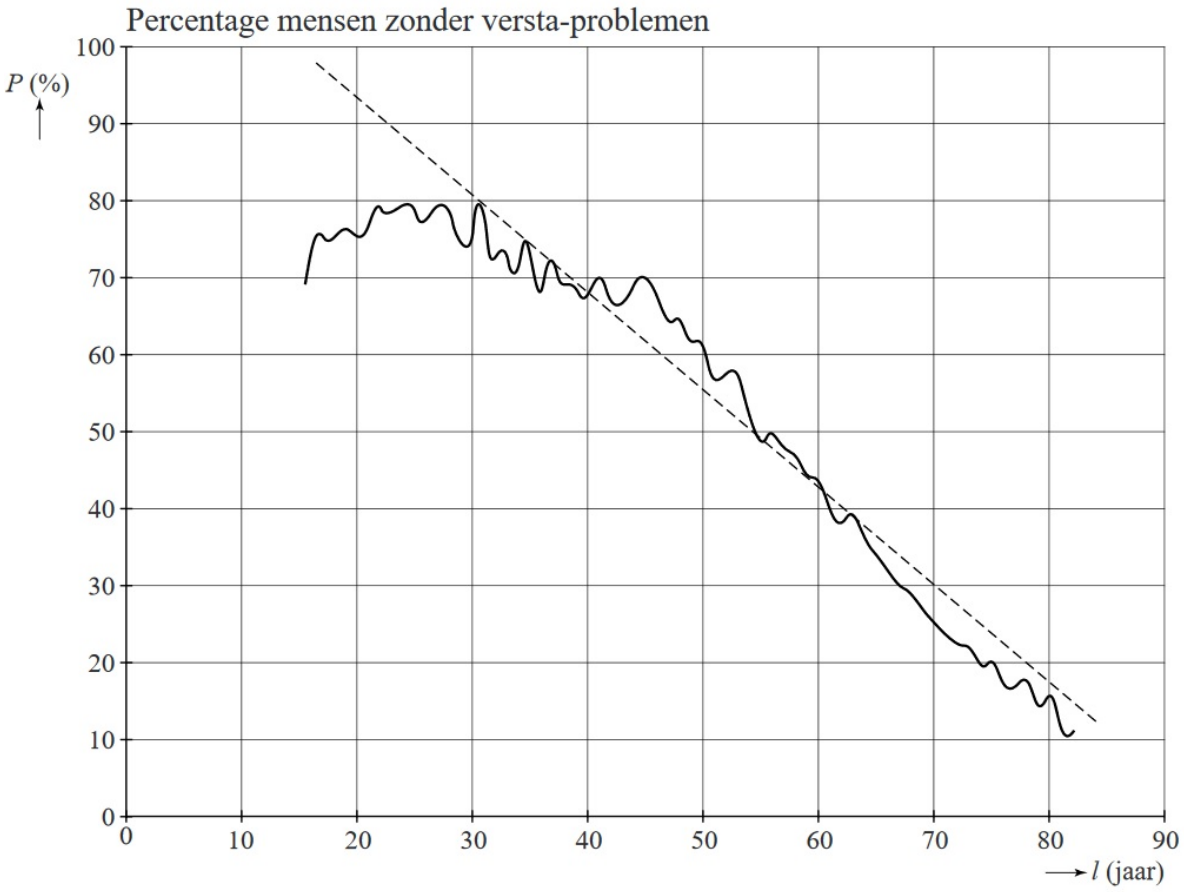
In Engeland wordt de gierzwaluw ook wel de honderddagenvogel genoemd, omdat hij gemiddeld 100 dagen in het land verblijft voordat hij weer naar zijn wintergebied vertrekt. Uit hetzelfde onderzoek blijkt dat deze vertrekdatum sinds 1980 ook verandert. Deze wordt elke 10 jaar ongeveer $0{,}6$ dagen vroeger. Samen met het vroeger worden van de terugkeerdatum leidt dit ertoe dat de verblijfsduur langer wordt. Ga ervan uit dat in 1980 de verblijfsduur 100 dagen is.

c Bereken in welk jaar de gierzwaluw dan voor het eerst meer dan 115 dagen in Engeland verblijft als de genoemde trends zich voortzetten.

bron: examen havo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak

Opgave 21: Wat zeg je?

Een veelgehoorde klacht is: “Ik hoor je wel, maar ik versta je niet.” Je hoort nog wel dát er iets gezegd wordt, maar je hersenen moeten hard werken om te verstaan wát er precies gezegd wordt. Dit wordt een versta-probleem genoemd. Niet alleen ouderen, ook heel wat jongeren hebben versta-problemen. Sinds een paar jaar is er een test waarmee je kunt bepalen of je versta-problemen hebt. Bij deze test krijg je 10 woorden te horen met achtergrondlawaai. Je moet op het antwoordformulier aangeven welk woord je gehoord hebt. Per woord zijn er vier keuzemogelijkheden.
In België werd de versta-test in 2009 door een grote groep Vlamingen van 16 jaar en ouder gemaakt. Een deel van de resultaten is verwerkt in de figuur.
Eén van de uitkomsten was te verwachten: naarmate de leeftijd vordert, wordt het percentage mensen zonder versta-problemen kleiner. Deze trend is aangegeven in de figuur: er is bij benadering een lineair verband tussen het percentage mensen P zonder versta-problemen en de leeftijd l.



Figuur 8

a Stel de formule op van de in de figuur getekende trendlijn.

Je zou verwachten dat de trend ook geldt voor jonge mensen: hoe jonger, des te hoger het percentage zonder versta-problemen. Dit blijkt echter niet zo te zijn, zoals je ook in de figuur kunt zien. Er zijn veel meer jongeren met versta-problemen dan je zou verwachten. Hoogstwaarschijnlijk komt dit door het veelvuldig luisteren naar muziek via mp3-spelers, telefoons en dergelijke door deze groep. Julia schrijft een artikel over versta-problemen bij jongeren in de schoolkrant, voorzien van de figuur. Zij wil de volgende zin schrijven: “Het aantal 17-jarigen met versta-problemen is … keer zo groot als het aantal dat je op grond van de trendlijn zou verwachten.” Op de plaats van de puntjes moet een geheel getal komen te staan.

b Bereken dit getal.

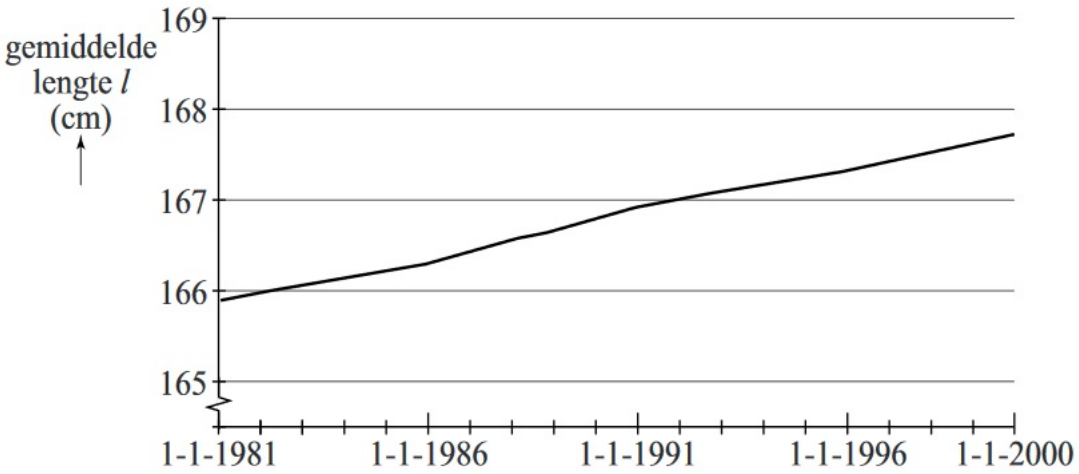
bron: examen havo wiskunde A in 2014, eerste tijdvak

Opgave 22: Lengte volwassenen in NL

Jarenlang nam in Nederland de gemiddelde lengte van volwassen mannen en vrouwen toe. Ook aan het einde van de vorige eeuw was dat nog zo: op 1 januari van het jaar 1981 waren Nederlandse mannen gemiddeld $177{,}3$ cm lang en op 1 januari 2000 was de gemiddelde lengte toegenomen tot $180{,}4$ cm. Dit proces verliep bij benadering lineair. Wanneer we ervan uitgaan dat deze groei zich op dezelfde wijze voortzet, kan met behulp van lineair extrapoleren de gemiddelde lengte van de Nederlandse mannen op 1 januari 2050 berekend worden.

a Bereken de gemiddelde lengte van de Nederlandse mannen op 1 januari 2050.

Ook de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouwen nam bij benadering lineair toe van 1981 tot het jaar 2000. Zie de figuur.



Figuur 9

Voor deze periode kan voor de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouwen een formule opgesteld worden van de vorm $l = a \cdot t + b$. Hierin is l de gemiddelde lengte in cm en t de tijd in jaren waarbij geldt dat $t = 0$ op 1 januari 1981; a en b zijn getallen.

b Stel deze formule op, gebruikmakend van de gemiddelde lengte op 1 januari 1981 en de gemiddelde lengte op 1 januari 2000.

bron: examen havo wiskunde A in 2016, tweede tijdvak

3 Exponentiële verbanden

Inleiding

Figuur 1

Tijdens archeologische opgravingen worden ook resten van mensen en dieren gevonden. Om te bepalen hoe oud deze resten zijn, wordt eerst naar de omgeving gekeken waar de vondst is gedaan. De vondst wordt bijvoorbeeld vergeleken met andere vondsten die in dezelfde grondlaag zijn gevonden. Daarnaast kan de ouderdom van hele oude voorwerpen worden bepaald met de zogenoemde koolstof-14-methode (^{14}C). Koolstof-14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in 'levende' wezens voorkomt. Dus ook in mummies, houten en leren voorwerpen, en dergelijke. De concentratie van deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Vóór dat moment is de concentratie koolstof-14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt hij kleiner. De tijd waarin de helft van deze stof verdwijnt, is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar. Met deze methode zijn resten tot enkele duizenden jaren geleden behoorlijk nauwkeurig te dateren.

Verkennen

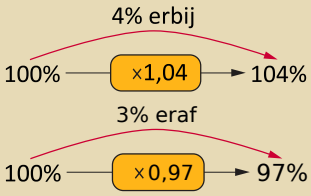
Opgave V1

Tijdens een opgraving in 2014 heeft een archeologe een compleet skelet gevonden. Omdat ze ook enkele delen van een Romeinse speer heeft gevonden, denkt ze dat het skelet uit ongeveer 550 v.Chr. dateert. Uit metingen blijkt dat nog $73{,}6\%$ van het oorspronkelijk koolstof-14 aanwezig is in het skelet. Uit welk jaar dateert het gevonden skelet?

Theorie

Om te onthouden

Groei en verval



Figuur 2

Als een bepaalde hoeveelheid elk jaar met 4% toeneemt, dan wordt die hoeveelheid elk jaar met $1{,}04$ vermenigvuldigd.

Bij een **groeipercentage** van 4% hoort een **groeifactor** van $1{,}04$.

Als een bepaalde hoeveelheid elk jaar met 4% afneemt, dan wordt die hoeveelheid elk jaar met $0{,}97$ vermenigvuldigd. Er is sprake van **exponentiële groei**.

Bij een **vervalpercentage** van 3% hoort een **groeifactor** van $0{,}97$. Er is sprake van **exponentieel verval**.

Groeifactor per tijdseenheid

Bij een groeifactor van $1{,}04$ per uur hoort een groeifactor van $1{,}04^{24}$ per dag.

Bij een groeifactor van $1{,}04$ per jaar hoort een groeifactor van $1{,}04^{\frac{1}{12}}$ per maand.

Exponentiële verbanden

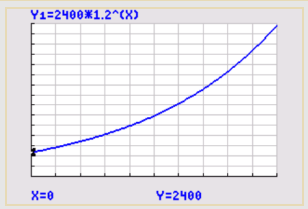
In deze tabel zie je het aantal inwoners van een nieuwe wijk nogal toenemen.

t (jaar)	2010	2011	2012	2014
A (inwoners)	2400	2880	3460	4970

Tabel 1

Om te bepalen of het inwonersaantal in de gegeven periode exponentieel is gestegen controleer je of de groeifactor elk jaar hetzelfde is. Deel daarom inwonersaantallen van opeenvolgende jaren op elkaar:

$\frac{2880}{2400} = 1{,}2$, $G = \frac{3460}{2880} \approx 1{,}2$ en $\left(\frac{4970}{3460}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}2$ (Let op! Dit zijn twee jaren.)



Figuur 3

Omdat in alle periodes de groeifactor ongeveer gelijk is, is er sprake van een **exponentieel verband**.

Neem je $t = 0$ in 2010, dan hoort daar de deze formule bij: $A = 2400 \cdot 1{,}2^t$.

Met je grafische rekenmachine kun je daar een grafiek bij maken.
Let daarbij goed op de instellingen van het venster.

In het algemeen heeft een exponentieel verband de vorm:

$y = b \cdot g^x$

waarin g de groeifactor per eenheid x is en de grafiek door $(0,b)$ gaat. b is vaak de startwaarde van de exponentiële groei.

Opgave 2

Vul de tabel in.

percentage	-5	0,5	5	500				
groeifactor					0,16	0,6	1,6	16

Tabel 2

Opgave 3

Gemeten is het aantal bacteriën in een petrischaaltje.

tijd	9:00	9:15	10:00	11:00
aantal A	68	75	102	

Tabel 3

a Laat zien dat het aantal bacteriën ongeveer exponentieel groeit en bepaal de groeifactor per kwartier.

b Bereken de groeifactor per uur en stel een passende formule op voor de exponentiële groei als t de tijd in uren is en $t = 0$ om 9:00 uur.

c Bereken het aantal bacteriën om 11:00 uur.

d Bereken het aantal bacteriën om 9:00 uur de volgende dag.

Opgave 4

Gegeven is een exponentieel verband tussen het aantal inwoners van een dorp N en de tijd t in jaar met $t = 0$ in 2010, en $N = 13500 \cdot 1{,}05^t$.

a Wat stelt het getal 13500 voor in de formule?

b Hoeveel procent bedraagt de jaarlijkse groei?

c Hoeveel inwoners komen er in 2016 bij?

d In welk jaar heeft het dorp 17500 inwoners?

Opgave 5

In ziekenhuizen worden radioactieve stoffen gebruikt, zoals Mo-99 (Molybdeen-99). Het exponentiële radioactieve verval van Mo-99 is dusdanig dat na precies 7 dagen nog $17{,}3\%$ van de stof over is.

Laat zien, dat per uur ongeveer $1{,}04\%$ van het Mo-99 vervalt.

Opgave 6

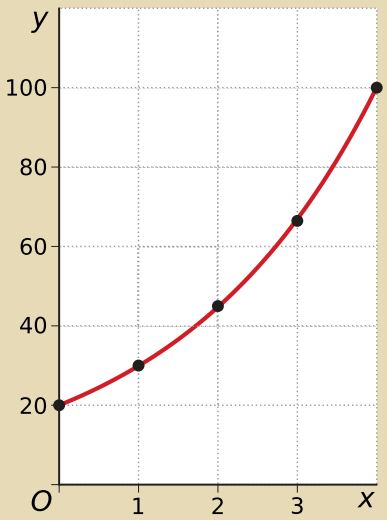
Het aantal bacteriën van een kolonie verdubbelt zich elke 2 uur. Om 10:00 uur werd er in het laboratorium een aantal van 64 gemeten.
Teken in een grafiek het aantal bacteriën van 7:00 uur tot 12:00 uur.

Theorie

Om te onthouden

Formule opstellen bij een exponentieel verband

Je ziet hier een deel van de grafiek van een exponentieel verband. Stel een bijpassende formule op.



Figuur 4

Je leest de punten $(0,20)$ en $(4,100)$ af.

Dit betekent:

1. startgetal bij $x = 0$: 20
2. groeifactor: $\left(\frac{100}{20}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}50$

Dus formule: $y = 20 \cdot 1{,}50^x$.

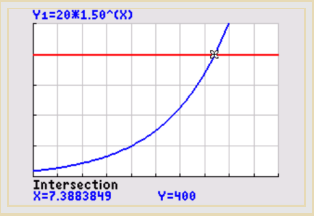
En hiermee kun je de grafiek op je grafische rekenmachine maken en bijbehorende vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.

Vergelijkingen en ongelijkheden bij exponentiële verbanden

Bij de grafiek heb je nu een passende formule gevonden.

Je wilt oplossen: $y > 400$, ofwel $20 \cdot 1{,}50^x > 400$.

Dat kun je alleen grafisch doen, dus met de grafische rekenmachine.



Figuur 5

Voer in: $y_1 = 10 \cdot 1{,}5^x$ en $y_2 = 400$.

Het snijpunt ligt bij $x \approx 7{,}39$.

Dus $20 \cdot 1{,}50^x = 400$ heeft als oplossing: $x \approx 7{,}39$.

En $20 \cdot 1{,}50^x > 400$ heeft als oplossing: $x \geq 7{,}39$ (afronding).

Verdubbelingstijd en halveringstijd

Bij een groeifactor per uur van $1{,}04$ hoort een groeifactor per dag van $1{,}04^{24} \approx 2{,}56$.

De **verdubbelingstijd** is de tijdsduur die hoort bij een groeifactor van 2, dus de waarde van t waarvoor geldt dat $1{,}04^t = 2$.

Bij een groeifactor per uur van $0{,}97$ hoort een groeifactor per dag van $0{,}97^{24} \approx 0{,}48$.

De **halveringstijd** is de tijdsduur die hoort bij een groeifactor van $\frac{1}{2}$, dus de waarde van t waarvoor geldt dat $0{,}96^t = \frac{1}{2}$.

Opgave 7

Bekijk de tabel bij een exponentieel verband.

x	0	1	2	3
y	15	18	21,6	25,92

Tabel 4

a Stel een bijpassende formule op.

b Los op $y > 50$.

Opgave 8

Paracetamol is een veelgebruikte pijnstiller, die in tabletvorm te koop is. Voor volwassenen zijn er tabletten die 500 mg paracetamol bevatten. Bij flinke pijn mag een volwassene twee tabletten tegelijk innemen in plaats van één. Ook als er twee tabletten tegelijk ingenomen worden, geldt dat na ongeveer een uur de meeste paracetamol in het bloed opgenomen is. Het lichaam breekt de hoeveelheid paracetamol in het bloed wel wat langzamer af: iedere minuut wordt de hoeveelheid paracetamol in het bloed $0{,}2\%$ minder.

a Stel een formule op voor de afname van het aantal mg paracetamol P in het bloed afhankelijk van de tijd t in uren.

b Bereken de tijd die nodig is om de hoeveelheid Paracetamol in het bloed onder de 100 mg te laten komen in minuten nauwkeurig.

c Bereken de halveringstijd van de hoeveelheid Paracetamol in het bloed in minuten nauwkeurig.

Opgave 9

Bepaal de formule van het exponentieel verband tussen x en y.

Opgave 10

Om een scan van de botten te maken, wordt een patiënt ingespoten met de radioactieve stof Technetium-99m (Tc-99m). Van de Tc-99m vervalt elk uur 11%. Dat wil zeggen dat telkens na een uur de 11% van de radioactieve stof verdwenen is.

a Stel de formule op om het percentage P te berekenen dat nog over is van de radioactieve straling na t uur.

b Bereken hoeveel procent van de radioactieve stof Tc-99m 24 uur na toediening nog in het lichaam van de patiënt aanwezig is.

c Bereken na hoeveel uur er meer dan 99% van de ingespoten radioactiviteit is vervallen.

Opgave 11

Op 26 april 1986 vond er een kernramp plaats in de kernreactor van Tsjernobyl.
Diverse radioactieve stoffen kwamen vrij, zoals jodium-131, met een halfwaardetijd van 8 dagen. In de Oekraïne bleek kort na de kernramp het hooi tien keer de toegestane hoeveelheid jodium-131 te bevatten.
Na hoeveel dagen kon het hooi weer gevoerd worden aan de koeien?

Verwerken

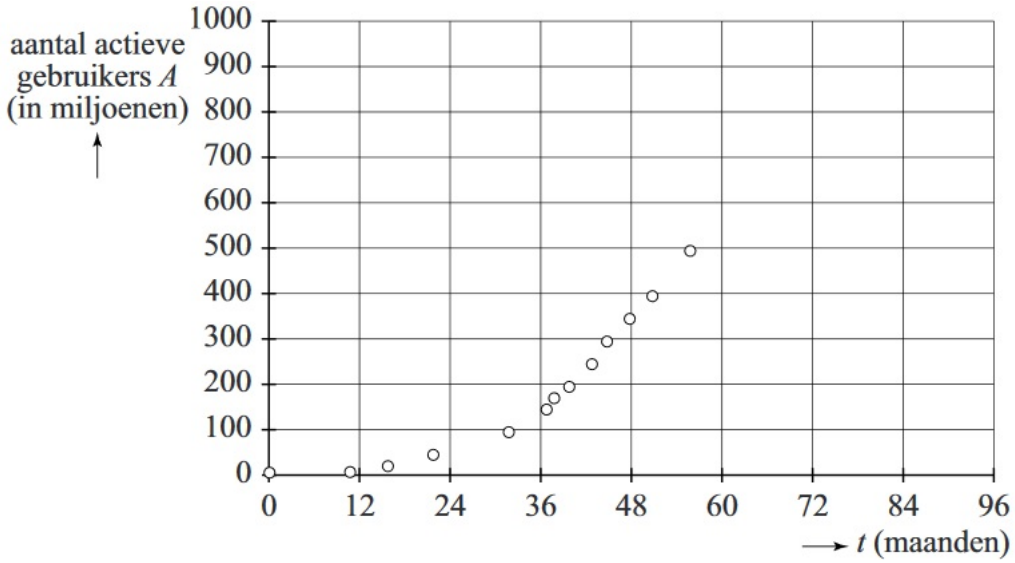
Opgave 12: FF snel sms'en

Hij is tegenwoordig niet meer weg te denken: de mobiele telefoon. Eind 2001 waren er in Nederland ongeveer 12 miljoen mobiele telefoons. Eind 2009 waren het er al 20 miljoen.
In deze periode was er sprake van exponentiële groei.
Bereken met welk percentage het aantal mobiele telefoons jaarlijks toenam.

bron: examen havo wiskunde A in 2014, eerste tijdvak

Opgave 13: Sociaal netwerk

Facebook is een sociaalnetwerksite, opgericht door Mark Zuckerberg in februari 2004. In het begin konden alleen studenten van Harvard College lid worden, later werden ook studenten van andere universiteiten toegelaten. In september 2006 werd Facebook geheel openbaar. Iedereen vanaf 13 jaar, waar ook ter wereld, kreeg de mogelijkheid om zich te registreren en actief gebruik te gaan maken van de site.
Het aantal actieve gebruikers steeg de eerste jaren spectaculair.
Zie de figuur, waarin het aantal actieve gebruikers op verschillende momenten is aangegeven.



Figuur 6

Op 1 december 2005, dat is bij $t = 0$, waren er $5{,}5$ miljoen actieve gebruikers, 43 maanden later, op 1 juli 2009, waren het er al 244 miljoen. Neem aan dat er in deze periode bij benadering sprake was van exponentiële groei.
Bereken voor deze periode het groeipercentage per maand.

bron: examen havo wiskunde A in 2015, eerste tijdvak

Opgave 14: Woei wordt waaide

We noemen werkwoorden regelmatig wanneer ze worden vervoegd als het werkwoord fietsen: *fietsen — fietste — gefietst*, of als het werkwoord huilen: *huilen — huilde — gehuild*. Er is een vaste uitgang voor de verleden tijd en het voltooid deelwoord. Wanneer een werkwoord bij de vervoeging verandering van klinkers (a, e, i, ...) of medeklinkers (b, c, d, ...) vertoont, spreken we van een onregelmatig werkwoord. Een voorbeeld hiervan is het werkwoord lopen, dat wordt vervoegd als *lopen — liep — gelopen*. Veel werkwoorden die tegenwoordig regelmatig zijn, waren vroeger onregelmatig. Onregelmatige werkwoorden hebben namelijk de neiging in de loop der tijd regelmatig te worden. Denk maar aan het werkwoord waaien. Sommige oudere mensen zeggen nog: “Gisteren woei het erg!”, terwijl vooral jongeren zeggen: “Gisteren waaide het erg!”

Wetenschappers hebben dit verschijnsel onderzocht voor Engelse werkwoorden. Zij turfden het aantal onregelmatige werkwoorden in drie verschillende perioden. Je begrijpt dat in het onderzoek alleen die werkwoorden betrokken zijn waarvan uit elke periode gegevens bekend waren. Van de 177 onregelmatige werkwoorden in het Oudengels (800 na Christus) waren er in het Middelengels (1200 na Christus) 145 nog steeds onregelmatig, en in het moderne Engels (2000 na Christus) nog maar 98.

a Er geldt bij benadering dat het aantal Engelse onregelmatige werkwoorden daalt volgens een exponentieel verband.
Bepaal met behulp van de bovenstaande gegevens de formule van het exponentieel verband met de tijd per 100 jaar.

b Bereken met behulp van dit verband in welk jaar het aantal Engelse onregelmatige werkwoorden nog maar 80 zal zijn.

c Bereken hoeveel jaar het duurt tot het aantal werkwoorden in deze groep gehalveerd is.

bron: examen havo wiskunde A in 2011, eerste tijdvak

Opgave 15: Opslag van radioactief afval

Een Gammacell is een apparaat dat onder andere gebruikt wordt bij onderzoek naar de bederfelijkheid van voedsel. De Gammacell is een stalen kast waarin zich de radioactieve stof cesium bevindt. De hoeveelheid radioactieve straling van cesium neemt jaarlijks met een vast percentage af en is na ongeveer 30 jaar gehalveerd.

a Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid radioactieve straling per jaar afneemt.

De tijd waarin de hoeveelheid straling tot de helft is afgenomen, wordt de halveringstijd genoemd. Soms wordt de volgende vuistregel gebruikt: ‘Na tien keer de halveringstijd is het radioactieve materiaal zijn straling kwijt.’ Volgens deze vuistregel zou cesium dus na 300 jaar zijn straling kwijt zijn. Dat is niet helemaal juist. Er is nog een klein beetje van de beginstraling over.

b Bereken hoeveel procent van de beginstraling er na 300 jaar nog over is.

bron: examen havo wiskunde A in 2016, eerste tijdvak

Opgave 16: Thermosflessen

Met een thermosfles heb je onderweg altijd je eigen warme drank bij je. Een consumentenblad heeft een aantal thermosflessen getest. Eén van de testonderdelen was: hoe snel neemt de temperatuur van de flesinhoud af? De flessen werden gevuld met zeer heet water en in een laboratorium in een testomgeving gezet, bij een temperatuur van 0 °C. Vervolgens werd elke twee uur de temperatuur van het water gemeten. In de figuur staan de resultaten van twee thermosflessen: de thermosfles Robuust en de thermosfles Thermax.

Figuur 7

De Thermax was de testwinnaar. Na 6 uur nam de temperatuur van het water in deze thermosfles af volgens een exponentieel verband. Met behulp van de gegevens in de figuur kan berekend worden dat de temperatuur ieder uur met afgerond $1{,}8\%$ daalde.

a Bereken dit percentage. Rond af op twee decimalen.

Veel mensen vinden koffie of thee alleen lekker als de temperatuur ten minste 65 °C is. Bij de Thermax bleef tijdens de test de temperatuur van het water heel lang boven die grens van 65 °C.

b Bereken hoeveel hele uren de temperatuur ten minste 65 °C was.

bron: examen havo wiskunde A in 2016, tweede tijdvak

4 Diverse verbanden

Inleiding

Figuur 1

Als je weleens in de bergen bent geweest, weet je dat een bergweg niet overal even steil is. Dat heeft gevolgen voor het brandstofverbruik als je met de auto in de bergen rijdt: het verbruik kan per gereden kilometer erg verschillen. De auto moet extra energie leveren om omhoog te kunnen komen. Hoe steiler, hoe meer energie er nodig is en hoe meer brandstof de auto verbruikt.

Wielrenners die een berg beklimmen, verbruiken ook meer energie op stukken met een grotere stijging. Vóór een wielerwedstrijd verkennen wielrenners daarom het parcours. Als je weet hoe steil elk stuk van de race is, kun je je tactiek daarop aanpassen, waardoor het nadeel van de steilte toch in je voordeel kan uitwerken.

Verkennen

Opgave V1

De vijftiende etappe van de Giro d'Italia van 2016 was een tijdrit waarin 10,85 km bergop moest worden gereden. De berg was niet overal even steil.
Bereken hoeveel keer zo steil het steilste gedeelte was, ten opzichte van het gemiddelde van de etappe.

Figuur 2

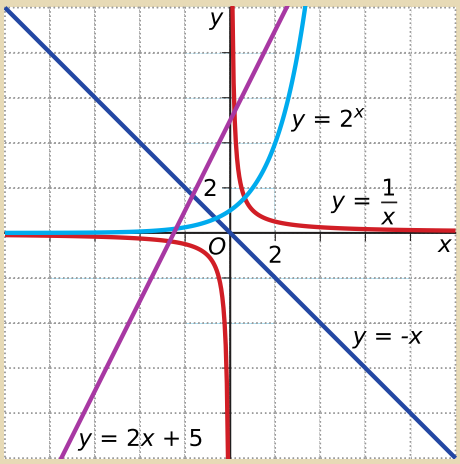
Theorie

Om te onthouden

Karakteristieken van verbanden

Er bestaan diverse verbanden tussen twee variabelen, waarvan je er een aantal moet kunnen herkennen.

- $y = a \cdot x$ is een **recht evenredig verband**
  grafiek: rechte lijn door de oorsprong
- $y = a \cdot x + b$ is een **lineair verband**
  grafiek: rechte lijn door $(0,b)$ met hellingsgetal a
- $y = b \cdot g^x$ is een **exponentieel verband**
  grafiek: als $g > 1$ een steeds sterker stijgende grafiek en als $0 < g < 1$ een steeds minder sterk dalende grafiek, beide door $(0,b)$ met horizontale asymptoot $y = 0$
- $y = \frac{c}{x}$ is een **omgekeerd evenredig verband**
  grafiek: een hyperbool met een horizontale asymptoot $y = 0$ en een verticale asymptoot $x = 0$



Figuur 3

Bij veel verbanden kun je karakteristieken herkennen zoals:

- snijpunten van de grafiek met de beide assen;
- de x-waarden bij maximale en minimale y-waarden;
- de **asymptoten** van de grafiek, lijnen waar de grafiek steeds dichter bij komt zonder ze te snijden.

Veel opgaven gaan juist over deze karakteristieken.

Hier zie je dat de grafiek van $y = \frac{11}{x}$ geen snijpunten met de assen heeft, geen maximale of minimale y-waarden heeft, maar wel twee asymptoten $x = 0$ en $y = 0$ heeft.

Verbanden combineren

Wanneer een variabele in twee verschillende formules voor komt, kun je door substitutie beide formules samenvoegen.

Bijvoorbeeld:
Een auto rijdt een afstand A van 15 km met 1 liter brandstof: $A = 15 \cdot L$.
De kosten K van één liter brandstof zijn € 1,50: $K = 1{,}5 \cdot L$.

Hieruit volgt: $L = \frac{1}{1{,}5} \cdot K$.

Door substitutie krijg je: $A = 15 \cdot \left(\frac{1}{1{,}5} \cdot K\right)$ ofwel: $A = 10 \cdot K$.

Opgave 2

Iemand uit Groningen rijdt regelmatig naar Zwolle (en weer terug). De afstand van zijn woning in Groningen naar de plek in Zwolle waar hij moet zijn, is 105 km. Hij rijdt met een gemiddelde snelheid van v km/uur. De reistijd is T minuten.

a Laat zien, dat geldt $T = \frac{6300}{v}$ minuten.

b Maak met je grafische rekenmachine een geschikte grafiek. Van welke soort verband is hier sprake?

c Hoe groot is de gemiddelde snelheid in km/uur nauwkeurig als de rit 1 uur en 5 minuten duurt?

d Welke asymptoten heeft de grafiek van T? Welke praktische betekenis hebben die asymptoten?

Opgave 3

Een fabrikant wil een nieuw artikel "in de markt zetten". In een eenvoudig economisch model gaat hij er van uit dat de hoeveelheid q die hij wekelijks verkopen kan alleen afhangt van de prijs p in euro per artikel. Hij gaat uit van het verband $q = 2500 - 40p$. Hij produceert het artikel voor € 2,50 per stuk.

De winst W in euro berekent hij door van zijn totale inkomsten de kosten af te trekken.

a Laat zien, dat geldt $W = -40p^2 + 2600p - 6250$.

b Welke prijzen kan de fabrikant vragen?

c Maak een geschikte grafiek voor W en bepaal daarmee de maximale winst die de fabrikant volgens dit economisch model kan maken op de verkoop van het artikel en de prijs die daarbij hoort.

d Bij welke prijzen maakt hij in ieder geval winst?

Opgave 4

Als in de winter gladheid of sneeuw wordt verwacht, strooit men zout op de wegen. Een van de zoutsoorten die hiervoor wordt gebruikt, is steenzout.
De vriespuntdaling V is het aantal graden dat het vriespunt van water lager wordt dan 0 °C. Met behulp van de volgende formule kan V worden berekend: $V = 3{,}72 \cdot \frac{D}{58{,}5 \cdot H}$.

Hierin is D de dosering van het zout (gram/m^2) en H de hoeveelheid neerslag in de vorm van sneeuw, ijs of water (kg/m^2).

a Bij een vriespuntdaling van $4{,}5$ °C kan de formule zo worden herleid dat D wordt uitgedrukt in H. Geef deze herleiding.

b Waarom kun je in dat geval zeggen dat D recht evenredig is met H?

naar: examen havo wiskunde A in 2015, eerste tijdvak

Opgave 5

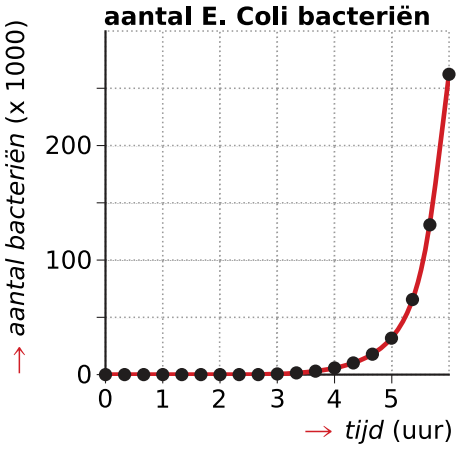
De bacterie Escherichia coli (E.Coli) is een bacterie waarvan dagelijks miljarden met je ontlasting uit je darmen komen. Onder ideale omstandigheden splitst de bacterie zich elke 20 minuten.

In de figuur staat de ontwikkeling die start met 1 bacterie.

a Wat voor soort verband is er tussen de tijd t in uren en het aantal bacteriën B? Is er sprake van een asymptoot? Licht je antwoord toe.

b Welke de formule hoort bij de grafiek?

c Na hoeveel tijd overstijgt het aantal E. Coli bacteriën met miljoen? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.



Figuur 4

Theorie

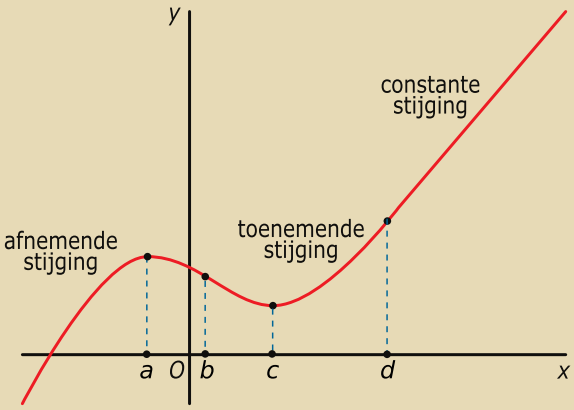
Om te onthouden

Veranderingen

Veranderingen in het verloop van een grafiek kun je aangeven met

- **stijgend** met een toenemende of afnemende of een constante stijging;
- **dalend** met een toenemende of afnemende of een constante daling;
- **constant** als er geen stijging of daling is.

Je kunt de veranderingen ook met een vaste stapgrootte in beeld brengen. Je krijgt een **toenamediagram** van de grafiek, bijvoorbeeld met stapgrootte $\Delta x = 1$.



Figuur 5

Tenslotte is het **differentiequotiënt** een maat voor de verandering over een interval $[a,b]$:

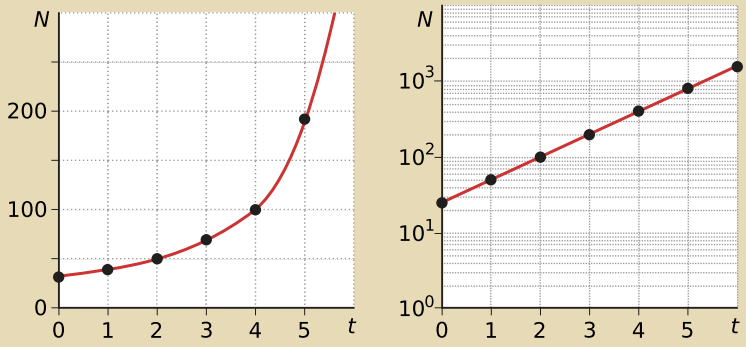
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(b)-y(a)}{b-a}$

waarin $y(a)$ de y-waarde bij $x = a$ en $y(b)$ die bij $x = b$ is.

Logaritmisch grafiekenpapier

Een exponentieel verband groeit erg snel. Wanneer je de grafiek van een exponentieel verband tekent, dan heb je op de verticale as erg grote waarden nodig. Om dit te voorkomen kun je op die as een **logaritmische schaal** gebruiken.

Bij **enkellogaritmisch papier** zijn de waarden op de y-as niet 1, 2, 3, enzovoort, maar 1 (ofwel 10^0), 10 (ofwel 10^1), 100 (ofwel 10^2), enzovoort. Op deze manier kun je dus grotere waarden in de grafiek tekenen. De grafiek van een exponentieel verband wordt op enkellogaritmisch papier een rechte lijn. En omgekeerd hoort bij een rechte lijn op enkellogaritmisch papier een exponentieel verband.

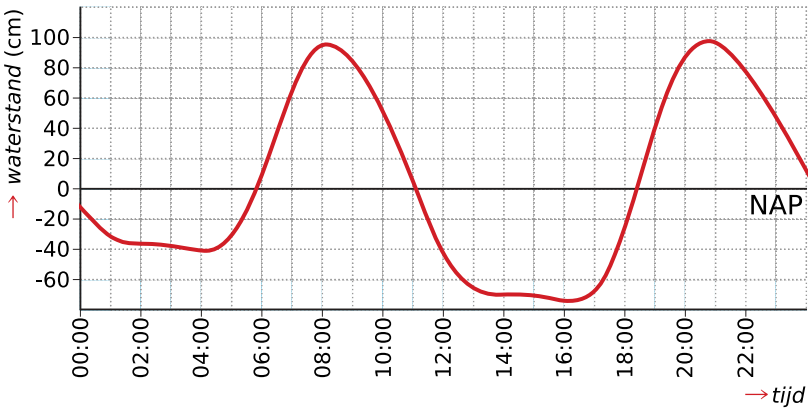


gewoon roosterpapier enkellogaritmisch papier

Figuur 6

Opgave 6

De Zeilvereniging Noordwijk publiceert de waterstanden per dag in cm ten opzichte van NAP (Normaal Amsterdams Peil), om de watersporters te informeren.



Figuur 7

a Welke de betekenis hebben de snijpunten van de grafiek met de tijd-as?

b Geef aan bij welke tijden je welke soorten van stijging herkent.

c Geef aan bij welke tijden je welke soorten van daling herkent.

d Wat is de betekenis van de minima en maxima van de grafiek en welke tijden zijn dat?

e Bereken het differentiequotiënt van de waterhoogte tussen 6:00 en 10:00 uur. Wat betekent dit getal?

f Teken bij deze grafiek een toenamediagram met een stapgrootte van 2 uur.

Opgave 7

De bacterie Escherichia coli (E.Coli) is een bacterie waarvan dagelijks miljarden met je ontlasting uit je darmen komen. Onder ideale omstandigheden splitst de bacterie zich elke 20 minuten.

In een petrischaaltje begint een ontwikkeling die start met 1 bacterie.

a Maak een tabel waarin het aantal bacteriën B is uitgezet tegen de tijd t in uren voor de eerste vijf uur.

b Teken de grafiek op **enkellogpapier**.

c Waarom is er van exponentiële groei sprake?

Opgave 8

Aan de hand van de stamomtrek van een boom op $1{,}50$ meter hoogte kun je de leeftijd schatten. In de tabel staan de gegevens die van toepassing zijn op wilgen en populieren.

leeftijd L (jaar)	5	7,5	10	12,5	15	20
gemiddelde omtrek P (cm)	15	25	40	650	90	125

Tabel 1

a Zet de gegevens op het logaritmisch papier en bepaal of de stamomtrek exponentieel toeneemt met de leeftijd van de boom.

b Stel een bij de grafiek passende formule op voor P afhankelijk van L.

c Schat de stamomtrek van een wilg die 30 jaar oud is.

Verwerken

Opgave 9: Krachtvoer voor melkkoeien

Onderzoekers hebben een verband geformuleerd tussen de hoeveelheid krachtvoer die een koe krijgt en de hoeveelheid melk die zij produceert. Er geldt: $M = -0{,}04V^2 + 1{,}05V + 27{,}2$.
Hierin is V de hoeveelheid krachtvoer (kg per dag) en M de melkproductie (kg per dag).
Voor de melkveehouder is vooral de winst W in euro per koe per dag belangrijk. De winstformule bij een melkprijs van € 0,29 per kg en een krachtvoerprijs van € 0,20 per kg is: $W = 0{,}29M - 0{,}20V$.

a Bereken de winst W wanneer een koe 4 kg krachtvoer per dag krijgt.

Als je de formule van M invult in de formule van W, ontstaat de formule:
$W = 0{,}29\left(-0{,}04V^2 + 1{,}05V + 27{,}2\right) - 0{,}20V$.
Je kunt deze formule herleiden tot de vorm $W = a \cdot V^2 + b \cdot V + c$.

b Laat deze herleiding zien.

bron: examen havo wiskunde A in 2014, eerste tijdvak

Opgave 10: Elfstedentocht

Een wiskundige heeft een formule opgesteld voor het aantal te verwachten Elfstedentochten E_w in de 21e eeuw, waarbij rekening gehouden is met een geleidelijke toename van de wintertemperatuur in de 21e eeuw en met het feit dat niet iedere mogelijke Elfstedentocht werkelijk gereden zal worden:
$E_w = \frac{74}{V} \cdot \left(p - p \cdot 0{,}6^V\right)$.

Hierin is V het verschil tussen de wintertemperatuur aan het einde van de 21e eeuw en de gemiddelde wintertemperatuur van de 20e eeuw in °C en p de kans op een werkelijk gereden tocht als een Elfstedentocht mogelijk is.
De organisatie van de Elfstedentocht probeert de kans p door nog betere voorbereidingen te verhogen tot $0{,}65$. Men verwacht dat $V = 3{,}6$ °C zal zijn.

a Bereken het aantal te verwachten Elfstedentochten in de 21e eeuw.

Als we aannemen dat V inderdaad $3{,}6$ °C zal zijn, dan is de formule van E_w te schrijven in de vorm: $E_w = a \cdot p$.

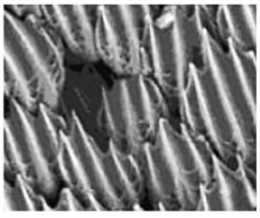
b Bereken a.

bron: examen havo wiskunde A in 2011, tweede tijdvak

Opgave 11: Haaienpak

Bij het wedstrijdzwemmen wordt van alles geprobeerd om de snelheid te verhogen of de weerstand (ten opzichte van het water) te verlagen. Bij zwemmen gaat het dus ook om het materiaal van het zwempak (badpak of zwembroek). Enkele jaren geleden zwom bijna iedereen in een zogenoemd haaienpak, een zwempak van materiaal dat erg lijkt op de huid van een haai. Bekijk de foto's.

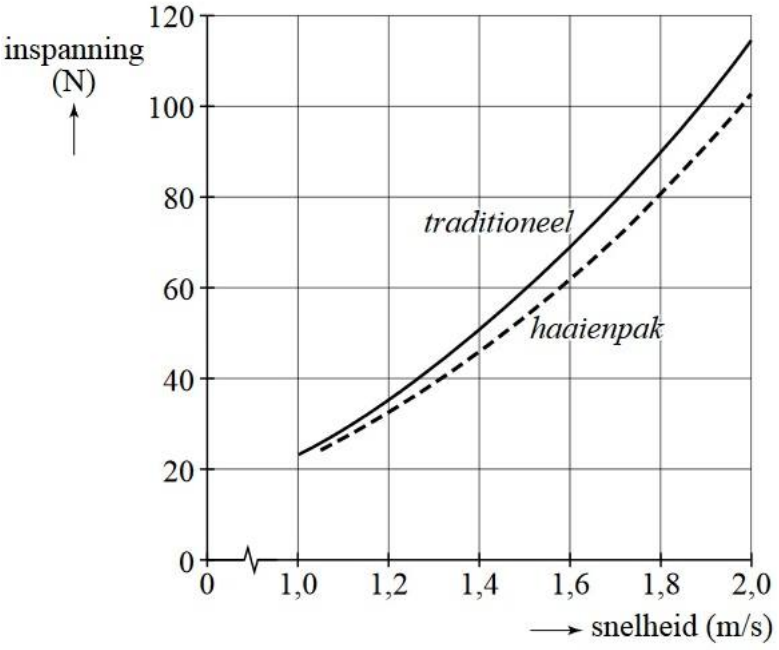
haaienpak


huid van een haai

Figuur 8

In de figuur is het verband tussen snelheid (m/s) en inspanning (Newton (N)) uitgezet, zowel voor zwemmen in een traditioneel zwempak als voor zwemmen in een haaienpak.

Duidelijk is te zien dat bij een hogere snelheid een grotere inspanning hoort en dat de grafiek die bij het haaienpak hoort lager ligt dan de grafiek die bij een traditioneel zwempak hoort. Voor dezelfde snelheid is in een haaienpak dus minder inspanning nodig.



Figuur 9

a Leg uit hoe je kunt zien dat bij een hogere snelheid het voordeel van een haaienpak groter is dan bij een lage snelheid.

Met behulp van de grafieken kun je bij een bepaalde snelheid berekenen hoeveel procent minder inspanning er in een haaienpak nodig is, vergeleken met een traditioneel zwempak.

b Bereken dit percentage bij een snelheid van 1,5 m/s.

De inspanning die nodig is met het traditionele zwempak en met het haaienpak kun je berekenen met de volgende formules:

$I_{\text{traditioneel}} = 23{,}22 \cdot v^{2{,}29}$

$I_{\text{haaienpak}} = 21{,}66 \cdot v^{2{,}23}$

Hierin is I de inspanning (Newton (N)) en v de snelheid (m/s).

c Welke ongelijkheid moet worden opgelost om te berekenen bij welke snelheden in het traditionele zwempak een lagere inspanning nodig is dan in een haaienpak? Los de ongelijkheid op.

d Tijdens de Olympische Spelen van Sydney in 2000 zwom Pieter van den Hoogenband op de 100 meter vrije slag een wereldrecord in een tijd van $47{,}84$ seconden. Pieter droeg toen voor het eerst een haaienpak.

Bereken hoe groot de inspanning van Pieter was.

e Bereken de tijd die Pieter in een traditioneel zwempak zou hebben gezwommen.

bron: examen havo wiskunde A in 2010, tweede tijdvak

Opgave 12: Voetbalwetten

Er zijn sportstatistici die alles bijhouden op het gebied van de Europese voetbalcompetities. Met deze informatie proberen ze allerlei verbanden, de zogenaamde voetbalwetten (zo worden ze genoemd in het tijdschrift Natuur, Wetenschap en Techniek), te ontdekken. In deze opgave bekijken we een aantal van deze voetbalwetten voor de Nederlandse Eredivisie. In de Nederlandse Eredivisie spelen 18 voetbalclubs tegen elkaar. Iedere club speelt twee wedstrijden, een thuiswedstrijd en een uitwedstrijd tegen elke andere club.

a Toon aan dat er in de Nederlandse Eredivisie in totaal 306 wedstrijden worden gespeeld.

b Als een wedstrijd in een gelijkspel eindigt, krijgt elk van beide clubs 1 punt. Als een wedstrijd niet in een gelijkspel eindigt, krijgt de winnende club 3 punten en de verliezende club 0 punten. In de competitie 2007/2008 behaalden de 18 clubs samen 858 punten.

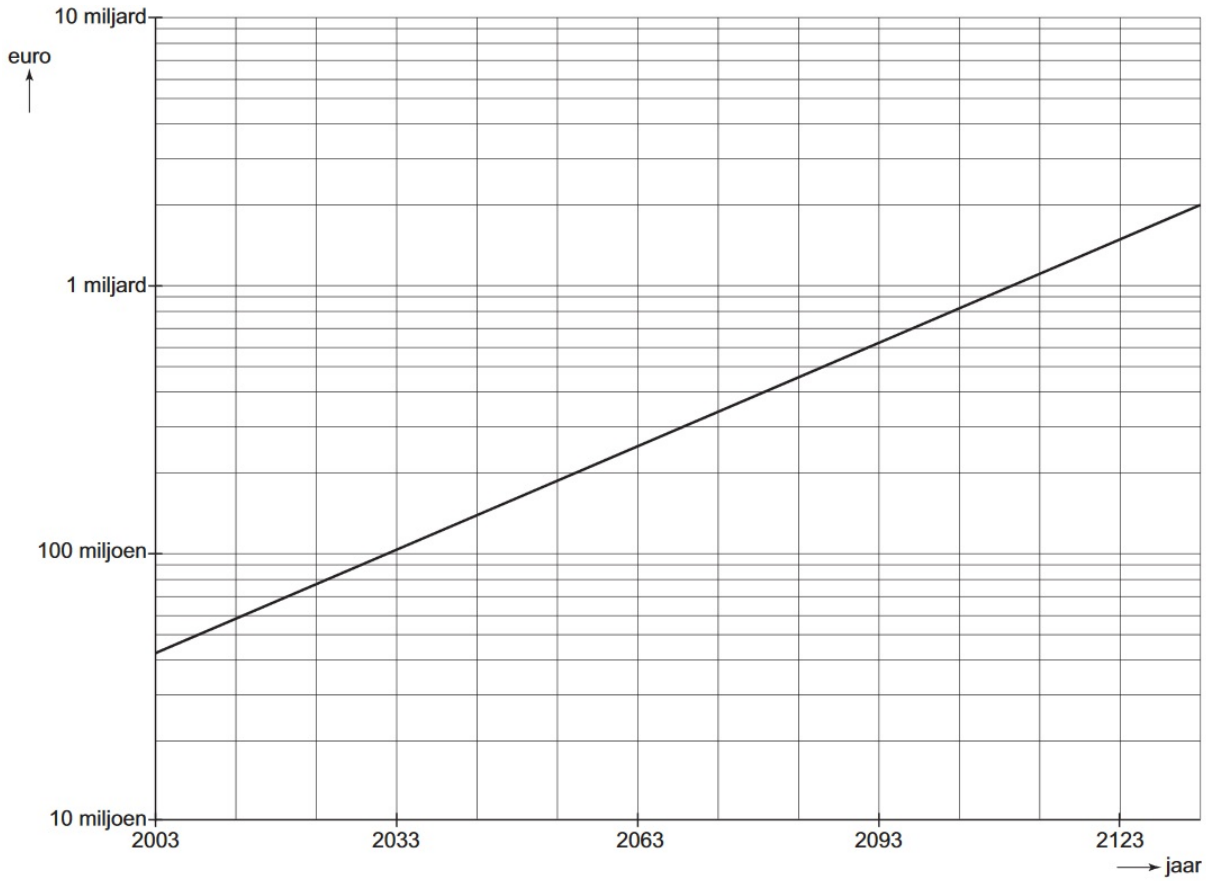
Welke twee vergelijkingen kun je nu opstellen? Gebruik voor het aantal gelijkspel-wedstrijden de variabele G en voor het aantal winst-wedstrijden de variabele W.

c Bereken bij hoeveel wedstrijden er in dit seizoen gelijk werd gespeeld met behulp van substitutie.

bron: examen havo wiskunde A in 2011, tweede tijdvak

Opgave 13: Het HABOG

Kernenergie levert weinig afval op, maar het is wel afval dat speciale aandacht vereist. Het is namelijk radioactief en het blijft nog tientallen jaren warmte afgeven. In 2003 is in Zeeland een gebouw geopend waar de komende honderd jaar kernafval zal worden opgeslagen. Het gebouw heet HABOG, Hoogradioactief Afval Behandelings- en Opslag Gebouw. In het HABOG wordt het afval van de kerncentrale van Borssele opgeslagen. Over honderd jaar zijn de radioactiviteit en de warmte van het afval zo veel afgenomen dat het afval op een andere plaats kan worden opgeslagen.
Het afval uit Borssele bestaat jaarlijks uit zes glasblokken met hoogradioactief afval. In het begin geeft zo'n blok evenveel warmte af als een kachel van 1800 Watt. Na 100 jaar is de warmteafgifte verminderd tot die van drie gloeilampen, ofwel 180 Watt. De warmteafgifte neemt exponentieel af.
Er wordt nu al geld gereserveerd om over meer dan honderd jaar het afval verder te kunnen verwerken. Daartoe is in het jaar 2003 een bedrag van 43 miljoen euro op een spaarrekening gezet. In de grafiek van de figuur zie je hoe men verwacht dat dit bedrag zal toenemen. De verticale as heeft een logaritmische schaalverdeling.



Figuur 10

De grafiek is een rechte lijn. Dit betekent dat men uitgegaan is van een vast rentepercentage per jaar gedurende de gehele looptijd.
Bereken dat percentage.

bron: examen havo wiskunde A in 2005, tweede tijdvak

Opgave 14: Random close packing

Op een braderie zie je wel eens een glazen pot staan, helemaal gevuld met even grote knikkers. Tegen betaling van een bepaald bedrag mag je raden hoeveel knikkers er in de pot zitten. Degene die het aantal precies raadt of er het dichtst bij zit, wint een prijs. Uit onderzoek blijkt dat de knikkers ongeveer 64% van de beschikbare ruimte innemen. Dit gegeven maakt het mogelijk een redelijke schatting te geven van het aantal knikkers in de pot. Hiervoor gebruiken we het volgende stappenplan:

- Bepaal de diameter van een knikker en bereken daarmee de inhoud van een knikker.
- Bereken 64% van de inhoud van de glazen pot en deel dit door de inhoud van één knikker. Het afgeronde antwoord is een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.

De inhoud van een knikker is te berekenen met de formule: $I_{knikker} = 0{,}5236 \cdot d^3$.
Hierin is d de diameter van de knikker in cm en knikker I de inhoud van een knikker in cm^3.
Een glazen pot met een inhoud van 800 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers, die elk een diameter van $1{,}3$ cm hebben. Hieruit volgt dat $K = 0{,}64 \cdot \frac{I_{pot}}{I_{knikker}}$.

De afgeronde waarde van K is het aantal knikkers in de pot en I_{pot} is de inhoud van de glazen pot in cm^3. Je kunt uit de combinatie van beide formules een formule afleiden voor K, uitgedrukt in I_{pot} en d. Deze formule is van de vorm $K = a \cdot \frac{I_{pot}}{d^3}$.

Laat zien hoe je deze formule afleidt uit de combinatie van beide formules en rond de waarde van a af op drie decimalen.

bron: examen havo wiskunde A in 2016, tweede tijdvak

5 Statistiek

Inleiding

Figuur 1

Ziekenhuizen zijn belangrijke zorginstellingen in onze samenleving. Deze zorg loopt uiteen van het hechten van een snee tot bestralen en opereren. Om de kwaliteit van deze zorg te waarborgen, voert het ziekenhuis regelmatig controles uit om te kijken of alle richtlijnen worden gevolgd. Daarnaast wordt gekeken naar de tevredenheid van patiënten en bezoekers. Als namelijk veel mensen tevreden zijn, zullen zij hun positieve ervaringen in hun omgeving doorvertellen en zal men meer vertrouwen in het ziekenhuis krijgen.

Om dit te monitoren voert het ziekenhuis af en toe klanttevredenheidsonderzoeken uit. Hierin wordt getoetst hoe belangrijke aspecten van het ziekenhuis door de ogen van de klant worden gezien. Als blijkt dat een bepaald onderdeel ondermaats is, kan de directie ertoe besluiten actie te ondernemen om dit te verbeteren.

Verkennen

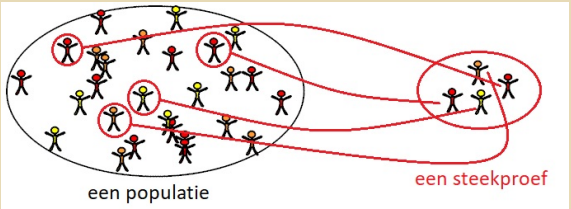
Opgave V1

In een ziekenhuis is een klanttevredenheidsonderzoek uitgevoerd. Hiervoor hebben zowel patiënten als bezoekers een vragenlijst ingevuld. Op basis van de antwoorden is voor iedereen een tevredenheidsscore bepaald. Als deze boven een door het ziekenhuis vastgestelde drempel zit, valt deze persoon in de categorie ‘tevreden’. Gebleken is dat van de 1029 ondervraagde patiënten er 783 tevreden zijn en van de 1462 ondervraagde bezoekers zijn dit er 824. Bepaal of er een groot verschil is tussen de ervaring van de twee groepen.

Theorie

Om te onthouden

Statistisch onderzoek



Figuur 2

Een statistisch onderzoek bevat:

- Een **populatie**, de groep waarover je conclusies wilt trekken.
- Een **onderzoeksvraag**, de hoofdvraag die moet worden beantwoord.
- **Statistische variabelen**, de eigenschappen die worden onderzocht.
- Een **steekproef**, de deelgroep die wordt onderzocht.
- De **data**, de gegevens, de resultaten van het onderzoek.
- Statistische verwerking van de data tot overzichtelijke tabellen of diagrammen.
- Conclusies.

Er zijn verschillende soorten statistische variabelen:

- **Kwantitatieve variabelen** kunnen worden uitgedrukt in een getal.
  Ze zijn **continu** als ze alle waarden binnen een interal aan kunnen nemen.
  Ze zijn **discreet** als ze alleen losse waarden kunnen aannemen.
- **Kwalitatieve variabelen** kunnen worden uitgedrukt als eigenschap.
  Ze zijn **ordinaal** als ze een mogelijke volgorde hebben.
  Ze zijn **nominaal** als ze geen enkele volgorde hebben.

Om betrouwbare conclusies te trekken, moet de steekproef lijken op de populatie. Daarom moet een steekproef **representatief** zijn.

Een steekproef is representatief als:

- de steekproef **aselect** is: elk persoon uit de populatie heeft een even grote kans om in de steekproef terecht te komen;
- de **steekproefomvang** voldoende groot is: er moeten genoeg personen in de steekproef zitten. Wat voldoende groot is hangt af van de context.
- alle waarden van de onderzochte statistische variabelen (zoals leeftijd, geslacht, woonplaats) in de steekproef naar verhouding evenveel voorkomen als in de populatie.

Opgave 2

Het CBS heeft een onderzoek onder de Nederlandse bevolking gedaan naar de kerkelijke gezindheid afhankelijk van het geslacht, de leeftijdscategorie en het onderwijsniveau.

a Geef van elk van de vier variabelen aan of ze kwalitatief/kwantitatief, continue/discreet en/of ordinaal/nominaal zijn en geef mogelijke waarden die ze kunnen aannemen.

b Waaraan moet een representatieve steekproef bij dit onderzoek zeker voldoen?

Opgave 3

Ga ervan uit dat een steekproefomvang kleiner dan 100 niet groot genoeg is om representatief te zijn.
Geef van de volgende steekproeven aan of ze representatief zijn. Licht je antwoord toe, gebruik de woorden aselect en steekproefomvang.

a Een onderzoek naar de manier waarop Nederlandse leerlingen naar school komen (lopend, fiets, bus, trein, auto enzovoort) door op 10 willekeurig gekozen scholen elk 150 willekeurig gekozen leerlingen te ondervragen.

b Een onderzoek naar de tevredenheid van abonnees van een internetprovider, door 150 willekeurig gekozen klanten die de helpdesk bellen te ondervragen.

c Een onderzoek dat gebruik maakt van vragenlijsten die zijn ingevuld door 1500 willekeurig gekozen leerlingen van 12-18 jaar.

Opgave 4: Kijkonderzoek

Stichting Kijk Onderzoek (SKO) houdt een kijkonderzoek om uitspraken te kunnen doen over hoeveel en welke mensen van de Nederlandse bevolking van 6 jaar en ouder naar de verschillende televisiezenders en programma's kijken. De stichting probeert een aselecte steekproef te trekken.

We bekijken verschillende mogelijkheden om een steekproef te trekken. Een mogelijke aanpak zou zijn om eerst een aselecte steekproef uit de Nederlandse adressen te trekken. Uit de bewoners op elk gekozen adres wordt vervolgens aselect één deelnemer aan het kijkonderzoek getrokken.

a Leg uit waarom de stichting hiermee geen aselecte steekproef van personen van 6 jaar en ouder heeft getrokken.

b Een andere mogelijkheid is dat SKO een grote aselecte steekproef van personen van 6 jaar en ouder trekt en dan aan deze personen vraagt om zich zelf op te geven voor het kijkonderzoek. Dat levert gemotiveerde deelnemers op.

Leg uit waarom deze aanpak van SKO niet verstandig is.

c Voor de werkelijke trekking van deelnemers aan het kijkonderzoek worden de deelnemers geselecteerd door eerst een steekproef van Nederlandse gemeenten te trekken. Dit wordt gedaan door de gemeenten op een lijst te zetten, gesorteerd op volgorde van grootte. Met vaste stapgrootte wordt door de lijst gegaan en de namen van de getrokken gemeenten worden genoteerd. Uit deze gemeenten zullen vervolgens de deelnemers worden getrokken.

Geef aan hoe de eerste stap de kwaliteit van de steekproef bevordert ten opzichte van een volledig willekeurige trekking van de deelnemers in één keer.

d Bekijk de trekking bij c.

Geef aan hoe deze stap de kwaliteit van de steekproef negatief beïnvloedt ten opzichte van een volledig willekeurige trekking van de deelnemers in één keer.

e Welk soort variabele kan discreet of continu zijn? Leg het verschil tussen een discrete en continue variabele uit. Noem van beide twee voorbeelden.

naar: voorbeeldexamen havo wiskunde A in 2017

Theorie

Om te onthouden

Data weergeven

Je hebt een grote hoeveelheid ruwe data verzameld. Je kunt die overzichtelijker weergeven in

- een **frequentietabel** waarin de absolute frequenties of de relatieve frequenties bij de verschillende waarnemingsgetallen staan;
- een **diagram**, zoals een beelddiagram, een staafdiagram, een lijndiagram, een cirkeldiagram, een steelbladdiagram, een boxplot;

klassen			meisjes	jongens	meisjes	jongens
klasse	midden	boven	freq	freq	r.freq.	r.freq.
150 -< 155	152,5	154	0	0	0,0	0,0
155 -< 160	157,5	159	6	0	7,1	0,0
160 -< 165	162,5	164	12	2	14,1	2,9
165 -< 170	167,5	169	34	3	40,0	4,3
170 -< 175	172,5	174	16	10	18,8	14,5
175 -< 180	177,5	179	10	14	11,8	20,3
180 -< 185	182,5	184	5	18	5,9	26,1
185 -< 190	187,5	189	1	11	1,2	15,9
190 -< 195	192,5	194	0	9	0,0	13,0
195 -< 200	197,5	199	1	1	1,2	1,4
200 -< 205	202,5	204	0	1	0,0	1,4
			85	69	100,0	100,0

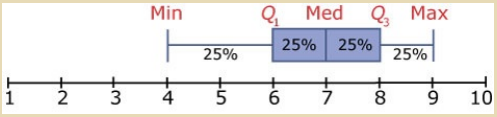
Figuur 3

Bij kwantitatieve variabelen maak je vaak een **klassenindeling** zoals je hier ziet voor de lengtes (afgerond op gehele getallen) van 154 leerlingen. De klassen zijn $150- < 155$, etc., met klassenmiddens $152{,}5$, etc., en klassengrenzen 150 en 155, etc.

Hierbij kun je een staafdiagram maken van de relatieve frequenties. In dit geval noem je dat een **histogram** omdat alle staafjes even breed zijn. Een bijpassend lijndiagram heet **relatief frequentiepolygoon**. Ook kun je bij elke (relatieve) frequentie de voorgaande optellen. Je krijgt dan **cumulatieve (relatieve) frequenties**, waarvan je een tabel, een histogram en een cumulatief relatief frequentiepolygoon maken.

Data samenvatten

Tabellen en diagrammen kun je vaak samenvatten met behulp van **centrummaten** als:



Figuur 4

- **gemiddelde**, het 'evenwichtspunt' van de verdeling.
- **modus** of **modale klasse**, de (klasse met de) meest voorkomende waarde van een variabele.
- **mediaan**, de middelste waarde van alle waarnemingen geordend van klein naar groot. Als je een even aantal waarnemingen hebt is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee waarden.

Om te bepalen hoeveel de waarden van een variabele uit elkaar liggen gebruik je **spreidingsmaten** als:

- **spreidingsbreedte**, maximale waarde − minimale waarde van een variabele
- **interkwartielafstand**, $Q_3 - Q_1$
- **standaardafwijking**, de wortel het gemiddelde van de kwadraten van alle afwijkingen een getal dat aangeeft hoe ver de waarden van een variabele uit elkaar liggen, waarbij grote en kleine waarden zwaarder meetellen in de berekening dan waarden in de buurt van het gemiddelde.

Een **uitschieter** is een waarde die meer dan $1{,}5$ keer de interkwartielafstand onder het eerste kwartiel of boven het derde kwartiel zit.

Als er iets verandert in een dataset, bijvoorbeeld door het toevoegen of verwijderen van een waarde, dan kunnen de centrum- en spreidingsmaten ook veranderen.

Opgave 5

Bekijk deze frequentietabel waarin je de scores ziet voor een toets waarbij 100 punten te verdienen waren.

scores voor een toets			
klasse			
onder	midden	freq	r.freq
25 -< 35	30	2	6,7
35 -< 45	40	1	3,3
45 -< 55	50	5	16,7
55 -< 65	60	10	33,3
65 -< 75	70	6	20,0
75 -< 85	80	4	13,3
85 -< 95	90	2	6,7
		30	100,0

Figuur 5

a Waarom kun je de gemiddelde score alleen schatten? Hoe groot is de geschatte gemiddelde score?

b Welke klasse is de modale klasse?

c Teken een cumulatief relatief frequentiepolygoon.

d Je kunt vanuit de klassenindeling eigenlijk geen boxplot tekenen. Hoe kun je vanuit het cumulatieve frequentiepolygoon een goede benadering van een boxplot maken?

e Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.

f Zijn er uitschieters bij deze scores? Motiveer je antwoord.

Opgave 6

Gebruik de frequentietabel met scores voor een toets uit de voorgaande opgave.

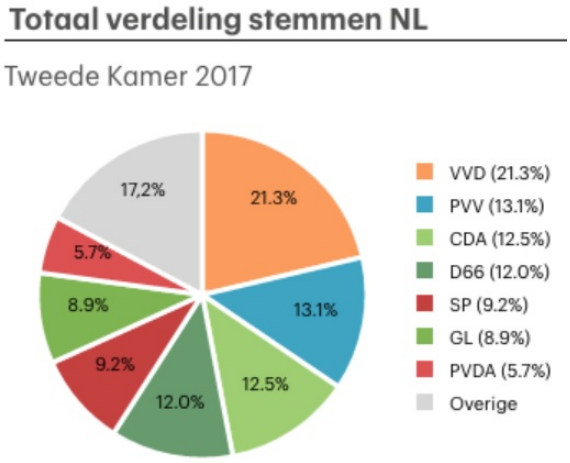
a Voer de gegevens in je grafische rekenmachine in en bereken daarmee alle centrum- en spreidingsmaten.

b Waarom komen de gegevens voor de boxplot niet overeen met het boxplot wat je uit een cumulatief relatief frequentiepolygoon kunt afleiden?

c Hoe kun je een cumulatief relatief frequentiepolygoon maken met je grafische rekenmachine.

Opgave 7

De Tweede Kamer heeft 150 zetels. Bekijk het cirkeldiagram van de verdeling van die zetels over de politieke partijen. Ook is er een 3D-cirkeldiagram weergegeven van de zetelverdeling.



Figuur 6

a Bereken de grootte van de hoek die hoort bij het CDA. Bereken het aantal zetels dat deze partij heeft gekregen op grond van het cirkeldiagram.

b Vaak wordt de uitslag van de TK-verkiezingen weergegeven als een half cirkeldiagram.
Noem twee redenen om dit te doen.

c Waarom hebben centrummaten en spreidingsmaten hier geen enkele betekenis?

Theorie

Om te onthouden

Frequentieverdelingen van data

Je hebt bij een grote hoeveelheid ruwe data een frequentieverdeling gemaakt. Als je daar een staafdiagram of een lijndiagram bij maakt, kan die verdeling verschillende vormen hebben:

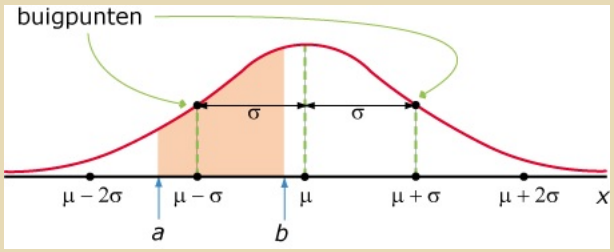
- de verdeling kan wel of niet **symmetrisch** zijn;
- de verdeling kan wel of niet **meertoppig** zijn;
- de verdeling kan wel of niet **scheef** zijn;
- de verdeling kan wel of niet een **staart** hebben, dus uitschieters aan één kant of aan beide kanten;
- de verdeling kan wel of niet **uniform** zijn, dus overal dezelfde frequentie hebben.

Bij een symmetrische verdeling zijn mediaan en gemiddelde hetzelfde. Beide vormen het midden van de verdeling.

De normale verdeling

Een klokvormige verdeling wordt een **normale verdeling** genoemd. Bij een normale verdeling gebruik je:

- X voor de naam van de statistische variabele (die in dit geval normaal verdeeld is)
- μ voor het gemiddelde
- σ voor de **standaardafwijking**



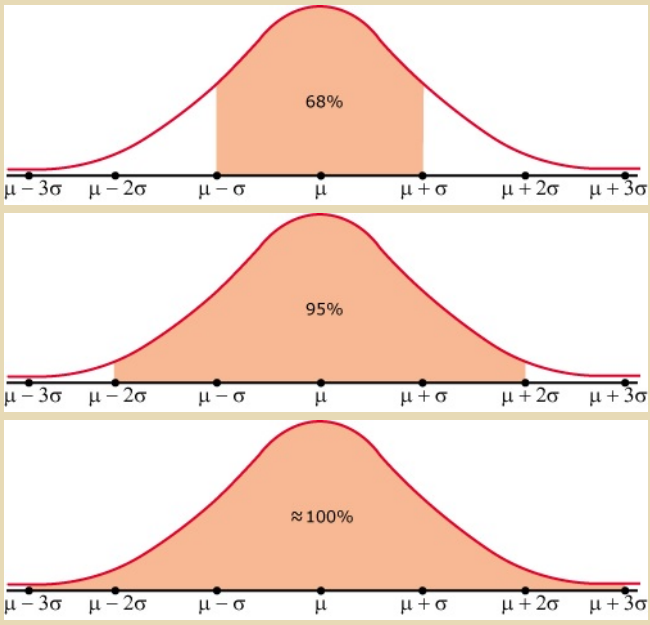
Figuur 7

Voor elke normale verdeling gelden de volgende drie **vuistregels voor de normale verdeling**:

- Ongeveer 68% van alle waarden van X ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- Ongeveer 95% van alle waarden van X ligt tussen $\mu - 2 \cdot \sigma$ en $\mu + 2 \cdot \sigma$
- Nagenoeg 100% van alle waarden van X ligt tussen $\mu - 3 \cdot \sigma$ en $\mu + 3 \cdot \sigma$

Een belangrijk voorbeeld van de normale verdeling is een **steekproevenverdeling**.

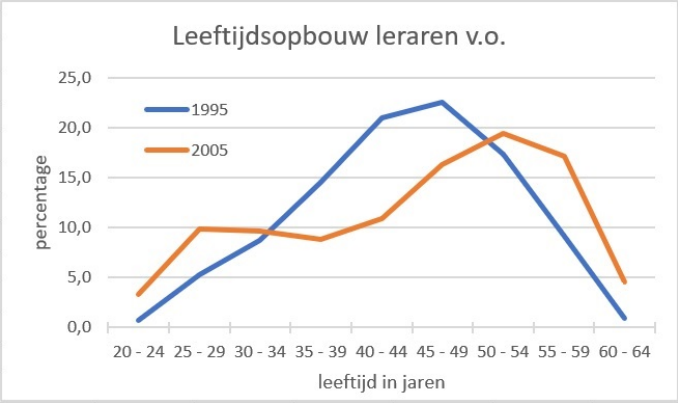
Een steekproevenverdeling is ofwel de verdeling van de gemiddelden van een groot aantal steekproeven uit een populatie, of wel de verdeling van de **proporties** in een groot aantal steekproeven uit de populaties. En die zijn dus altijd normaal verdeeld.



Figuur 8

Opgave 8

Deze twee lijndiagrammen laten de frequentieverdelingen van de leeftijd van de docenten in het voortgezet onderwijs zien in 1995 en in 2005.



Figuur 9

a Welke van beide verdelingen is meertoppig? Kun je dat verklaren?

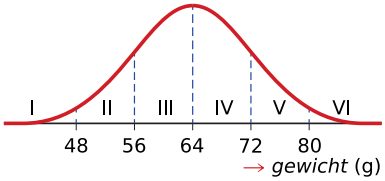
b Wat betekent het dat beide verdelingen rechtsscheef zijn?

c Als de instroom van jongere docenten zo door blijft gaan, hoe ziet dan de verdeling in 2015 er uit?

Opgave 9

Eieren kunnen op grond van hun gewicht in klassen verdeeld worden. Bekijk de figuur van de verdeling van het gewicht van eieren.

De gewichten hebben een vrijwel normale verdeling met een gemiddelde van 64 gram en een standaardafwijking van 8 gram. In de figuur staan zes gewichtsklassen voor de gewichten van de eieren.



Figuur 10

a Geef van elk van de klassen I tot en met VI aan hoeveel procent van de eieren in deze klasse zit.

b Hoeveel procent van de eieren is zwaarder dan 72 gram?

c Hoeveel procent van eieren is lichter dan 72 gram?

Opgave 10

Bij een concert met meer dan 5000 bezoekers wil men de gemiddelde leeftijd van de bezoekers in kaart brengen. Het is echter duidelijk dat die leeftijden niet normaal verdeeld zijn, want er komen naar verhouding veel jongeren op af.

Er wordt besloten om 50 representatieve steekproeven te nemen en daarvan het gemiddelde te berekenen.

a Waarom zal men dit doen?

b De steekproefgemiddelden waren normaal verdeeld met een gemiddelde van 29 jaar en een standaardafwijking van $1{,}5$ jaar. Tussen welke waarden ligt de gemiddelde leeftijd van de bezoekers met een kans van 95%?

Opgave 11

Bij verkiezingen worden veel kiezersonderzoeken gedaan. Bij een peiling van 11 december 2016 komt de VVD op 23 van de 150 zetels.

a Hoe groot is de proportie van de VVD stemmers in deze peiling?

b Veronderstel dat deze proportie het gemiddelde is van de proporties van een grote hoeveelheid steekproeven en dat de standaardafwijking van de steekproevenverdeling $0{,}011$ is. Hoeveel zetels zou de VVD dan met 95% kans krijgen als er op die dag verkiezingen waren gehouden?

Theorie

Om te onthouden

Gemiddelden of proporties schatten

Om een **populatiegemiddelde** of **populatieproportie** te schatten, gebruik je een representatieve steekproef.

- Bij een steekproefgemiddelde $\overline{X}$, een steekproefomvang n en een steekproefstandaardafwijking S is het 95%-**betrouwbaarheidsinterval** voor het populatiegemiddelde: van $\overline{X}-2\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ tot $\overline{X}+2\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$.
- Bij een steekproefproportie p en een steekproefomvang n is het 95%-**betrouwbaarheidsinterval** voor de populatieproportie: van $p-2\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ tot $p+2\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Deze uitspraken staan ook op het **formuleblad voor havo A**.

Twee kwalitatieve variabelen vergelijken

Er zijn twee manieren om kwalitatieve variabelen te vergelijken:

- Met een 2×2-**kruistabel** met daarin absolute of relatieve frequenties.

  Je bepaalt dan het getal *phi*: phi $=\frac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$
- Alleen voor ordinale variabelen kun je werken met het **verschil van cumulatieve percentages** V_{cp}. Je bepaalt dan het maximale verschil max V_{cp}.

	roker	niet-roker
longkanker	a	b
geen longkanker	c	d

Tabel 1

Op het **formuleblad voor havo A** vind je de uitspraken die je daarmee kunt doen.

Twee kwantitatieve variabelen vergelijken

Er zijn twee manieren om kwantitatieve variabelen te vergelijken:

- Door steekproefgemiddelden $\overline{X_1}$ en $\overline{X_2}$ en steekproefstandaardafwijkingen S_1 en S_2 te gebruiken.

  Je berekent dan de **effectgrootte**: $E=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1+S_2)}$.
- Door **boxplots vergelijken**.

Op het **formuleblad voor havo A** vind je de uitspraken die je daarmee kunt doen.

Samenhang tussen twee variabelen

Bij twee (meestal verschillende) statistische variabelen kan naar een **statistische samenhang** worden gezocht. Om deze samenhang zichtbaar te maken wordt een **puntenwolk** of **spreidingsdiagram** gebruikt.

Puntenwolken kunnen verschillende vormen hebben. Als de punten van de puntenwolk ongeveer op een rechte (of kromme) **trendlijn** liggen, is er een **statistische samenhang** tussen de variabelen. De sterkte van de samenhang wordt uitgedrukt door de **correlatiecoëfficiënt** r, bijbehorende vuistregels hoef je niet te kennen. Bij een rechte trendlijn kun je een lineaire formule opstellen en zo voorspellingen doen.

Opgave 12

Een onderzoek naar het aantal zetels dat een politieke partij bij de verkiezingen voor de Tweede Kamer zal gaan halen, levert het volgende bericht in de krant: “De partij zal ongeveer 150000 stemmers trekken.”
De Tweede Kamer heeft 150 zetels. Het aantal stemmers is ongeveer $9{,}5$ miljoen. Neem aan dat het statistisch onderzoek is uitgevoerd met een steekproefomvang van 1000.

Bereken de 95%-betrouwbaarheidsmarge van het aantal zetels. Geef je antwoord in hele zetels.

Opgave 13

Een fabrikant produceert een dure vloeistof. Hij wil flessen afleveren met een gemiddelde inhoud van $100{,}2$ mL van die vloeistof. De standaardafwijking van de inhoud is $0{,}1$ mL.

Om te controleren of het vullen van de flessen goed blijft gaan, controleert hij regelmatig de inhoud door middel van een steekproef.

a Hoe groot zal de standaardafwijking in de steekproef ongeveer zijn?
Licht je antwoord toe.

b Hij wil dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval maar $0{,}1$ mL breed is.
Hoeveel flessen moet hij dan controleren?

Opgave 14

Er is onderzoek gedaan naar de effecten van het drinken van energiedrankjes. Gekeken is naar overgewicht bij drinkers van energiedrankjes met het volgende resultaat voor aantallen personen.

	geen overgewicht	overgewicht
drinkers van energiedrankjes	27	65
geen drinkers van energiedrankjes	78	31

Tabel 2

a Doe een uitspraak over het verschil in gewicht tussen drinkers en niet-drinkers.

b Waarom kun je nu nog niet de conclusie trekken dat drinken van energiedrankjes een grotere kans op overgewicht tot gevolg heeft?
Geef twee redenen.

c De onderzoeker wil weten bij welk aantal drinkers van energiedrankjes met overgewicht de conclusie niet meer zou zijn dat het verschil groot is. Dan moet dus gelden: phi $\leq 0{,}4$.
Bereken dit aantal.

Opgave 15

Van een bepaald type batterijen wordt het productieproces aangepast om de levensduur (uur) te verlengen. Er worden 15 batterijen van het oude productieproces vergeleken met 15 batterijen die op de nieuwe manier zijn geproduceerd. In de tabel staan de resultaten. L_I stelt de levensduur voor van batterijen die volgens het oude productieproces zijn gemaakt, L_{II} is de levensduur van een batterij in het nieuwe proces.

levensduur L_I (uur)	560	625	580	605	598	602	602	613	650	583	588	595	601	623	589
levensduur L_{II} (uur)	630	620	595	590	635	660	610	654	632	680	624	590	643	625	671

Tabel 3

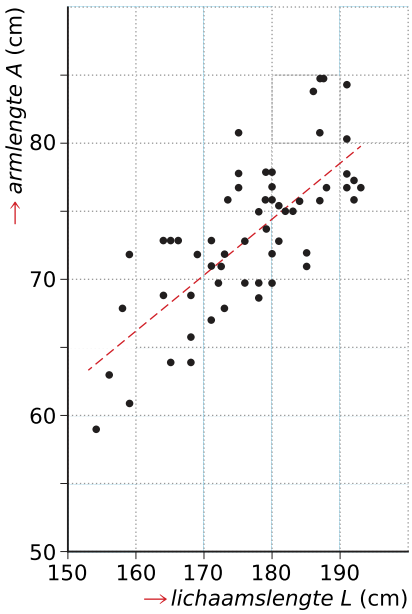
a Bereken de gemiddelde levensduur en de standaardafwijkingen van de twee typen batterijen.

b Bereken de effectgrootte en trek een conclusie over het verschil in levensduur.

c Kun je het verschil in levensduur van beide typen batterijen ook bepalen met behulp van boxplots? Wat is dan je conclusie?

Opgave 16

Bekijk de figuur van een spreidingsdiagram van de lichaamslengte en armlengte van een steekproef van 66 studenten. Er is ook een mogelijke trendlijn in dit diagram getekend.



Figuur 11

a Stel een formule op van deze trendlijn.

Een onderzoekster heeft in een ander land hetzelfde onderzoek uitgevoerd.
Zij vindt voor de trendlijn: $A = 0{,}39 \cdot L + 5{,}14$.

b Hoe groot de armlengte van iemand met een lichaamslengte 205 cm waarschijnlijk zijn? Geef je antwoord in hele cm.

Niet alle punten in haar spreidingsdiagram liggen precies op de trendlijn.
Ga ervan uit dat de armlengte normaal verdeeld is bij alle mogelijke lichaamslengtes tussen 150 cm en 200 cm en dat bij elke lichaamslengte de standaardafwijking van de bijbehorende armlengte gelijk is aan $3{,}0$ cm.

c Geef aan tussen welke grenzen de armlengte die je bij b hebt gevonden ligt met een betrouwbaarheid van 95%.

Verwerken

Opgave 17: Hommels

Figuur 12

Er is onderzoek gedaan naar het gedrag van hommels. De onderzoekers vroegen zich hierbij af hoe efficiënt hommels van bloem naar bloem vliegen om nectar te vinden.
Tijdens het onderzoek werd steeds een hommel in een afgesloten ruimte geplaatst. In deze ruimte bevonden zich zes kunstmatige bloemen met daarin een nectarachtige suikeroplossing. Telkens als de hommel vanuit het hommelnest op zoek ging naar voedsel, werd na terugkeer op het nest genoteerd welke route hij die vlucht volgde, welke afstand werd afgelegd en hoelang de vlucht duurde.
De onderzoekers deden het onderzoek met 8 verschillende hommels. Van elke hommel werden de gegevens genoteerd van 8 series van elk 10 vluchten. Dat leverde in totaal 640 onderzoeksresultaten op. Niet alle onderzoeksresultaten waren bruikbaar. Als de hommel niet alle zes bloemen had bezocht, werd de vlucht afgekeurd. In de tabel zie je per hommel het aantal afgekeurde vluchten.

Hommel:	1	2	3	4	5	6	7	8	Totaal
serie A:vlucht 1 t/m 10	4	1	3	10	2	4	1	4	29
serie B:vlucht 11 t/m 20	2	0	0	0	3	2	2	1	10
serie C:vlucht 21 t/m 30	4	2	0	0	1	1	0	1	9
serie D:vlucht 31 t/m 40	0	1	1	0	1	0	0	2	5
serie E:vlucht 41 t/m 50	3	0	2	0	2	0	1	0	8
serie F:vlucht 51 t/m 60	0	1	0	0	3	0	0	0	4
serie G:vlucht 61 t/m 70	1	0	0	0	0	0	0	0	1
serie H:vlucht 71 t/m 80	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Totaal	14	5	6	10	12	7	4	8	66

Tabel 4

In de tabel zie je bij hommel 1 bijvoorbeeld dat 4 van de eerste 10 vluchten zijn afgekeurd. In de laatste serie van 10 vluchten werd van deze hommel geen enkele vlucht afgekeurd.
De onderzoekers concludeerden op grond van de tabel: “De hommels hadden in het begin wat moeite om alle bloemen te vinden. Het percentage afgekeurde vluchten in serie A is … keer zo hoog als het percentage afgekeurde vluchten in het gehele onderzoek.”

a Bereken welk getal er op de puntjes moet staan.

b Er staat: “De hommels hadden in het begin wat moeite om alle bloemen te vinden”. Waaruit blijkt dat de hommels het niet bij elke volgende serie vluchten beter doen?

In de tabel is een deel van de resultaten weergegeven van een onderzoek naar vliegafstanden van hommels. In deze tweede tabel zijn 3 series onderzoeken weergegeven: A, B en H.

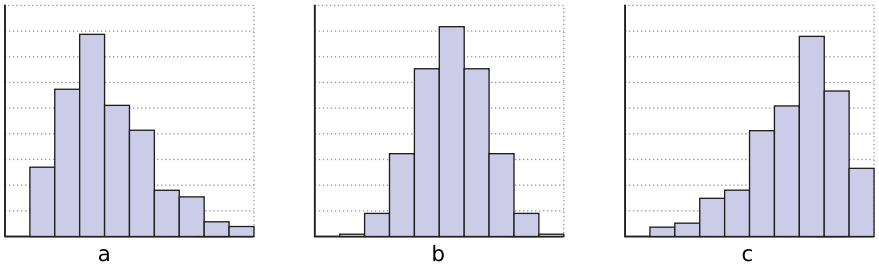
		Serie A: vlucht 1 t/m 10	Serie B: vlucht 11 t/m 20	Serie H: vlucht 71 t/m 80
Aantal goedgekeurde vluchten		51	70	80
Aantal keer kortste route		0	4	35
Afgelegde afstand per goedgekeurde vlucht (cm)	gemiddelde	6541	5473	3840
	standaardafwijking	1354	1187	512
	mediaan	5419	4892	3329

Tabel 5

De onderzoekers keken naar de afgelegde afstand per goedgekeurde vluchten stelden: “Vaker vliegen maakt verschil. In de laatste serie is de gemiddelde afgelegde afstand per goedgekeurde vlucht een stuk kleiner dan in de eerste serie.”

c Bepaal met behulp van het formuleblad of het verschil groot, middelmatig of gering is.

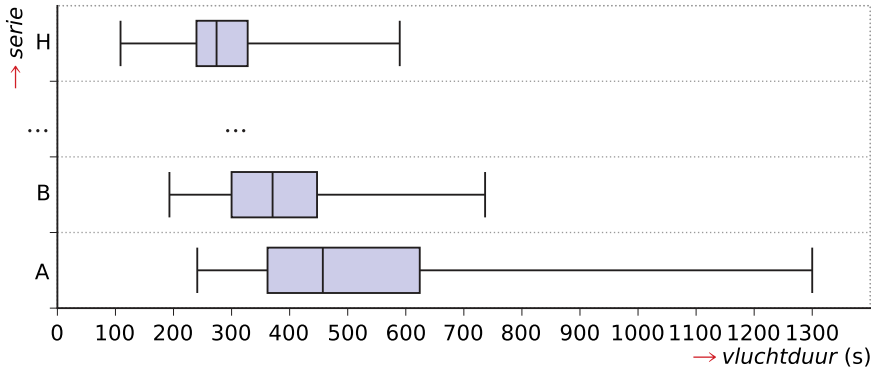
d In deze figuur zie je drie schetsen van mogelijke verdelingen.



Figuur 13

Leg uit welk van deze schetsen het best past bij de de afgelegde afstand per goedgekeurde vlucht van serie A.

Bekijk de figuur, waarin boxplots zijn weergegeven van de vluchtduur van een aantal hommels. Je ziet de vluchtduur van drie experimenten: A, B en H.



Figuur 14

e Bepaal hoe groot het verschil in vluchtduur is tussen serie A en serie B.
Licht je antwoord toe.

De hommels in dit experiment vliegen langs 6 bloemen, waar ze steeds 5 seconden nodig hebben om nectar uit de bloem te halen. De overige tijd gebruiken ze om van de nestkast langs de bloemen en weer terug naar de nestkast te vliegen (in totaal een afstand van 2462 cm).

f Gebruik de figuur om de gemiddelde vliegsnelheid van de snelste hommel te berekenen. Geef je antwoord in cm per seconde.

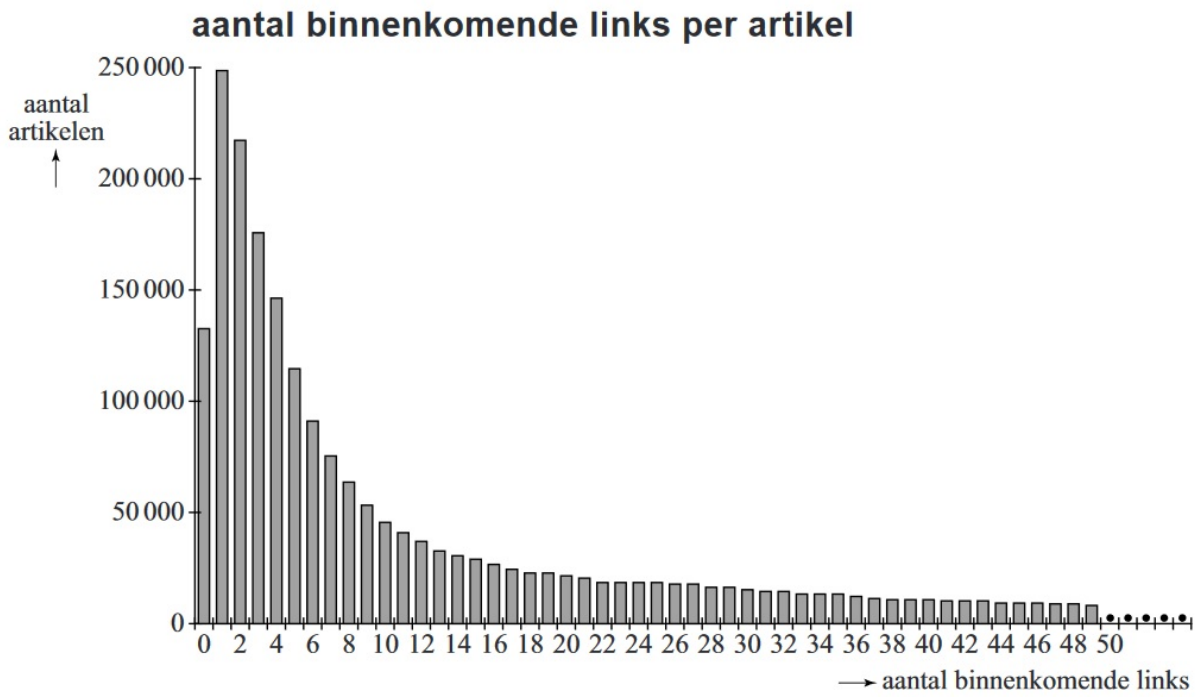
Met de informatie uit het onderzoek kun je op verschillende manieren de conclusie trekken dat hommels kunnen leren.

g Geef drie argumenten om deze conclusie te ondersteunen en vermeld bij elk argument uit welke tabel of figuur de informatie komt.

naar: voorbeeldexamen statistiek havo wiskunde A in 2017

Opgave 18: Wikipedia

Wikipedia is een encyclopedie op internet, waarin veel artikelen over diverse onderwerpen te vinden zijn. In die artikelen wordt vaak met een link verwezen naar andere artikelen. Van elk artikel dat op 24 januari 2009 in het Engelse Wikipedia voorkwam, is onderzocht hoeveel links in andere artikelen naar het betreffende artikel verwezen. Deze links worden de binnenkomende links genoemd. Het aantal binnenkomende links per artikel is geteld. De resultaten van dit onderzoek staan in de figuur en de tabel.



Figuur 15

Aantal binnenkomende links	Aantal artikelen
0	133515
1 of 2	465915
3 t/m 10	763683
11 of meer	1212195
Totaal	2575308

Tabel 6

In het onderzoek valt onder andere het volgende te lezen: 43% van de artikelen met 11 of meer binnenkomende links heeft zelfs 50 of meer binnenkomende links. Dat zijn de echt belangrijke artikelen,waarnaar vaak verwezen wordt.

De lange staart van artikelen waarnaar 50 of meer keer verwezen wordt, is niet aangegeven in de figuur. Deze staart hoort er uiteraard wel bij.

a Bereken hoeveel procent van alle artikelen uit het onderzoek 50 of meer binnenkomende links hadden.

b De drie centrummaten van het aantal binnenkomende links, namelijk het gemiddelde, de modus en de mediaan, zijn alle drie verschillend.

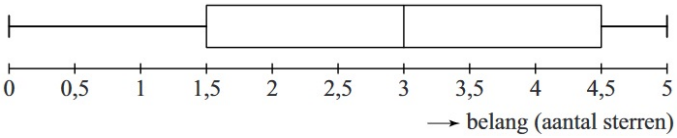
Zet de centrummaten op volgorde van klein naar groot. Licht je antwoord toe.

De onderzoekers kwalificeren het belang van elk artikel door het te voorzien van een aantal hele en/of halve sterren. Artikelen die geen binnenkomende links hebben, zijn volgens hen niet of nauwelijks van belang en krijgen daarom 0 sterren. De belangrijkste artikelen krijgen 5 sterren. In de tabel kun je aflezen welk aantal sterren bij welk aantal binnenkomende links hoort.

aantal binnenkomende links	belang (aantal sterren)
0	☆☆☆☆☆
1	½★☆☆☆☆
2	★☆☆☆☆
3 of 4	★½☆☆☆
5 of 6	★★☆☆☆
7 of 8	★★½☆☆
9 of 10	★★★☆☆
11 t/m 19	★★★½☆
20 t/m 29	★★★★☆
30 t/m 49	★★★★½
50 of meer	★★★★★

Figuur 16

Ook is de boxplot die hoort bij het belang, uitgedrukt in het aantal sterren, weergegeven.



Figuur 17

c Laat met een berekening zien dat het eerste kwartiel in de boxplot juist is aangegeven.

d Geef één voorbeeld van informatie over het aantal binnenkomende links dat gemakkelijker uit de boxplot (in combinatie met de tabel) gehaald kan worden.

Geef ook twee voorbeelden van informatie die alleen uit het staafdiagram af te lezen is.

bron: pilotexamen havo wiskunde A in 2016, eerste tijdvak

Opgave 19: Verschillen

Er is een onderzoek gedaan onder de studenten aan een universiteit. Hierbij werd onder andere de lichaamslengte van de studenten gemeten. Zie de tabel.

		aantal	lichaamslengte (cm)	
			gemiddelde	standaardafwijking
geslacht	man	34	183,8	5,8
	vrouw	32	170,8	8,1

Tabel 7

Op basis van deze tabel kunnen voor de lichaamslengte van mannen en vrouwen 95%-betrouwbaarheidsintervallen worden opgesteld. Onderzoek welk van deze twee intervallen het smalst is.

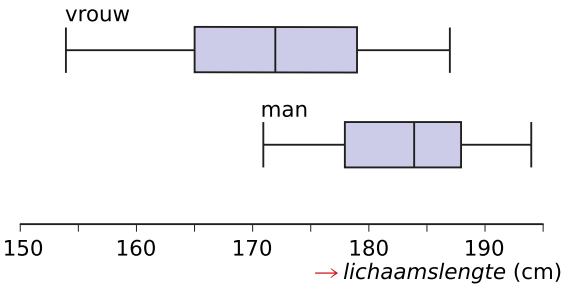
a Bereken de breedtes van de intervallen.

b Welke informatie geeft zo'n 95%-betrouwbaarheidsinterval in deze context?

Iemand die iets wil zeggen over de grootte van het verschil in lichaamslengte tussen de mannen en de vrouwen in het onderzoek, zou gebruik kunnen maken van de effectgrootte. Bij de berekening van de effectgrootte zijn de gemiddeldes en standaardafwijkingen van beide groepen van belang. Ga ervan uit dat het verschil van de gemiddelden gelijk blijft.

c Leg uit op welke wijze grotere standaardafwijkingen de grootte van het verschil (groot, middelmatig, gering) kunnen beïnvloeden.

De resultaten van de lichaamslengten werden ook in boxplots verwerkt. Zie de figuur.



Figuur 18

Je kunt met behulp van de gegevens over de lichaamslengten in de tabel onderzoeken hoe groot het verschil in lichaamslengte in het onderzoek is. Dit kun je ook doen met behulp van de gegevens in de boxplot.

d Toon met behulp van het formuleblad aan dat je met deze twee gegevensbronnen een verschillende conclusie trekt over de grootte van het verschil in lichaamslengte tussen de mannelijke en de vrouwelijke studenten.

e Beargumenteer welk van beide conclusies het best te verdedigen is.

f Er is ook nog gevraagd naar de voorkeurshand. De resultaten staan in de tabel.

		voorkeurshand	
		links	rechts
geslacht	man	5	29
	vrouw	2	30

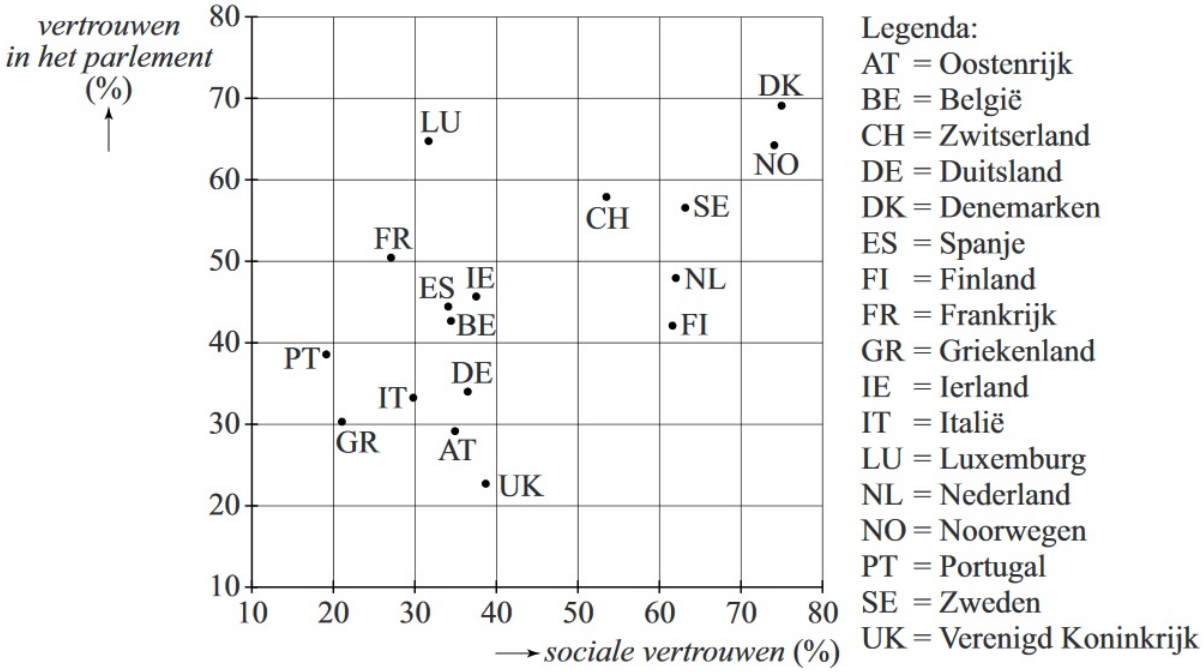
Tabel 8

Bepaal of het verschil in voorkeurshand tussen de mannelijke en de vrouwelijke studenten in het onderzoek groot, middelmatig of gering is.

bron: voorbeeldexamen havo wiskunde A in 2017

Opgave 20: Vertrouwen

Het Sociaal en Cultureel Planbureau beschrijft om de twee jaar in het rapport 'De Sociale Staat van Nederland' hoe het met het vertrouwen van Nederlanders gesteld is. Daarbij wordt onder andere onderscheid gemaakt tussen het vertrouwen in de medemens, ook wel het sociale vertrouwen genoemd, en het vertrouwen in het parlement. Beide soorten van vertrouwen worden uitgedrukt in een percentage: hoe hoger het percentage, des te meer vertrouwen. In de figuur wordt het vertrouwen van Nederlanders in het jaar 2008 vergeleken met dat van andere Europeanen. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat in Italië het sociale vertrouwen 30% bedroeg.



Figuur 19

In de figuur is af te lezen hoe groot in Nederland het vertrouwen in het parlement was. In sommige van de overige landen was het vertrouwen in het parlement groter.

a Bepaal in hoeveel procent van de overige landen dit het geval was.

b Schrijf de namen op van alle landen waar het sociale vertrouwen groter was dan het vertrouwen in het parlement.

Voor het onderzoek 'Sociale samenhang' in 2013 werden gegevens verzameld onder de Nederlandse bevolking. Er deden 7400 aselect getrokken personen aan dit onderzoek mee. Van de deelnemers gaven 4292 personen aan vertrouwen te hebben in de medemens.

Op basis van deze gegevens worden de volgende twee uitspraken gedaan over het percentage Nederlanders dat (in 2013) vertrouwen had in de medemens:

- Het is meer dan 95% zeker dat het percentage Nederlanders dat vertrouwen had in de medemens, in het interval $[56{,}6;\,59{,}4]$ ligt.
- Het is minder dan 95% zeker dat het percentage Nederlanders dat vertrouwen had in de medemens, in het interval $[56{,}6;\,59{,}4]$ ligt.

c Eén van deze twee uitspraken is juist.
Welke uitspraak is juist? Licht je antwoord met een berekening toe.

Jaarlijks wordt voor een onderzoek aan een groot aantal personen gevraagd hun lengte te schatten. We noemen deze lengte de geschatte lengte. Daarnaast wordt de lengte nauwkeurig door een onderzoeker gemeten. We noemen deze lengte de werkelijke lengte. De geschatte lengte en de werkelijke lengte worden vervolgens met elkaar vergeleken.

Het blijkt dat mensen in het algemeen hun lengte te hoog schatten.

In het onderzoek van een bepaald jaar schatten de vrouwen hun lengte gemiddeld $0{,}9$ cm hoger dan hun werkelijke lengte. De standaardafwijking van de werkelijke lengte was $6{,}0$ cm. De standaardafwijking van de geschatte lengte was $6{,}2$ cm.

d Bepaal met behulp van een vuistregel op het formuleblad of het verschil tussen de werkelijke lengte en de geschatte lengte gering, middelmatig of groot is.

Patiënten die voor een behandeling enige tijd in een ziekenhuis worden opgenomen, lopen tijdens dit verblijf het risico een infectie te krijgen. Zo'n infectie wordt een zorginfectie genoemd. Een deel van de zorginfecties ontstaat na een operatie.
In de periode 2007 tot en met 2012 is een steekproef gehouden onder een deel van de Nederlandse ziekenhuizen. Enkele resultaten hiervan staan in de tabel.

	aantal
patiënten	95299
patiënten die een zorginfectie hebben opgelopen	4694
geopereerde patiënten	32664
geopereerde patiënten die een zorginfectie hebben opgelopen	1286

Tabel 9

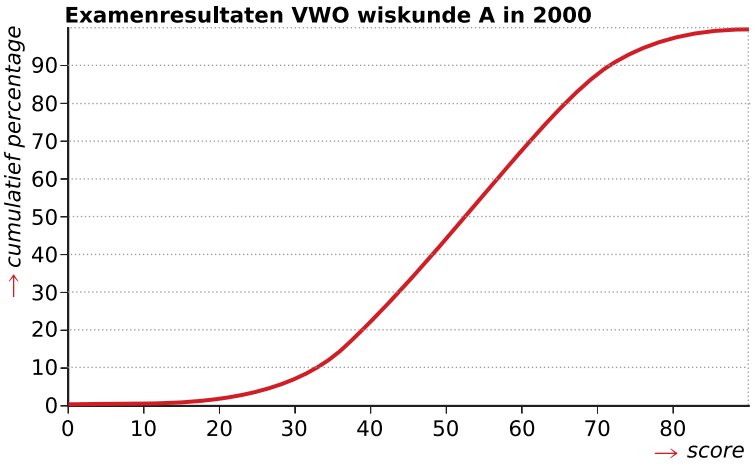
Met behulp van de gegevens in deze tabel, kan worden bepaald of het verschil in het krijgen van een zorginfectie tussen geopereerde en niet-geopereerde patiënten groot, middelmatig of gering is.

e Bepaal dit met behulp van een vuistregel.

bron: pilotexamen havo wiskunde A in 2016, tweede tijdvak

Opgave 21: Wiskunde A

Voor de invoering van de tweede fase bestonden de vakken wiskunde A en wiskunde B. In 2000 werden deze vakken voor het laatst op alle VWO-scholen geëxamineerd. Bij het Centraal Examen wiskunde A was de maximale score 90 punten. Zoals bij elk examen werden de behaalde resultaten onderzocht door middel van een grote landelijke steekproef. Van de 2255 kandidaten in de steekproef was er één met 0 punten en één met 88 punten. Niemand behaalde meer dan 88 punten. De uitkomst van de steekproef is in de vorm van een cumulatieve frequentiepolygoon weergegeven in de figuur.



Figuur 20

Uit de figuur blijkt bijvoorbeeld dat 29% van de kandidaten een score van 45 punten of minder behaalde en dat 77% een score van 65 of minder behaalde.

In 2000 was er een apart examen wiskunde A voor 125 kandidaten die waren opgeleid volgens een nieuw programma. Zo mochten ze, anders dan de overige kandidaten, een grafische rekenmachine gebruiken. De examenopgaven waren grotendeels hetzelfde, het maximaal aantal punten voor het hele examen was gelijk aan dat van het normale examen. 30 kandidaten hadden een score van 45 of minder, 75 kandidaten hadden een score van 65 of minder.

a Bereken met behulp van de figuur hoeveel kandidaten een score hadden die hoger was dan 70.

b De uitkomst van de steekproef zou ook in de vorm van een boxplot weergegeven kunnen worden. Maak een boxplot met behulp van de figuur. Licht je werkwijze toe.

c Maak een kruistabel met procentuele gegevens van de kandidaten van het oude en nieuwe programma.

naar: examen vwo wiskunde A in 2004, eerste tijdvak

6 Naar het examen

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie voor het **havo-examen wiskunde A** herhaald. Het is nu tijd om een compleet beeld van een havo A examen te krijgen door er één te maken. Bij het examen hoort een blad met formules, de **formulekaart voor havo A**.

1. Bij ‘Rekenen en algebra’: hoort alle theorie uit **Rekenen en algebra**, **Tabellen en grafieken** en **Allerlei verbanden: Werken met variabelen**.
2. Bij ‘Lineaire verbanden’: hoort alle theorie uit **Lineaire verbanden** en **Allerlei verbanden: Gebieden en ongelijkheden**.
3. Bij ‘Exponentiële verbanden’: hoort alle theorie uit **Exponentiële verbanden** en **Allerlei verbanden: Groei en verval**.
4. Bij ‘Diverse verbanden’: hoort alle theorie uit **Formules** en **Allerlei verbanden**.
5. Bij ‘Statistiek’: hoort alle theorie uit **Werken met data**, **Data verwerken**, **Statistisch onderzoek** en **Conclusies trekken**.

10 tips voor het eindexamen wiskunde

Omdat het schriftelijk eindexamen de helft van je totale eindcijfer is, wil je een zo goed mogelijk examen doen. Enkele tips kunnen je daarbij helpen.

1. **Vooraf**

   Je moet vooraf je kennis goed en in samenhang hebben opgebouwd, maar ook gericht examentraining hebben gedaan. Zorg dat je in de examenperiode goed bent uitgerust...

2. **Spullen mee**

   Neem alle benodigde spullen mee: pen, potlood en gum, passer, geodriehoek en grafische rekenmachine. Zorg ervoor dat je grafische rekenmachine is opgeladen of neem extra batterijen mee. Je moet op het examen met pen schrijven, tekenen mag met potlood.

3. **Goed beginnen**

   Begin niet overhaast meteen met de eerste opdracht, maar bekijk eerst het hele examen. Misschien zijn er opgaven waarvan het onderwerp je direct aanspreekt, of waarvan je de bijbehorende wiskunde goed beheerst. Dan begin je daar wellicht liever mee.

   Bedenk wel dat vaak de eerste opgave een soort van ‘binnenkomer’ is. Maar hij kan over iets gaan waar jij nu net niet zoveel van weet.

4. **Contexten**

   Het examen bestaat uit een aantal contexten die elk een eigen titel hebben. De verschillende opdrachten zijn doorgenummerd met 1, 2, 3, ... t/m het laatste nummer. Dus binnen een bepaalde context is de eerste opdracht niet altijd nummer 1. Bekijk zo’n context eerst als geheel, begin niet meteen aan de opdrachten. Markeer **trefwoorden** en **belangrijke formules**. Bijvoorbeeld de gebruikte eenheden kun je maar beter even markeren.

5. **De opdrachten**

   Begin pas met de eerste opdracht binnen een context als je ook echt begrijpt wat er van je gevraagd wordt.

   Bij iedere examenvraag staat aangegeven hoeveel punten je voor deze opdracht kunt krijgen. Het aantal punten geeft je een idee uit hoeveel stappen jouw uitwerking moet bestaan. Zorg dat de uitwerking van een opdracht zoveel mogelijk op één pagina staat, dan krijg je geen overschrijffouten bij het doorwerken op de volgende bladzijde.

6. **Grafische rekenmachine gebruiken**

   Bekijk goed of je gebruik kunt maken van de grafische rekenmachine (GR). Zeker bij havo wiskunde A mag je vaak met je GR een vergelijking oplossen. Schrijf dan duidelijk op hoe je de GR hebt ingezet. Bijvoorbeeld de ingevoerde formules en het ingestelde venster. Schrijf ook de functies die je gebruikt om snijpunten, maxima/minima te bepalen.

7. **Bijlagen gebruiken**

   Veel wiskunde examens bevatten één of meer uitwerkbijlagen met een tabel, een grafiek of een andere figuur. Als je daar iets uit moet aflezen, geef dit dan op de uitwerkbijlage aan. Bij aflezen uit een tabel kun je de afgelezen waarde markeren. Bij aflezen uit een grafiek teken je stippellijnen evenwijdig aan de assen. Zo verlies je geen punten bij het werken met een uitwerkbijlage.

8. **Opdracht klaar?**

   Heb je een opdracht klaar, lees dan de vraag dan nog eens. Ga na of je wel antwoord hebt gegeven op de vraag, of je goed hebt afgerond en of je de juiste eenheid hebt vermeld.

9. **Even geen idee?**

   Als je bij een opdracht niet weet wat je moet doen, blijf er dan niet te lang over nadenken. Geef jezelf even de tijd om iets te proberen en als dat niet helpt, ga dan door naar het vervolg. Anders kom je in tijdnood.

10. **Klaar?**

    Als je door het examen heen heb gewerkt, ga dan niet meteen weg, maar neem even een paar minuten rust. Gebruik de resterende de tijd om te bekijken of je nog wat kunt aanvullen of verbeteren, loop alles nog een keer langs. Je zult zien dat je er nog fouten uithaalt. Maar bedenk wel: bij twijfel kun je meestal het best je eerste antwoord laten staan!

Examen

Opgave 1: Akkerranden

Langs akkers zie je tegenwoordig vaak kleurige stroken met bloemen of met gras en kruiden. Deze stroken worden akkerranden genoemd. Ze worden aangelegd door boeren die een gedeelte van hun landbouwgrond gebruiken voor natuurbeheer. Akkerranden bieden namelijk leefruimte aan vogels, bijen en vlinders. Ze zijn ook aantrekkelijk voor toeristen.

In de tabel staat aangegeven wat de kosten van een akkerrand per hectare zijn (1 hectare = 10000 m^2).

kosten op jaarbasis in euro per hectare akkerrand		
	bloemenrand	gras-kruidenrand
zaaizaad	400	100
grondbewerking	250	63
zaaien	390	146
onderhoud (o.a. onkruid verwijderen)	475	400
management (o.a. administratie)	150	150

Boeren kunnen van de gemeente subsidie krijgen voor het aanleggen van een akkerrand. Voor gemeenten telt vooral de toeristische waarde van een akkerrand, daarom wordt het subsidiebedrag alleen bepaald door de lengte van de akkerrand. Deze lengte wordt uitgedrukt in strekkende meters: 1 strekkende meter betekent dat de lengte 1 meter is, ongeacht de breedte.

In de Hoeksche Waard golden in 2013 de volgende regels:

1. De akkerrand dient minimaal 3,5 meter breed te zijn.
2. Het subsidiebedrag is € 0,63 per strekkende meter bloemenrand.
3. Het subsidiebedrag is € 0,53 per strekkende meter gras-kruidenrand.
4. Naast het subsidiebedrag worden de kosten van het zaaizaad en het zaaien vergoed.
5. Alle overige kosten zijn voor rekening van de boer.

In deze opgave gaan we ervan uit dat de breedte van een akkerrand altijd 3,5 meter is.

Daan de Geus, een boer in de Hoeksche Waard, legde in 2013 bloemenranden aan over een totale lengte van 2500 meter.

a Laat zien dat het subsidiebedrag dat hij ontving hoger was dan het bedrag dat hij kwijt was aan de kosten van grondbewerking, onderhoud en management.

Hoewel het erop lijkt dat er aan een akkerrand aardig te verdienen valt, zal een boer niet op deze manier rekenen. Op de landbouwgrond waarop hij een akkerrand aanlegt, hadden immers ook gewassen kunnen groeien. De winst daarvan mist de boer. Dit heet winstderving.

Voor de nettowinst W die in 2013 in de Hoeksche Waard gemaakt werd op een gras-kruidenrand met een lengte van 100 meter geldt de formule

$W = 100 \cdot S - 0{,}035 \cdot D - 21{,}455$

In deze formule is W de nettowinst per 100 meter gras-kruidenrand, S is het subsidiebedrag per strekkende meter gras-kruidenrand en D is het bedrag aan winstderving per hectare. Alle bedragen zijn in euro.

Bas Nederlof, ook een boer in de Hoeksche Waard, heeft in 2013 een gras-kruidenrand van 2100 meter aangelegd. De winstderving was 500 euro per hectare.

b Bereken de nettowinst die hij op deze akkerrand gemaakt heeft.

Boeren leggen het liefst akkerranden aan op slechte landbouwgrond of op grond die lastig te bewerken is. Op goede landbouwgrond is de winst door het telen van een gewas namelijk vaak hoger dan de nettowinst op een akkerrand.

In 2013 leverde een gewas op goede landbouwgrond gemiddeld 1025 euro per hectare winst op. Als een boer op deze grond een akkerrand zou aanleggen, zou de winstderving dus 1025 euro per hectare zijn. Een boer kon daarom in 2013, alleen als hij een hoger subsidiebedrag per strekkende meter kreeg, zonder verlies een akkerrand op goede landbouwgrond aanleggen.

c Bereken met behulp van de formule het minimale subsidiebedrag per strekkende meter waarbij een gras-kruidenrand op goede landbouwgrond in 2013 zonder verlies kon worden aangelegd. Geef je antwoord in hele centen.

In een situatie waarin er geen nettowinst of -verlies gemaakt wordt, dus als $W = 0$, kan er uitgaande van de gegeven formule door herleiding een verband opgesteld worden tussen S en D. Dit verband heeft de vorm $S = a \cdot D + b$, waarbij a en b getallen zijn.

d Voer deze herleiding uit en geef daarbij de niet-afgeronde waarden van a en b.

bron: examen wiskunde A havo in 2017, eerste tijdvak, eerste opgave

Opgave 2: Onderzoek naar rekenvaardigheid

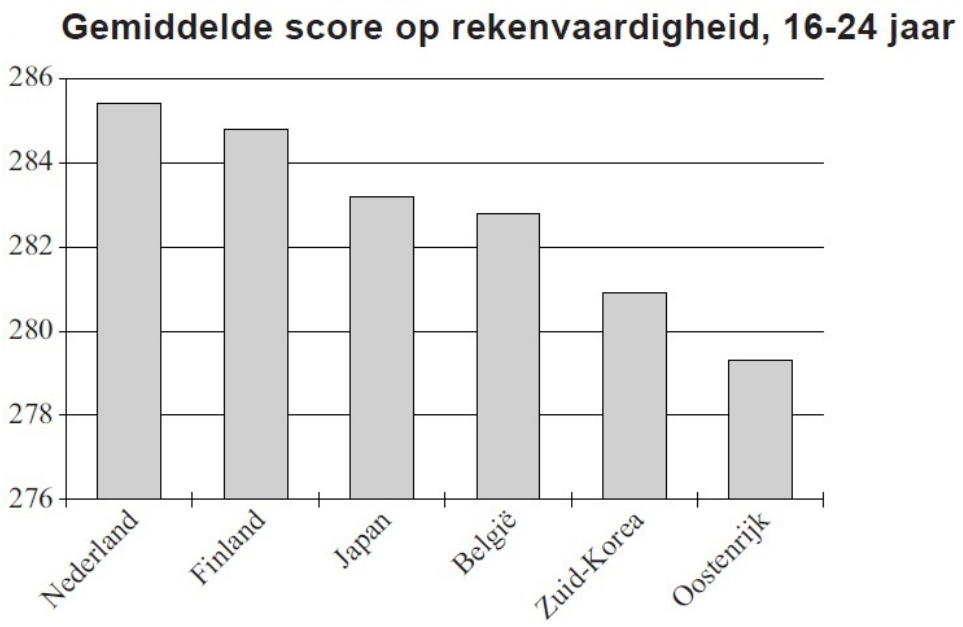
De OESO (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) publiceerde in oktober 2013 de resultaten van het onderzoek PIAAC (Programme for the International Assessment of Adult Competencies). Dit is een onderzoek naar reken-, taal- en probleemoplossingsvaardigheden in 23 landen onder ruim 5000 16- tot 65-jarigen per land.

Deze opgave gaat alleen over de score op rekenvaardigheid. Deze score heeft een schaal van 0 tot 500.

Voor ieder land is op basis van het onderzoek een schatting gemaakt voor de gemiddelde score van de gehele populatie van 16- tot 65-jarigen. In figuur 1 zie je deze gemiddelde scores per land. Nederland staat op de vierde plaats.

Figuur 1

Ook voor de deelpopulatie van 16- tot 24-jarigen zijn de gemiddelde scores per land bepaald. Nederland staat hier op de eerste plaats. In figuur 2 zie je de gemiddelde scores van de top 6. Zweden behoort niet tot de top 6.



Figuur 2

Als je de figuren 1 en 2 met elkaar vergelijkt, zijn er verschillende conclusies mogelijk. Hieronder staan twee mogelijke conclusies.

1. In Nederland scoren de 16- tot 24-jarigen gemiddeld hoger dan de 25- tot 65-jarigen.
2. In Zweden scoren de 16- tot 24-jarigen gemiddeld lager dan de 25- tot 65-jarigen.

a Leg bij elk van deze conclusies uit of deze juist is en of deze kan worden getrokken op basis van het vergelijken van de figuren 1 en 2.

In de tabel staan de percentielen van de scores van enkele deelnemende landen. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat het 75e percentiel van Australië $305{,}4$ is. Dit betekent dat 75% van de Australische deelnemers een score van $305{,}4$ of lager had.

land	gemiddelde score	standaard-afwijking	percentiel						
			5	10	25	50	75	90	95
Australië	267,6	56,6	169,3	197,7	234,7	271,9	305,4	334,3	351,6
Canada	265,5	55,5	169,2	194,2	230,8	269,8	303,9	332,4	349,3
Finland	282,2	52,2	193,6	217,4	250,8	285,8	317,3	345,0	360,8
Frankrijk	254,2	56,2	152,1	179,7	219,9	259,2	293,9	321,5	336,5
Duitsland	271,7	53,1	179,0	201,9	238,4	275,9	309,3	335,0	350,5
Italië	247,1	50,0	161,1	182,9	215,4	249,3	281,9	309,1	324,1
Japan	288,2	44,0	212,6	231,7	260,7	290,8	318,1	341,7	355,4
Nederland	280,3	51,1	188,6	214,6	251,0	285,8	315,3	339,7	354,2
Spanje	245,8	51,3	149,1	177,8	216,3	250,3	280,9	307,4	322,3
Zweden	279,1	54,9	181,7	209,9	249,2	284,0	316,0	342,8	358,4
USA	252,8	57,0	151,7	177,9	217,1	256,1	293,1	322,7	340,0
alle deelnemers van de 23 landen	268,7	51,3	178,4	202,8	237,9	272,5	303,9	330,3	345,6

Een van de onderzoekers concludeert op basis van de laatste regel van de tabel dat de score van alle deelnemers niet normaal verdeeld is.

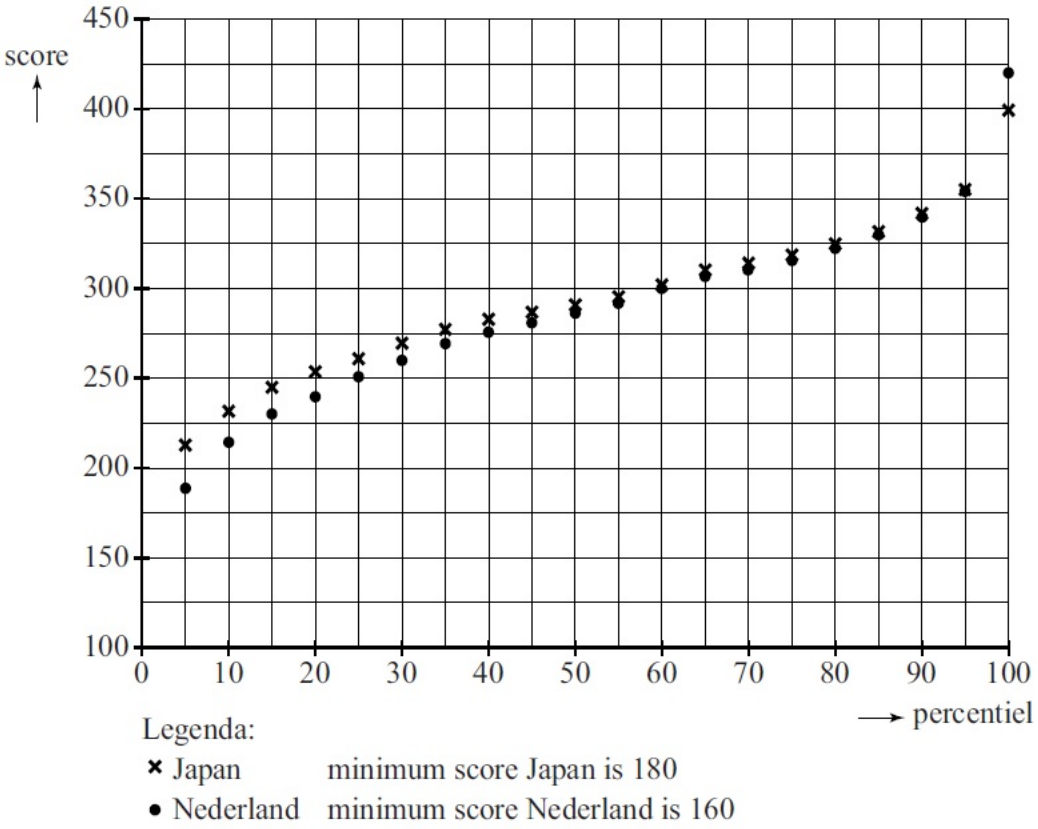
b Geef een mogelijke statistische redenering die deze onderzoeker hiervoor gebruikt kan hebben.

c Bepaal met behulp van **het formuleblad** op twee verschillende manieren of het verschil tussen de scores die behaald zijn door de Canadese deelnemers en de scores die behaald zijn door de Spaanse deelnemers groot, middelmatig of gering is.

Er zijn verschillende manieren om met behulp van de tabel de spreiding van de scores tussen landen te vergelijken.

d Kies twee verschillende spreidingsmaten en vergelijk met elk van deze maten de spreiding van de scores in Australië en Spanje.

In de volgende figuur zijn de percentielscores van Japan en Nederland in een grafiek weergegeven.



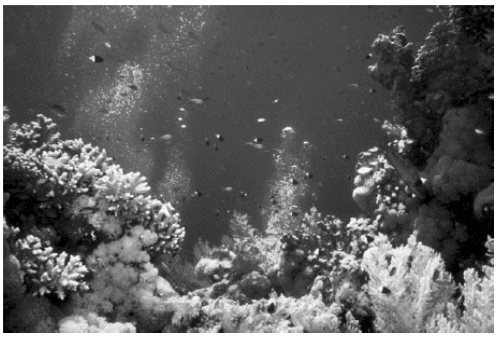
Figuur 3

De grafiek van Japan verschilt van de grafiek van Nederland.

e Beredeneer met behulp van de figuur of de spreiding van de scores in Japan groter of kleiner is dan die in Nederland.

bron: examen wiskunde A havo in 2017, eerste tijdvak, tweede opgave

Opgave 3: Great Barrier Reef



Het Great Barrier Reef voor de kust van Australië is het grootste en bekendste koraalrif ter wereld. De totale oppervlakte van het rif is 345000 km^2. Helaas is in de periode 1985-2012 veel koraal op het rif verdwenen, zo blijkt uit een Australische studie.

In 1985 was nog 97000 km^2 van het rif bedekt met koraal. In 2012 was deze oppervlakte afgenomen tot nog slechts $13{,}8\%$ van het rifoppervlak.

Je kunt berekenen dat de oppervlakte van het rif dat met koraal bedekt was in de periode 1985-2012 met ruim 50% is afgenomen.

a Bereken dit percentage in één decimaal nauwkeurig.

De onderzoekers waarschuwden in 2012 dat er nog meer koraal zou verdwijnen. Zij verwachtten dat als er niet zou worden ingegrepen, de oppervlakte van het rif dat met koraal bedekt is in de periode 2012-2022 opnieuw zou halveren.

Neem aan dat deze afname vanaf 2012 exponentieel zou zijn.

b Bereken met hoeveel procent de oppervlakte van het rif dat met koraal bedekt is dan jaarlijks zou afnemen. Geef je antwoord in hele procenten.

De belangrijkste bedreigingen voor het koraal komen van tropische stormen en de doornenkroon, een grote zeester. Als er geen doornenkronen zouden zijn en als we aannemen dat de schade door tropische stormen ongeveer gelijk blijft, zou het aantal km^2 rif dat met koraal bedekt is met $0{,}89\%$ per jaar kunnen toenemen.

c Bereken hoeveel jaar het dan zou duren totdat het aantal km^2 rif dat met koraal bedekt is, voor het eerst weer met 50% zou zijn toegenomen.

bron: examen wiskunde A havo in 2017, eerste tijdvak, derde opgave

Opgave 4: Studieschuld

Studeren kost geld. In het verleden gaf de overheid daarom aan de meeste studenten financiële ondersteuning in de vorm van een beurs. Studenten met een beurs kregen elke maand een bepaald geldbedrag op hun bankrekening gestort.

Een student die tussen 1996 en 2014 begon met studeren, kreeg de zogenoemde prestatiebeurs, een beurs in de vorm van een lening waarover rente berekend werd. Door het ontvangen van de prestatiebeurs bouwde een student dus een studieschuld op. Deze studieschuld werd echter kwijtgescholden als de student binnen 10 jaar een diploma haalde. Een student die het diploma niet op tijd haalde of stopte met studeren, moest zijn studieschuld, inclusief alle rente, terugbetalen.

In 2012 bedroeg de prestatiebeurs voor een uitwonende student € 266,23 per maand. Daarover werd elke maand rente berekend, zodanig dat het jaarlijkse rentepercentage $1{,}39\%$ was.

a Bereken het maandelijkse rentepercentage in drie decimalen nauwkeurig.

In deze opgave gaan we ervan uit dat het geldbedrag per maand en het jaarlijkse rentepercentage door de jaren heen niet veranderen. Andries begon in september 2012 met zijn studie en kon studeren met een prestatiebeurs. Hij kreeg die maand voor de eerste keer € 266,23 op zijn bankrekening gestort.

Om te berekenen hoe hoog zijn studieschuld S in euro in de loop van de tijd was geworden, gebruikte Andries de formule:

$S = -231299{,}46 + 231565{,}69 \cdot 1{,}001151^t$

Hierin is t het aantal maanden na de ontvangst van de eerste storting.

b Bereken in welke maand van welk jaar de studieschuld van Andries voor het eerst hoger was dan € 5000,-.

Als een student binnen 10 jaar geen diploma haalde, moest hij de opgebouwde studieschuld, inclusief rente, terugbetalen. Het was verplicht elke maand een bedrag van minstens € 45,41 terug te betalen. De schuld die dan na elke maandelijkse terugbetaling overbleef, werd de restschuld genoemd. De restschuld werd dus elke maand lager.

Op de **uitwerkbijlage** staat een tabel met daarin de restschulden bij een maandelijkse terugbetaling van € 45,41 voor verschillende studieschulden en verschillende maanden na de eerste terugbetaling.

Maaike had een studieschuld. Ze betaalde € 45,41 per maand terug. Ze had er meer dan 11 jaar, maar minder dan 12 jaar voor nodig om de totale studieschuld terug te betalen.

c Bepaal met de tabel een mogelijke waarde van haar studieschuld.

Door omstandigheden moest Andries zijn studie voortijdig afbreken. Hij had toen een studieschuld opgebouwd van € 6200,- die hij helemaal moest terugbetalen. Hij begon in september 2014 met het terugbetalen van de verplichte € 45,41 per maand.

d Bereken met behulp van lineair interpoleren hoe groot de restschuld van Andries 60 maanden na de eerste terugbetaling is.

bron: examen wiskunde A havo in 2017, eerste tijdvak, vierde opgave

Opgave 5: Papierformaten

Het bekendste papierformaat is het A4'tje, een vel papier dat in grote delen van de wereld als standaardpapierformaat gebruikt wordt. Het A4'tje komt uit een serie die begint met A0, een vel papier met een oppervlakte van precies 1 m^2. Van elk volgend formaat in de A-serie is de oppervlakte telkens tweemaal zo klein. In de praktijk zijn voornamelijk de formaten A0 tot en met A11 in gebruik.

De afmetingen van de eerste vijf formaten staan in de tabel. Hierin zijn de hoogte en breedte afgerond op hele cm.

formaat	formaat-nummer n	oppervlakte(mm^2)	hoogte h(cm)	breedte b(cm)
A0	0	1000000	119	84
A1	1	500000	84	59
A2	2	250000	59	42
A3	3	125000	42	30
A4	0	62500	30	21

Een formaat dat vaak gebruikt wordt voor postzegels is het A11-formaat.

a Bereken de oppervlakte van een A11-postzegel in hele mm^2.

Voor de hoogte h en voor de breedte b van een vel papier in de A-serie geldt:

$h = \sqrt{2} \cdot b$

In de tabel zijn zowel de hoogte als de breedte in hele cm gegeven. Maar met de bovenstaande formule kunnen bij een gegeven oppervlakte de hoogte en de breedte nauwkeuriger berekend worden. Er geldt:

$h \cdot b = \textit{oppervlakte}$

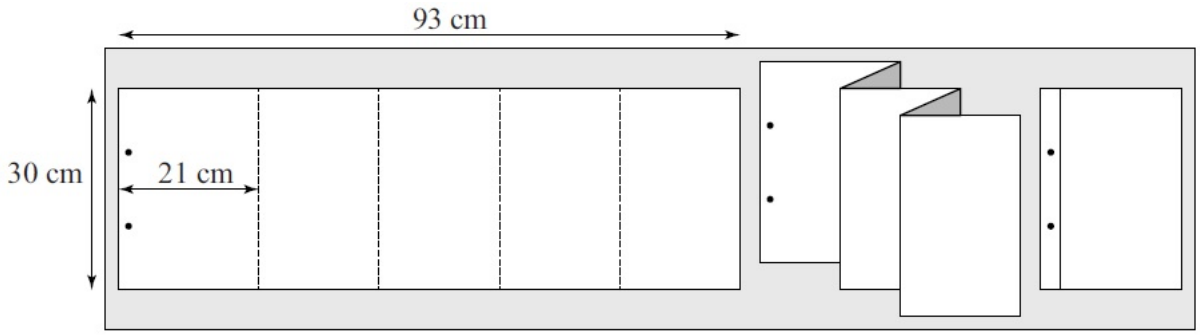
De oppervlakte van een vel A6-papier is 15625 mm^2.

b Bereken met de bovenstaande formules de hoogte en de breedte van een vel A6-papier. Rond je antwoorden af op hele mm.

In theorie bestaat er een exponentieel verband tussen de hoogte h van een vel papier in de A-serie en het formaatnummer n. Door de afronding van h kunnen er kleine afwijkingen zijn.

c Toon met behulp van alle waarden van h uit de tabel aan dat er bij benadering een exponentieel verband bestaat tussen de hoogte h van een vel papier in de A-serie en het formaatnummer n.

Technisch tekenaars gebruiken papier uit de Z-serie. De hoogte van een vel uit de Z-serie is altijd gelijk aan 30 cm. Een vel Z1-papier, met formaatnummer 1, is gelijk aan een A4'tje. Bij elk volgend formaat in de Z-serie wordt de breedte telkens met een vast aantal cm vermeerderd. Dit vaste aantal cm is kleiner dan 21 cm en is zo gekozen dat een vel papier uit de Z-serie zigzag gevouwen in een ordner voor A4-papier past. In de figuur is een voorbeeld gegeven van technisch tekenpapier in Z5-formaat. Het vel Z5-papier, met formaatnummer $n = 5$, heeft een breedte van 93 cm.



d Bereken de breedte van Z6-papier.

Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van een vel papier uit de Z-serie met formaatnummer n.

Deze formule is te schrijven in de vorm $O = a \cdot n + b$.

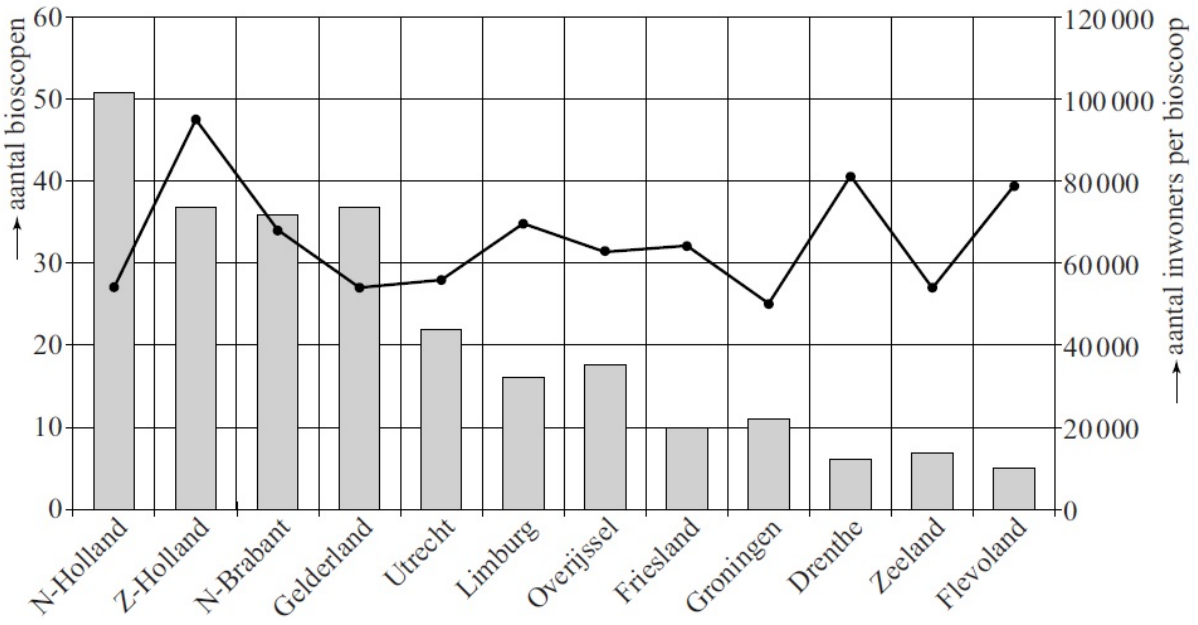
Hierin is O de oppervlakte in cm^2 en zijn a en b getallen.

e Bereken de waarden van a en b.

bron: examen wiskunde A havo in 2017, eerste tijdvak, vijfde opgave

Opgave 6: Bioscoopbezoek

In de figuur staan gegevens over bioscopen in Nederland in 2012.



Het staafdiagram geeft het aantal bioscopen per provincie weer (linker verticale as). Het lijndiagram toont het aantal inwoners per bioscoop uitgesplitst per provincie (rechter verticale as).

In de tabel staat per provincie het aantal bioscoopbezoeken in 2012.

provincie	bezoeken		provincie	bezoeken		provincie	bezoeken
N-Holland	7532000		Utrecht	2009000		Friesland	625000
Z-Holland	7298000		Overijssel	1663000		Flevoland	525000
N-Brabant	4366000		Limburg	1662000		Drenthe	519000
Gelderland	2695000		Groningen	1180000		Zeeland	486000

Kees beweert: “In de provincie met de meeste bioscopen per inwoner is het gemiddeld aantal bioscoopbezoeken per inwoner meer dan 2.”

Onderzoek over welke provincie Kees het heeft en bereken voor deze provincie of hij gelijk heeft.

bron: examen wiskunde A havo in 2017, eerste tijdvak, zesde opgave

Antwoorden

1 Rekenen en algebra

V1 De formule van de oppervlakte van de dwarsdoorsnede van het kanaal is $A = b \cdot h$.

De formule wordt nu dus $b \cdot h = \frac{\text{debiet}}{1{,}28}$.

Schrijf om naar $h = \frac{\text{debiet}}{1{,}28 \cdot b}$.

Vul in met debiet $= 2{,}31$ en $b = 1{,}2$. Dit geeft $h = 1{,}5$.
Dus de hoogte van de rand van de geul boven op het aquaduct is $1{,}5$ meter.

1 a $\frac{5}{2} \cdot 5 - 3 = 2\frac{1}{2} \cdot 5 - 3 = 12\frac{1}{2} - 3 = 9\frac{1}{2}$

b $8 - 3(14 - 4) = 8 - 3 \cdot 10 = 8 - 30 = -22$

c $\frac{9-4}{6} \cdot 12 + 2 + 2 \cdot 4 = \frac{5}{6} \cdot 12 + 2 + 2 \cdot 4 = 10 + 2 + 8 = 20$

d $-7(3 - 2) + 4 \cdot 2 = -7 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = -7 + 8 = 1$

e $\sqrt{16 + 9} \cdot \sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{16} + \sqrt{9} = 5 \cdot 4 + 3 = 20 + 3 = 23$

f $3^2 - \frac{2^3}{4} = 9 - \frac{8}{4} = 9 - 2 = 7$

2 a $2 + 3^2 - 3 \cdot 6 - 2 = 2 + 9 - 18 - 2 = -9$

b $(2 + 3)^2 - 3 \cdot 6 - 2 = 5^2 - 3 \cdot 6 - 2 = 25 - 18 - 2 = 5$

c $2 + 3^2 - 3 \cdot (6 - 2) = 2 + 9 - 3 \cdot 4 = 2 + 9 - 12 = -1$

d $2 - 3^2 - (3 \cdot 6) - 2 = 2 - 9 - 18 - 2 = -27$

3 50 µm $= 0{,}05$ mm $= 0{,}05 \times 0{,}001 = 0{,}00005$ m.

Het aantal haren is $\frac{1}{0{,}00005} = 20000$ haren.

4 a De afstand in 1 uur $= 3600$ seconden is $3600 \times 400 = 1440000$ meter $= 1440$ km.

De snelheid is 1440 km/h.

b De tijd is $\frac{1 \cdot 150}{400} = 0{,}375$ seconden.

5 $1{,}5$ liter is $1{,}5$ dm^3.

80 µm $= 0{,}08$ mm $= 0{,}08 \times 0{,}001 = 0{,}00008$ m $= 0{,}0008$ dm.

De oppervlakte die kan worden geverfd is $\frac{1{,}5}{0{,}0008} = 1875$ dm^2 en dat is $18{,}75$ m^2.

6 a $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$

$1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4} = \frac{5}{3} + \frac{13}{4} = \frac{20}{12} + \frac{39}{12} = \frac{59}{12} = 4\frac{11}{12}$

b $\frac{3}{8} - \frac{7}{12} = \frac{9}{24} - \frac{14}{24} = -\frac{5}{24}$

$3\frac{3}{8} - 2\frac{7}{12} = \frac{27}{8} - \frac{31}{12} = \frac{81}{24} - \frac{62}{24} = \frac{19}{24}$

c $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{14}{5} = \frac{98}{10} = \frac{49}{5} = 9\frac{4}{5}$

d $\frac{4}{9} \Big/ \frac{3}{8} = \frac{32}{72} \Big/ \frac{27}{72} = \frac{32}{27} = 1\frac{5}{27}$

$1\frac{4}{9} \Big/ 2\frac{3}{8} = \frac{13}{9} \Big/ \frac{19}{8} = \frac{104}{72} \Big/ \frac{133}{72} = \frac{104}{133}$

7 a $0{,}778$

b $0{,}013$

c $0{,}12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$

d $0{,}545 = \frac{545}{1000} = \frac{109}{200}$

8 Het deel dat bestelt is 19 miljoen, het geheel 960 miljoen.

Dus het $\frac{19}{960}$ deel bestelt.

Dit is $0{,}01979... \approx 0{,}020$.

9 a $\frac{14}{312} \approx \frac{4{,}49}{100}$ dus 4,49%.

b $\frac{5}{11} \approx 45{,}5\%$.

c Absolute korting is -25 euro (afname).

Relatieve korting is $\frac{85-110}{110} \approx -22{,}7\%$.

d 20% van 40 is $40 \cdot 0{,}20 = 8$.
15% van 48 is $48 \cdot 0{,}15 = 7{,}2$.
Dus 20% van 40 is meer.

e $88 \cdot 0{,}85 = 74{,}80$ euro.

f $x \cdot 0{,}72 = 1367$ betekent $x = \frac{1367}{0{,}72} = 1899$ euro.

10 In 2016 was de omzet 916 miljoen en de winst 77 miljoen.
916 miljoen is 25% meer dan de omzet in 2015.

De omzet in 2015 was $\frac{916}{1{,}25} \approx 732$ miljoen.

77 miljoen is 3× de winst van 2015 dus $\frac{77}{3} \approx 26$ miljoen.

De omzet steeg absoluut $916 - 732 = 183$ miljoen en de winst $77 - 26 = 51$ miljoen.
De omzet steeg relatief 25% en de winst 200%.
De winst steeg relatief meer en de omzet steeg absoluut meer.

11 a $3a + 4b - a = 3a - a + 4b = 2a + 4b$

b $5 \cdot a + 6 \cdot b - 3 \cdot a - b = 5a - 3a + 6b - b = 2a + 5b$

c $4a \cdot a - 3a + 5a - a^2 = 4a^2 - a^2 - 3a + 5a = 3a^2 + 2a$

d $8x^2 - 5x^2 + 2x \cdot x = 8x^2 - 5x^2 + 2x^2 = 5x^2$

e $\frac{1}{2}x \cdot x + 6x - 2x^2 - 3\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2 - 2x^2 + 6x - 3\frac{1}{2}x = -1\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x$

f $(a+b)^2 - a^2 - b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = a^2 - a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = 2ab$

12 a $2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}$

b $b + \sqrt{b}$

c $\frac{a^6}{a^2} + \left(a^2\right)^2 + a \cdot a^3 = a^4 + a^4 + a^4 = 3a^4$

d $3a^4 + \left(2a^2\right)^2 + 4a \cdot 2a^3 = 3a^4 + 4a^4 + 8a^4 = 15a^4$

e $6a \cdot \frac{2a}{4a} - 2(a-1) = 6a \cdot \frac{1}{2} - 2a + 2 = 3a - 2a + 2 = a + 2$

f $(6\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{a}) : (4a - 2a) - 1 = 6 - 1 = 5$

13 a Er wordt p% BTW in rekening gebracht. De vermenigvuldigingsfactor is dan $\frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$. Bovendien wordt er nog 10 euro bij opgeteld voor verzendkosten.

Het factuurbedrag bedraagt: $880 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 10$.

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 880 \cdot \left(1 + \tfrac{p}{100}\right) + 10 &= 942{,}80 \\ 880 + 8{,}8p + 10 &= 942{,}80 \\ 890 + 8{,}8p &= 942{,}80 \\ 8{,}8p &= 52{,}80 \\ p &= 6\% \end{aligned}$$

14 a $R = p \cdot q = p \cdot (300 - 0{,}25p) = 300p - 0{,}25p^2$

b $W = R - K = 300p - 0{,}25p^2 - (750 + 0{,}6(300 - 0{,}25p))$

$W = 300p - 0{,}25p^2 - 750 - 180 + 0{,}15p = -0{,}25p^2 + 300{,}15p - 930$

15 $80 = E + T$ kun je schrijven als $E = 80 - T$.

$E = 80 - T$ invullen in de andere formule geeft $100 = 80 - T + 2T = 80 + T$.
Dus $T = 20$. Piet heeft 20 munten van € 2,00.

16 a In 2015 zijn er 58 miljoen passagiers.
Gegeven is dat die 58 miljoen 6% meer is dan in 2014, dus 106%.

In 2014 dus $\frac{58}{106} \cdot 100 \approx 54{,}7$ miljoen passagiers.

b De omzet in 2015 is 1,42 miljard.
Gegeven is dat die 1,42 miljard 1% minder is dan in 2014, dus 99%.

Dus in 2014 een omzet van $\frac{1{,}42}{99} \cdot 100 \approx 1{,}43$ miljard.

c De winst in 2015 is 374 miljoen.

Gegeven is dat die 374 miljoen $\frac{1}{3}$ meer is dan in 2014, dus $\frac{4}{3}$.

De netto winst in 2014 is dus $\frac{374}{4} \cdot 3 = 280{,}5$ miljoen.

17 a De noemer van V is 50, want 50% van de mannen is kleiner dan hijzelf. Om V zo groot mogelijk te maken, moet de teller zo groot mogelijk zijn.

De teller van V kan maximaal (vrijwel) 100 zijn. In dat geval is $V_{\max} = \frac{100}{50} = 2$.

b Kies bijvoorbeeld een man met een lengte van 1,887 m en een gewicht van 90,8 kg.

Voor deze man geldt dat zijn zijn BMI gelijk is aan $BMI = \frac{90{,}8}{1{,}887^2} \approx 25{,}5$. Dit is meer dan 23,9 en dus is het niet waar.

18 Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{G}{S-7} \cdot 2{,}5 \\ \tfrac{B}{2{,}5} &= \tfrac{G}{S-7} \\ 0{,}4B &= \tfrac{G}{S-7} \\ 0{,}4B \cdot (S-7) &= G \end{aligned}$$

19 a $1568 \cdot 0{,}25 = 392$ imkers.

b $\frac{32000}{1700} \approx 18{,}8 \approx 19$ volkeren per imker.

20 a 1:07,02 is $67{,}02$ seconden.

$\frac{3600 \cdot 1000}{67{,}02} \approx 53715$ meter. De snelheid is dus ongeveer $53{,}7$ km/h.

b 1:06,42 is $66{,}42$ seconden.

$\frac{3600 \cdot 1000}{66{,}42} \approx 54200$ meter. De snelheid van Shani Davis is $54{,}2$ km/h.

Dus moet Kjeld nog $54{,}2 - 53{,}7 = 0{,}5$ km/h harder schaatsen.

21 a $L + I = 647$ en $5L + 7I = 3407$

b $L + I = 647$ geeft $L = 647 - I$.

Dit substitueren in de tweede formule geeft $5(647 - I) + 7I = 3407$.

Hieruit volgt $I = 172$, dus het aantal introducés is 172.

22 a $P = \frac{3{,}93^n}{n!} \cdot 2{,}7183^{-3{,}93}$

Dit geeft (ongeveer) $P = \frac{3{,}93^n}{n!} \cdot 0{,}0196$, dus $P = 0{,}0196 \cdot \frac{3{,}93^n}{n!}$.

b De kans op respectievelijk drie of vier vliegtuigongelukken is

$P = 0{,}0196 \cdot \frac{3{,}93^3}{3!}$ en $P = 0{,}0196 \cdot \frac{3{,}93^4}{4!}$.

Deze kansen zijn respectievelijk ongeveer $0{,}1983$ en $0{,}1948$

De kansen moeten bij elkaar worden opgeteld.

Het antwoord: $0{,}39$ (of 39%) (of nauwkeuriger).

2 Lineaire verbanden

V1 De formule is $v = 10 + \frac{2}{3}z$.
De veilige snelheid in omstandigheden met mist bij een zichtafstand van 100 meter is iets minder dan $10 + \frac{2}{3} \cdot 100 \approx 76{,}7$ km/h.

1 a Algemene formule: $y = a \cdot x$.
Gegeven punt invullen: $12 = a \cdot 4$ geeft $a = 3$. Dus: $y = 3x$.

b Punt invullen geeft: $18 = 3p$ dus $p = 6$.

2 a $K = 1{,}16 \cdot a + 55$

b Vanwege het vastrecht van 55 euro gaat de grafiek niet door $(0,0)$.

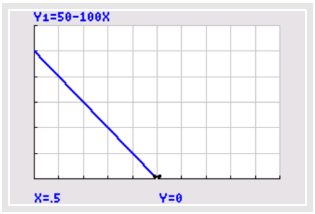
c Elke m^3 die je extra verbruikt kost ook 1,16 euro meer.

d $1{,}16 \cdot a + 55 = 0$ geeft $1{,}16a = -55$ en $a \approx -47{,}41$.
Omdat dit een negatief getal is, heeft het hier geen betekenis. Maar het snijpunt zou $(-47{,}41; 0)$ zijn.

e $1{,}16 \cdot a + 55 = 320$ geeft $1{,}16a = 265$ en $a \approx 228{,}45$ m^3.

3 a Er is sprake van een constante afname.

b $A = 50 - 100t$
GR: $y_1 = 50 - 100x$ met venster $0 \le x \le 1$ en $0 \le y \le 60$.



c De automobilist is in Amsterdam wanneer de afstand 0 km is, dus $0 = 50 - 100t$.
Dit geeft $t = \frac{1}{2}$.

d $A = 15$ geeft $15 = 50 - 100t$ en dus $t = 0{,}35$ uur. Dat is vanaf 21 minuten.

4 In 18 jaar is de toename $2980 - 1078 = 1902$.
Per jaar is de toename dan $a = \frac{1902}{18}$. Het antwoord afgerond op één decimaal is $a = 105{,}7$.

5 a Per 100 km wordt 12 kWh verbruikt in de stad, dat is 0,12 kWh per km.
Dus $V = 17{,}6 - 0{,}12k$.

b $V = 17{,}6 - 0{,}12k = 0$ geeft $k = \frac{17{,}6}{0{,}12} \approx 146{,}7$ km.

6 a $rc = \frac{\Delta K}{\Delta a} = \frac{50-30}{40-10} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ dus $K \approx 0{,}667a + b$.
Bijvoorbeeld $P(10{,}30)$ invullen geeft dus $30 \approx 0{,}667 \cdot 10 + b$ en $b \approx 23{,}33$.
In twee decimalen nauwkeurig: $K = 0{,}67a + 23{,}33$.

b $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3--3}{4-2} = 3$ dus $y = 3x + b$.
$A(2,-3)$ invullen geeft $-3 = 3 \cdot 2 + b$ en $b = -9$, dus $y = 3x - 9$.

7 Vergelijkingen opstellen geeft $k: y = 3x + 3$ en $l: y = 4x - 1$.

Snijpunt:

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= 4x - 1 \\ -x &= -4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Invullen geeft: $y = 3 \cdot 4 + 3 = 15$, dus $(4,15)$.

8 a Degene die het minst snel gaat is het eerst vertrokken, dus Piet.

b De formule die bij de rode lijn hoort is: $A = \frac{2}{3}t - 4$.

De formule die bij de blauwe lijn hoort is: $A = \frac{1}{5}t$.

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}t - 4 &= \tfrac{1}{5}t \\ 10t - 60 &= 3t \\ 7t &= 60 \\ t &= 8\tfrac{4}{7} \end{aligned}$$

Invullen geeft: $A = 1\frac{5}{7}$, dus $\left(8\frac{4}{7}, 1\frac{5}{7}\right)$.

c Het snijpunt is het moment dat Piet wordt ingehaald door Jan. Beide zijn dan even ver van huis, namelijk $1\frac{5}{7}$ km.

9 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 7x - 2 &= 2 \\ 7x &= 4 \\ x &= \tfrac{4}{7} \end{aligned}$$

Met de grafische rekenmachine zie je dat $7x - 2 \leq 2$, als $x \leq \frac{4}{7}$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} -2x + 2 &= -3x + 6 \\ x + 2 &= 6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Met de grafische rekenmachine zie je dat $-2x + 2 < -3x + 6$ als $x < 4$.

10 a $K = 4800 + 0{,}2a$

b $O = 1{,}8a$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} O &> K \\ 1{,}8a &= 4800 + 0{,}2a \\ 1{,}6a &= 4800 \\ a &= 3000 \end{aligned}$$

Met de grafische rekenmachine vind je dat er meer dan 3000 kilometer per maand gereden moet worden.

11 a Zie de tabel.

jaar	2010	2013	2014
aantal klanten	3341		4612

Het verschil tussen de jaren 2010 en 2014 is 4.
In deze 4 jaar is er een toename van $4612 - 3341 = 1271$ klanten.
In 3 jaar (vanaf 2010) zou dat $\frac{3}{4}$ deel zijn, dus $\frac{3}{4} \cdot 1271 \approx 953$.
Door lineair interpoleren blijkt dat er in 2013 ongeveer $3341 + 953 = 4294$ klanten waren.

b Zie de tabel.

jaar	2014	2016	2020
aantal klanten	4612	4238	

Het verschil tussen de jaren 2014 en 2016 is 2.
In deze 2 jaar is er een toename van $4238 - 4612 = -374$ klanten (dus een afname).
In 4 jaar (vanaf 2016) zou dat $\frac{4}{2}$ deel zijn, dus $\frac{4}{2} \cdot -374 = -748$.
Door lineair extrapoleren blijkt dat er in 2020 ongeveer $4238 - 1122 = 3490$ klanten zullen zijn.

12 Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ 3y &= -2x + 12 \\ y &= -\tfrac{2}{3}x + 4 \end{aligned}$$

13 a Snijpunt x-as, dus $y = 0$ geeft $3x = 6$ en $x = 2$.
Snijpunt $(2,0)$.

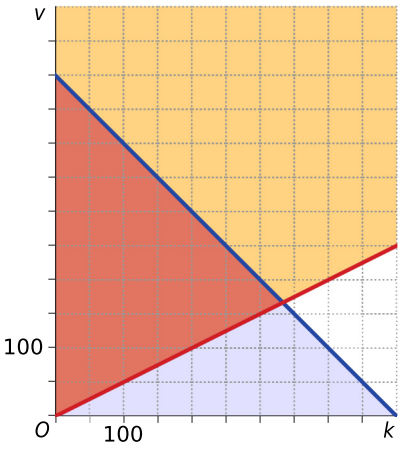
b Snijpunt y-as, dus $x = 0$ geeft $-2y = 6$ en $y = -3$.
Snijpunt $(0,-3)$.

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ -2y &= -3x + 6 \\ y &= 1\tfrac{1}{2}x - 3 \end{aligned}$$

14 a Het aantal kinderen plus volwassenen mag maximaal 400 zijn en het aantal kinderen mag maximaal 2 keer het aantal volwassenen zijn.

b Grenslijnen $k + v = 400$ en ook $k = 2v$.



c In het snijpunt van de grenslijnen is het aantal kinderen maximaal.

$k = -v + 400$ en $k = 2v$ geeft $2v = -v + 400$ geeft $v = \frac{400}{3} \approx 133$.

Er kunnen dus maximaal 266 kinderen zijn.

15 a $8f + 25m \leq 16000$.

b $f = 520$ geeft $8 \cdot 520 + 25m \leq 16000$ ofwel $25m \leq 11840$ en dus $m \leq 473{,}6$. Dat betekent maximaal 473 minuten filmen.

16 a $E_b = 33{,}6 \cdot G = 5000$ geeft $G \approx 149$ kg.

Hij zou dan $149 - 85 = 64$ kg meer wegen.

b Substitueer $E_b = 33{,}6 \cdot G$ in de formule $T = 0{,}000128 \cdot (5000 - E_b)$.
Je krijgt $T = 0{,}000128 \cdot (5000 - 33{,}6 \cdot G) \approx -0{,}004G + 0{,}64$. Dus $a = -0{,}004$ (of nauwkeuriger) en $b = 0{,}64$.

c De energiebehoefte van een man van 85 kg is $E_b = 33{,}6 \cdot 85 = 2856$ kcal.
Zijn energieoverschot is 5000–2856 = 2144 kcal.

Dit komt overeen met een gewichtstoename van $\frac{2144}{7800} \approx 275$ g.

d Elke dag heeft de man een overschot van $5000 - 2856$ kcal. Voor t dagen bedraagt dit overschot $t \cdot (5000 - 2856)$.

Dit moet groter zijn dan 7800 kcal: $t \cdot (5000 - 2856) > 7800$.

Eerst los je de vergelijking op:

$$\begin{aligned} t \cdot (5000 - 2856) &= 7800 \\ 2144 \cdot t &= 7800 \\ t &= \frac{7800}{2144} = 3{,}638... \end{aligned}$$

Met de grafische rekenmachine zie je dat het na 3,6 dagen is.

17 a Een formule voor 2006 is $B_{2006} = 1{,}24x + 47{,}52$.
Een formule voor 2007 is $B_{2007} = 1{,}10x + 52{,}80$.
Hierin is een verlaging van het tarief per m^3 met € 0,14 zichtbaar.
Los de vergelijking $B_{2006} = B_{2007}$ op. Invullen geeft:

$$\begin{aligned} 1{,}24x + 47{,}52 &= 1{,}10x + 52{,}80 \\ 0{,}14x &= 5{,}28 \\ x &= 37{,}7 \end{aligned}$$

Vanaf (ongeveer) 38 m^3.

b Er geldt: $B_{2007} = 1{,}10x + 52{,}80$.

Dus $B_{2007} = 180 \cdot 1{,}10 + 52{,}80 = 250{,}80$ euro.
Belasting en gemeentelijke belasting $180 \cdot 0{,}149 + 36{,}10 = 62{,}92$ euro.
Dit geeft een totaal van 313,72 euro.
De btw dient over dit bedrag betaald te worden. De uiteindelijke kosten bedragen dan $313{,}72 \cdot 1{,}06 \approx 332{,}54$ euro.

c Lees twee geschikte punten zo nauwkeurig mogelijk af.
Neem bijvoorbeeld de punten $(0; 1{,}0)$ en $(6; 2{,}4)$.

De richtingscoëfficiënt is: $a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2{,}4-1{,}0}{6-0} \approx 0{,}2$.

De formule wordt dan $V = 0{,}2 \cdot t + 1{,}0$.
Dus $a = 0$ en $b = 1{,}0$.

18 Vul in $L = 80$.

$$\begin{aligned} C &= 10 - (80 - S)\tfrac{9}{80} \cdot 2 \\ C &= -8 + \tfrac{9}{40}S \\ 40C &= -320 + 9S \\ -9S + 40C &= -320 \end{aligned}$$

19 a In 2020 keert de gierzwaluw $\frac{40}{10} \cdot 3 = 12$ dagen eerder terug.
Het antwoord: 20 april (2020).

b De richtingscoëfficiënt is: $-\frac{3}{10}$.

De formule: $A = 122 - \frac{3}{10}t$.

c Elke 10 jaar wordt de verblijfsduur $3 - 0{,}6 = 2{,}4$ dagen langer.

De verblijfsduur is 15 langer over $\frac{15}{2{,}4} = 6{,}25$ perioden van 10 jaar.

Dat is $62{,}5$ jaren na 1980, dus in 2043.

20 a De trendlijn gaat bijvoorbeeld $(20{,}93)$ en $(70{,}30)$.

Richtingscoëfficiënt: $a = \frac{30-93}{70-20} = -1{,}26$.

De waarde van b vind je door een punt in $P = -1{,}26l + b$ in te vullen.
Dit leidt tot: $b = 118$ (of nauwkeuriger).
De formule wordt: $P = -1{,}3 \cdot l + 118$ (of nauwkeuriger).

b Voor 17-jarigen kun je twee percentages aflezen: 75 en 97.
Volgens de trendlijn zou $100 - 97 = 3\%$ van de 17-jarigen in het grijze gebied zitten of serieuze verstaproblemen hebben, in werkelijkheid is dat $100 - 75 = 25\%$.

Het antwoord: $\frac{25}{3} \approx 8$.

21 a In 19 jaar is de gemiddelde lengte met $3{,}1$ cm toegenomen.

In 50 jaar neemt de gemiddelde lengte toe met $\frac{3{,}1}{19} \cdot 50 (\approx 8{,}2)$ cm.

Het antwoord: $180{,}4 + 8{,}2 = 188{,}6$ cm (of nauwkeuriger).

b Lees de punten $(0; 165{,}9)$ en $(19; 167{,}7)$ af.

De richtingscoëfficiënt is: $a = \frac{167{,}7-165{,}9}{19} \approx 0{,}1$.

De waarde van b kun je berekenen door een van de twee punten in te vullen.
Je vindt: $l = 0{,}1t + 165{,}9$ (of nauwkeuriger).

3 Exponentiële verbanden

V1 De groeifactor per jaar is: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5736}} = 0{,}9998791657$.

In het jaar dat je wilt vinden was 100% koolstof-14 aanwezig.
Hiermee kun je de groeiformule bepalen: $f(t) = 100 \cdot 0{,}9998791657^t$.
Los op: $73{,}6 = 100 \cdot 0{,}9998791657^t$ Met de GR: $x \approx 2537$, dus het skelet is 2537 jaar oud is en dateert uit 523 v.Chr.

1 Zie de tabel.

percentage	-5	0,5	5	500	-84	-40	60	1500
groeifactor	0,95	1,005	1,05	5	0,16	0,6	1,6	16

2 a Eerste kwartier: $g = \frac{75}{68} \approx 1{,}103$. De volgende drie kwartieren: $g = \left(\frac{102}{75}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}107$.
Omdat in beide periodes de groeifactor ongeveer gelijk is, is er sprake van een exponentieel verband met groeifactor $\approx 1{,}10$ per kwartier.

b De groeifactor per uur ligt tussen $1{,}103^4 \approx 1{,}48$ en $1{,}107^4 \approx 1{,}50$, neem $1{,}50$.
Formule: $A = 68 \cdot 1{,}50^t$.

c $102 \cdot 1{,}5 \approx 153$

d $68 \cdot 1{,}5^{24} \approx 1144720$ dus ruim 1,14 miljoen.

3 a 13500 is de beginwaarde, het aantal inwoners in 2010.

b De groeifactor per jaar is $1{,}05$, dus 5%.

c Begin 2016 waren er $13500 \cdot 1{,}05^6 \approx 18091$ inwoners.
Eind 2016 waren er $13500 \cdot 1{,}05^7 \approx 18996$ inwoners.
Er komen $18996 - 18091 = 905$ inwoners bij.

d Tabel op GR: $13500 \cdot 1{,}05^5 = 17230$, $13500 \cdot 1{,}05^6 = 18091$, dus in het jaar 2015.
Of, bepaal met je GR het snijpunt van $y_1 = 13500 \cdot 1{,}05^x$ en $y_2 = 17500$. Je vindt $x \approx 5{,}32$ en dat is in 2015.

4 $g^{7 \cdot 24} = g^{168} = 0{,}173$, dus $g = (0{,}173)^{\frac{1}{168}} \approx 0{,}9896$.
Dat is $100 - 98{,}96 = 1{,}04\%$ verval per uur.

5 De groeifactor per uur is $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}41$.
Neem $t = 0$ om 10:00 uur, dan past hierbij de formule $A = 64 \cdot 1{,}41^t$, waarbij $t = -3$ hoort bij 7:00 uur en $t = 2$ bij 12:00 uur.
GR: $y_1 = 64 \cdot 1{,}41^x$ met $-3 \le x \le 2$ en $0 \le y \le 128$.

6 a Formule van de vorm $y = b \cdot g^x$.
Aflezen bij $x = 0$ geeft het punt $(0{,}15)$, dus $b = 15$.
Om zo precies mogelijk te zijn, kies je als tweede punt $(3; 25{,}92)$.
De groeifactor is: $g = \left(\frac{25{,}92}{15}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{,}2$.
Formule: $y = 15 \cdot 1{,}2^x$.

b GR: $y_1 = 15 \cdot 1{,}2^x$ en $y_2 = 50$ met $0 \le x \le 10$ en $0 \le y \le 60$.
Snijpunt bij $x \approx 6{,}60$, dus oplossing $x > 6{,}60$.

7 a Twee tabletten ingenomen: op $t = 0$ zit er 1000 mg Paracetamol in het bloed.
Een afname van 0,2% is een factor 0,998 per minuut, dit is $0{,}998^{60} = 0{,}887$ per uur.
Formule: $P = 1000 \cdot 0{,}887^t$.

b GR: $y_1 = 1000 \cdot 0{,}887^x$ en $y_2 = 100$ met $0 \le x \le 20$ en $0 \le y \le 200$.
Snijpunt bij $x \approx 19{,}20$. Dat is 19 uur en 12 minuten.

c GR: $y_1 = 1000 \cdot 0{,}887^x$ en $y_2 = 500$ met $0 \le x \le 20$ en $0 \le y \le 600$.
Snijpunt bij $x \approx 5{,}78$. Dat is 5 uur en 48 minuten.

8 De groeifactor is dan $g = \left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 1{,}118$.
De formule heeft de vorm: $y = b \cdot 1{,}118^t$.
Punt invullen geeft: $16 = b \cdot 1{,}118^3$ dus $b = \frac{16}{1{,}118^3} = 11{,}45$.
De formule is: $y = 11{,}45 \cdot 1{,}118^t$.

9 a De beginwaarde is 100%. Elk uur verdwijnt 11% van de straling, dus de groeifactor is 0,89.
De formule is $P = 100 \cdot 0{,}89^t$.

b Na 24 uur is er nog $P = 100 \cdot 0{,}89^{24} = 6{,}1\%$ over.

c Je moet oplossen: $100 \cdot 0{,}89^t < 1$.
De GR geeft een snijpunt bij $x > 39{,}5$ dus na meer dan 39,5 uur.

10 De radioactiviteit was 10 keer de toegestane radioactiviteit.
Om weer op het normale niveau te komen moet het weer op een factor 1 komen, dus opgelost moet worden: $1 = 10 \cdot 0{,}5^x$.
De grafische rekenmachine geeft $x = 3{,}32...$. Dus na $8 \cdot 3{,}32... = 26{,}64... \approx 27$ dagen.

11 De groeifactor per 8 jaar is $\frac{20}{12}$.
De groeifactor per jaar is $\left(\frac{20}{12}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}07$.
Als de factor 1,07 is, dan is de toename $1{,}07 \cdot 100 - 100 = 7\%$.

12 $G = \left(\frac{244}{5{,}5}\right)^{\frac{1}{43}} \approx 1{,}0922$, dus het groeipercentage is $1{,}0922 \cdot 100 - 100 = 9{,}22$.

13 a Gebaseerd op de punten (8,177) en (20,98) is de groeifactor is $g = \left(\frac{98}{177}\right)^{\frac{1}{12}} = 0{,}952$.
De formule heeft de vorm: $y = b \cdot 0{,}952^t$
Punt invullen geeft: $177 = b \cdot 0{,}952^8$ dus $b = \frac{177}{0{,}952^8} = 262$.
De formule is $y = 262 \cdot 0{,}952^t$.

b GR: $y_1 = 432 \cdot 0{,}9995^x$ en $y_2 = 80$ met $0 \le x \le 4000$ en $0 \le y \le 100$.
Snijpunt bij $x \approx 3372$, dus in 3372.

c Met een afname van 0,01% per jaar is de groeifactor 0,9999.
De vergelijking die opgelost moet worden is $0{,}9999^x = 0{,}5$.
De grafische rekenmachine geeft $x = 6931$ dus na 6931 jaar!

14 a Opgelost moet worden: $0{,}5 = g^{30}$.
Oplossen met de grafische rekenmachine geeft $x = 0{,}977$, dus het percentage is $0{,}977 \cdot 100 - 100 = -2{,}3\%$.
De afname is 2,3%.

b De periode van 300 jaar zijn $\frac{300}{30} = 10$ half waarde-perioden. Er is dan nog $0{,}5^{10} \approx 0{,}001$ deel over.
Dit is 0,1%.

15 a De groeifactor per zes uur is: $\frac{77,1}{85,8}$.

De groeifactor per uur is: $\left(\frac{77,1}{85,8}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 0,9823$.

Het percentage is: $0,9823 \cdot 100 - 100 = -1,77$.

b Voor de temperatuur T geldt $77,1 \cdot 0,982^t$ met t de tijd in uren vanaf het moment dat de thermosfles 12 uur in de testomgeving staat.
De vergelijking $77,1 \cdot 0,982^t = 65$ moet worden opgelost.
De grafische rekenmachine geeft $x = 9,4$ dus na $12 + 9,4 = 21,4$ uur.

4 Diverse verbanden

V1 De etappe is $10{,}85$ km lang, begint op een hoogte van $1{,}060$ km en eindigt op een hoogte van $1{,}844$ km.

De gemiddelde helling is: $\frac{0{,}784}{10{,}85} \approx 0{,}0723$.

Het steilste stuk ligt tussen $4{,}5$ km en $5{,}0$ km. Hier neemt de hoogte met $1343 - 1293 = 50$ meter toe. De helling bedraagt: $\frac{50}{500} = 0{,}1000$.

Het steilste stuk van de etappe is: $\frac{0{,}1000}{0{,}0723} \approx 1{,}383$ keer zo steil als het gemiddelde van de etappe.

1 a Je doet er $\frac{105}{v}$ uur over. Dus in minuten $T = 60 \cdot \frac{105}{v} = \frac{6300}{v}$.

b GR: $y_1 = \frac{6300}{x}$ met bijvoorbeeld $0 \le x \le 110$ en $0 \le y \le 5000$.

Dit is een omgekeerd evenredig verband.

c $\frac{6300}{v} = 65$ betekent $v = \frac{6300}{65} \approx 97$ km/uur.

d Als $v = 0$ heeft de reistijd geen betekenis (die is oneindig groot kun je zeggen): verticale asymptoot $v = 0$.

Als v oneindig groot zou kunnen worden, wordt de reistijd vrijwel 0: horizontale asymptoot $T = 0$.

2 a Inkomsten $TO = p(2500 - 40p) = 2500p - 40p^2$.

Kosten $TK = 2{,}50(2500 - 40p) = 6250 - 100p$.

Winst $W = TO - TK = 2500 - 40p^2 - (6250 - 100p) = -40p^2 + 2600p - 6250$.

b $2500 - 40p \ge 0$ betekent $0 \le p \le 62{,}5$.

c GR: $y_1 = -40x^2 + 2600x - 6250$ met $0 \le x \le 62{,}5$ en $0 \le y \le 50000$.

Maximum bij $x = 32{,}50$ en $y = 36000$.

Als hij € 32,50 per artikel vraagt, maakt hij een winst van 36000 euro.

d GR: $W = 0$ als $p = 2{,}50$ en bij $p = 62{,}50$.

Dus hij maakt winst bij prijzen tussen € 2,50 en € 62,50.

3 a Dat gaat zo:

$$3{,}72 \cdot \frac{D}{58{,}5 \cdot H} = 4{,}5$$

$$\frac{D}{58{,}5 \cdot H} = \frac{4{,}5}{3{,}72}$$

$$D = \frac{4{,}5}{3{,}72} \cdot (58{,}5 \cdot H) = 71 \cdot H$$

b $D = 71 \cdot H$ levert een rechte lijn grafiek op die door $(0{,}0)$ gaat.

Je kunt ook zeggen: als H 2 keer zo groot wordt, wordt ook D 2 keer zo groot.

4 a Dit is het een exponentieel verband, want er is een vaste groeifactor van 2 per 20 minuten en dus van $2^3 = 8$ per uur.
De grafiek heeft op zich een horizontale asymptoot, al kun je ook zeggen dat hij stopt bij $t = 0$.

b $B = 8^t$

c $B = 8^t = 10^6$ kun je met de GR oplossen. Dit geeft $t \approx 6{,}64$.

Dus na 6 uur en 39 minuten is het aantal E. Coli bacteriën boven het miljoen gekomen.

5 a Dat zijn de momenten dat de waterstand 0 cm NAP is.

b Toenemend stijgend: tussen 4:00 en 7:00 uur; tussen 16:30 en 19:00 uur.
Afnemend stijgend: tussen 7:00 en 8:00 uur; tussen 19:00 en 20:45 uur.

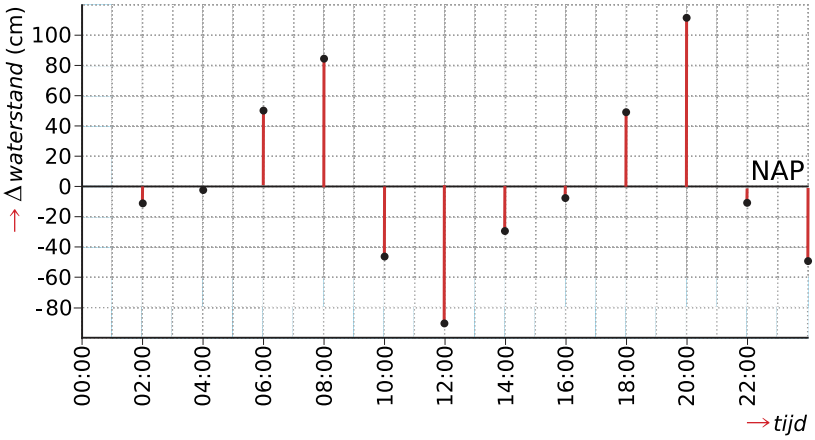
c Toenemend dalend: tussen 8:00 en 11:00 uur; tussen 20:30 en 24:00 uur.
Afnemend dalend: tussen 0:00 en 4:00 uur; tussen 11:00 en 16:30 uur.

d Op de maxima is het hoog water, dat is om 8:00 uur en 20:45 uur.
Op de minima is het laag water, dat is om 4:00 uur en 16:30 uur.

e Tussen 6:00 en 10:00 uur is $\frac{\Delta w}{\Delta t} \approx \frac{50-5}{10-6} = \frac{45}{4} = 11{,}25$ cm.

Dit getal geeft de gemiddelde stijging van de waterstand per uur aan tussen 6:00 en 10:00 uur.

f Zie figuur, maak eventueel eerst een tabel met toe/afnames.



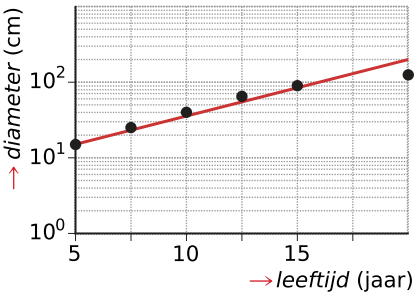
6 a Elke 20 minuten wordt het aantal bacteriën verdubbeld, dus elk uur wordt B met 8 vermenigvuldigd.

tijd t in uur	0	1	2	3	4	5
aantal bacteriën B	1	8	64	512	4096	32768

b Neem op de verticale as $10^0 (= 1)$, 10^1, 10^2, 10^4 en 10^5.
Zet de waarden in de tabel op de goede plaats en ga na, dat je een rechte lijn door de zes punten kunt trekken.

c Omdat de grafiek op enkellogpapier een rechte lijn is.

7 a Zie de figuur.



De grafiek is bij benadering een rechte lijn, dus er is een exponentieel verband tussen de stamomtrek en de leeftijd van de boom.

b Neem als punten $(5{,}15)$ en $(20{,}200)$ (aflezen logpapier).

Groeifactor: $\left(\frac{200}{15}\right)^{\frac{1}{15}} \approx 1{,}19$, dus $P \approx b \cdot 1{,}19^L$.

Punt $(5{,}15)$ invullen geeft $b \approx 6{,}3$.

Formule: $P \approx 6{,}3 \cdot 1{,}19^L$.

c $P \approx 6{,}3 \cdot 1{,}19^{30} \approx 1160$ cm.

8 a $V = 4$ geeft $M = 30{,}76$ met de eerste formule.
$W = 0{,}29 \cdot 30{,}76 - 0{,}20 \cdot 4$ met de tweede formule.
Het antwoord: € 8,12 (per koe per dag).

b Werk de haakjes eerst weg: $W = -0{,}0116V^2 + 0{,}3045V + 7{,}888 - 0{,}20V$.
Dit kan worden herleid tot: $W = -0{,}0116V^2 + 0{,}1045V + 7{,}888$.

9 a $E_w = \frac{74}{3{,}6} \cdot \left(0{,}65 - 0{,}65 \cdot 0{,}6^{3},6\right) \approx 11$

b $E_w = \frac{74}{3{,}6} \cdot \left(p - p \cdot 0{,}6^{3},6\right) = 20{,}56 \cdot (p - p \cdot 0{,}16) = 20{,}56 \cdot (p \cdot 0{,}84) \approx 17{,}3p$. Dus $a \approx 17{,}3$.

10 a Hoe hoger de snelheid, hoe meer het verschil (verticaal) tussen het traditionele pak en het haaienpak wordt.

b Lees voor de twee soorten zwempakken de punten $(1{,}5;\, 60)$ voor het traditionele zwempak en $(1{,}5;\, 55)$ voor het haaienpak af.

Het relatieve verschil is $\frac{55-60}{60} \cdot 100 = -8\frac{1}{3}\%$.

c De ongelijkheid wordt: $23{,}22 \cdot x^{2{,}29} < 21{,}66 \cdot x^{2{,}23}$.
GR: $y_1 = 23{,}22 \cdot x^{2{,}29}$ en $y_2 = 21{,}66 \cdot x^{2{,}23}$.
Grafieken snijden en aflezen geeft de oplossing: $x < 0{,}31$.

d $v = \frac{100}{47{,}84}$ en $I_{\text{haaienpak}} = 21{,}66 \cdot \left(\frac{100}{47{,}84}\right)^{2{,}23} \approx 112{,}13$.

e GR: $y_1 = 112{,}13$ en $y_2 = 23{,}22 \cdot v^{2{,}29}$.
Snijpunt bij $x \approx 1{,}997$.

De tijd is dan $\frac{100}{1{,}997} \approx 50{,}07$ seconden.

11 a Elke club speelt tegen 17 andere clubs.
Het totaal aantal wedstrijden is daarmee $18 \cdot 17 = 306$.

b $G + W = 306$, want in totaal zijn er 306 wedstrijden gespeeld.
$2G + 3W = 858$, want bij gelijkspel zijn er 2 punten en bij winst 3 punten per wedstrijd.

c Herleid $W = 306 - G$ en vul dit in:
$2G + 3(306 - G) = 858$ geeft $2G + 918 - 3G = 858$ en $G = 60$.

12 Lees een punt af, bijvoorbeeld: in 2133 is het bedrag 2 miljard euro geworden.
In het jaar 2003 was het bedrag nog maar 43 miljoen euro.

De groeifactor per 130 jaar is $\frac{2 \cdot 10^9}{43 \cdot 10^6} \approx 46{,}51$.

De groeifactor per jaar is $46{,}51^{\frac{1}{130}} \approx 1{,}03$.
Het rentepercentage per jaar is dus (ongeveer) 3.

13 $K = 0{,}64 \cdot \frac{I_{pot}}{I_{knikker}}$ en $I_{knikker} = 0{,}5236 \cdot d^3$ geeft: $K = 0{,}64 \cdot \frac{I_{pot}}{0{,}5236 \cdot d^3}$.

Dit is te herleiden tot: $K = \frac{0{,}64}{0{,}5236} \cdot \frac{I_{pot}}{d^3} \approx 1{,}222 \cdot \frac{I_{pot}}{d^3}$.

Dit betekent dat $a \approx 1{,}222$.

5 Statistiek

V1 Als eerste maak je een 2×2 kruistabel bij dit probleem:

	patiënten	bezoekers
tevreden	783	824
niet tevreden	$1029 - 783 = 246$	$1462 - 824 = 638$

Met het formuleblad correspondeert dit als: $a = 783$, $b = 824$, $c = 246$ en $d = 638$. Vervolgens kun je φ berekenen:

$$\varphi = \frac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}} = \frac{783 \cdot 638 - 824 \cdot 246}{\sqrt{1607 \cdot 1029 \cdot 1462 \cdot 881}} = 0{,}2034$$

Omdat nu geldt: $0{,}2 < \varphi < 0{,}4$ vind je dat het verschil middelmatig is.

1 a Geslacht: kwalitatief, nominaal; waarden ‘man’, ‘vrouw’.

Leeftijd: kwantitatief, discreet, ordinaal; waarden bijvoorbeeld 20 - 30, 30 - 40, etc.

Onderwijsniveau: kwalitatief, ordinaal (hoewel nominaal ook verdedigbaar is); waarden bijvoorbeeld ‘vmbo/mbo1’, ‘havo/vwo’, ‘mbo2/3/4’, ‘hbo’, ‘wo’.

Godsdienst: kwalitatief, nominaal; waarden bijvoorbeeld ‘Rooms Katholiek’, ‘Ned. Hervormd’, ‘Gereformeerd’, ‘Islam’, ‘Boedhisme’, ‘geen’, etc.

b Verdeling mannen/vrouwen moet gelijk zijn aan die van Nederlanders.

Alle leeftijdscategorieën moeten vertegenwoordigd zijn, passend bij de verdeling over die categorieën van de Nederlanders.

Alle onderwijsniveaus moeten vertegenwoordigd zijn, passend bij de verdeling over die niveaus van de Nederlanders.

De mensen binnen de steekproef moeten aselect worden gekozen onder alle Nederlanders met in achtneming van het voorgaande.

2 a Een steekproefomvang van 10 scholen is niet groot genoeg. (Er kan al verschil in vervoer tussen scholen zitten.) En op een grote school hebben leerlingen dan ook nog minder kans om in de steekproef te komen dan op een kleine school. De steekproef is dus ook niet aselect.

b De steekproefomvang is voldoende. Maar klanten die de helpdesk niet bellen komen niet in de steekproef, dus de steekproef is niet aselect.

c Hier kun je niets zeggen over de representativiteit, omdat de populatie niet bekend is.

3 a Bedenk wat een aselecte steekproef is. Laat daarna zien waarom deze niet aselect is.

Een juist antwoord is dan:

- Bij een aselecte steekproef moet iedereen uit de populatie een even grote kans hebben om in de steekproef te komen.
- Alleenstaanden hebben een grotere kans om in de steekproef te zitten dan personen uit meerpersoonshuishoudens.
- Hierdoor is de steekproef niet aselect.

b Een juist antwoord is bijvoorbeeld:

Een steekproef moet ook representatief zijn.
Representatief betekent dat alle groepen naar verhouding van de populatie in de steekproef moeten zitten.
Hier kunnen mensen zichzelf opgeven.
Misschien geven mensen die veel tijd hebben en veel televisie kijken zich juist op om mee te doen.
Dus het is niet zeker dat de steekproef representatief is.

c Deze stap zorgt voor selectie uit zowel (grote) steden als (kleine) dorpen en draagt dus bij aan de representativiteit.

d De verdeling van de woonplaats in de populatie en de steekproef is nu heel verschillend. Dus de steekproef is daarvoor niet meer representatief.

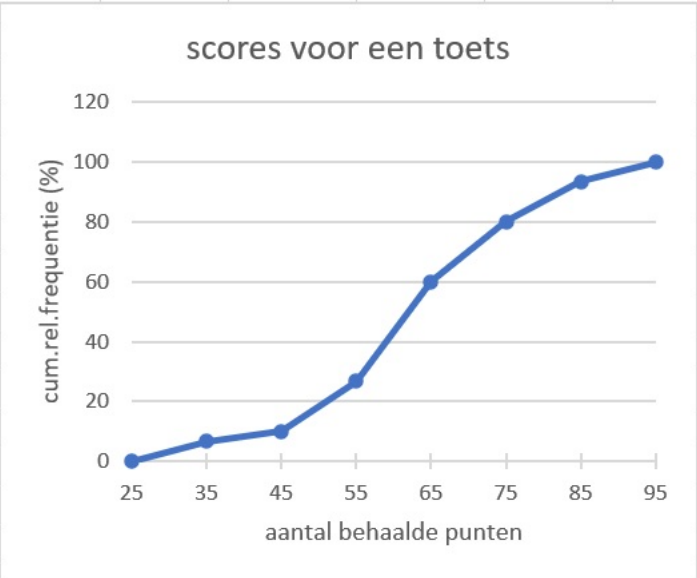
e Kwantitatieve variabelen.
Discreet: niet alle tussenliggende waarden kunnen voorkomen. Voorbeelden: schoenmaat, aantal kinderen.
Continu: alle waarden in een bereik kunnen voorkomen. Voorbeelden: temperatuur, lengte.

4 a Je beschikt niet over de ruwe data. Gebruik de klassenmiddens voor de schatting.

De gemiddelde score is $\approx 62{,}3$.

b $55- < 65$

c Zie figuur, denk om het uitzetten tegen de rechter klassengrenzen!



d Bij 25% kun je Q_1 aflezen: ≈ 53.

Bij 50% kun je de mediaan aflezen: ≈ 62.

Bij 75% kun je Q_3 aflezen: ≈ 73.

Het minimum is 25 en het maximum 95.

Dit zijn schattingen vanwege het aflezen, maar vooral omdat er geen ruwe data bekend zijn.

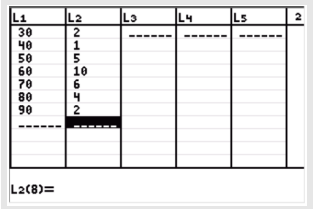
e Spreidingsbreedte: $95 - 25 = 70$.

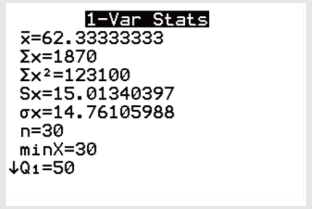
Interkwartielafstand: $IQR = 73 - 53 = 20$.

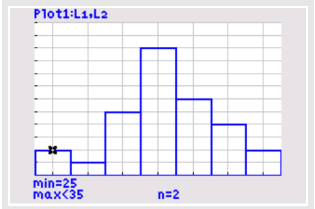
f $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 53 - 1{,}5 \cdot 20 = 23$ en $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 73 - 1{,}5 \cdot 20 = 103$.

Daar liggen alle waarden tussen, dus er zijn geen uitschieters.

5 a Voer de klassenmiddens en de frequenties in.







b De GR heeft alleen de klassenmiddens als waarden tot zijn/haar beschikking en weet niets van een klassenindeling.

c Je moet dan de klassenmiddens vervangen door de bovengrenzen van de klassen en bij elke frequentie de voorgaande optellen.

6 a $\frac{12,5}{100} \cdot 360 = 45°$ en $0,125 \cdot 150 \approx 19$ zetels.

b Je kunt dan snel zien welke combinaties van partijen een meerderheid hebben in de Tweede Kamer.

Die verdeling kun je goed laten lijken op de daadwerkelijke verdeling van de zetels in de Tweede Kamer.

c Het gaat hier om een kwalitatieve variabele.

7 a De verdeling die hoort bij 2005 is meertoppig. Kennelijk zijn er in de jaren tussen 1995 en 2005 veel jongere leraren bijgekomen, terwijl in de jaren daarvoor de instroom van jonge leraren werd afgeremd door de hoeveelheid al werkende docenten.

b Dat er naar verhouding veel oudere leraren zijn.

c De top van de jongere leraren zal met 10 jaar naar rechts verschuiven en hoger worden dan de top bij de oudere leraren. OOk de top van de oudere leraren zal verschuiven, maar omdat die al bij $50 - 54$ zit, zullen veel van de docenten die deze top veroorzaken dan niet meer in het v.o. werken. Dus zal die top lager worden.

8 a De klassengrenzen zijn zo gekozen dat ze precies passen bij de vuistregels voor de normale verdeling:

- Klasse I: 2,5% van de eieren.
- Klasse II: 13,5% van de eieren.
- Klasse III: 34% van de eieren.
- Klasse IV: 34% van de eieren.
- Klasse V: 13,5% van de eieren.
- Klasse VI: 2,5% van de eieren.

b $13,5 + 2,5 = 16\%$.

c $100 - 16 = 84\%$ of $2,5 + 13,5 + 34 + 34 = 84\%$.

9 a De gemiddelden in de 50 steekproeven zullen wel normaal zijn verdeeld. En het gemiddelde van die gemiddelden zal daarom een goede schatting van het werkelijke gemiddelde opleveren.

b Tussen $29 - 2 \cdot 1,5 = 26$ jaar en $29 + 2 \cdot 1,5 = 32$ jaar.

10 a $\frac{23}{150} \approx 0,153$

b Dan ligt de proportie van de populatie tussen $0,153 - 2 \cdot 0,011 = 0,131$ en $0,153 + 2 \cdot 0,011 = 0,175$. Dat is tussen de $150 \cdot 0,131 \approx 20$ en de $150 \cdot 0,175 \approx 26$ zetels.

11 De proportie van de steekproef is $p = \frac{150000}{9500000} \approx 0,0157...$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval ligt tussen $0,0157 - \sqrt{\frac{0,0157(1-0,0157)}{1000}}$ en $0,0157 + \sqrt{\frac{0,0157(1-0,0157)}{1000}}$, dus tussen 0,0118 en 0,0197.

Dat komt overeen met $0,0118 \cdot 150 \approx 1,77$ en $0,0197 \cdot 150 \approx 2,96$ zetels.

Dus 1 tot 3 zetels. (Als hier 2 in plaats van 1 als antwoord wordt gegeven, is de betrouwbaarheid kleiner dan 95%, dus dat is niet goed.)

12 a Ook ongeveer 0,1 mL. Bij een voldoende omvang van de steekproef lijkt namelijk de verdeling van de steekproef op de verdeling van de populatie, dus zal ook de standaardafwijking van de steekproef ongeveer even groot zijn als die van de populatie.

b $2 \cdot 2 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{n}} = 0,1$ (of $2 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{n}} = \frac{0,1}{2}$).

Los deze vergelijking op, bijvoorbeeld met je GR. Je vindt dan: $n = 16$.

13 a phi $= \frac{27 \cdot 31 - 65 \cdot 78}{\sqrt{(27+65)(27+78)(65+31)(78+31)}} \approx -0,42$

Het verschil is dus groot.

b Er is veel te weinig achtergrondinformatie beschikbaar over dit onderzoek. Zo ontbreken bijvoorbeeld gegevens over:

- hoe de steekproef is genomen;
- wat overgewicht is;
- hoeveel energiedrank er werd gedronken;
- mogelijke andere oorzaken voor overgewicht, maar waar in dit onderzoek geen rekening mee is gehouden.

c Dan moet gelden: phi $= \frac{27 \cdot 31 - x \cdot 78}{\sqrt{(27+x)(27+78)(x+31)(78+31)}} = -0{,}4$

Gebruik de grafische rekenmachine. Dit geeft: $x \approx 54$, dus bij 54 drinkers met overgewicht.

14 a GR: $\overline{L}_I = 600{,}9$ en $\overline{L}_{II} = 630{,}6$ en $S_I = 20{,}7$ en $S_{II} = 26{,}9$

b $E = \frac{(\overline{L})_1 - (\overline{L})_2}{\frac{1}{2}(S_1+S_2)} = \frac{600{,}9-630{,}6}{\frac{1}{2}(20{,}7+26{,}9)} \approx 1{,}25 > 0{,}8$, dus het verschil in levensduur is groot.

c GR, type I: minimum 560, $Q_1 = 588$, mediaan 601, $Q_3 = 613$, maximum 650.

GR, type II: minimum 590, $Q_1 = 610$, mediaan 630, $Q_3 = 654$, maximum 680.

Omdat de boxen net overlappen, maar de mediaan van type II buiten de box van type I ligt, is het verschil middelmatig.

15 a Zoek twee punten, bijvoorbeeld: $(160{,}66)$ en $(190{,}79)$.

De richtingscoëfficiënt is $a = \frac{79-66}{190-160} = 0{,}43...$

Punt invullen: $66 = 0{,}43 \cdot 166 + b$ geeft $b = -5{,}93...$

Dus: $A = 0{,}43 \cdot L - 5{,}93$.

Opmerking: de punten dienen zodanig gekozen te zijn en zodanig nauwkeurig afgelezen te zijn dat a tussen $0{,}35$ en $0{,}45$ ligt. b kan erg variëren. Reken door met onafgeronde antwoorden!

b $0{,}39 \cdot 205 + 5{,}14 \approx 89$ cm.

c Tussen $89 - 2 \cdot 3{,}0 = 80$ en $89 + 2 \cdot 3{,}0 = 95$ cm.

16 a Afgekeurd in serie A: $\frac{29}{80} \cdot 100 \approx 36\%$.

Afgekeurd in hele onderzoek: $\frac{66}{640} \cdot 100 \approx 10\%$.

De antwoorden delen geeft: $3{,}515...$

Dus 4 (of nauwkeuriger, dus $3{,}5$ of $3{,}52$; nog nauwkeuriger is zinloos).

b Uit het aantal afgekeurde vluchten in serie E, namelijk 8: Dat is hoger dan het aantal afgekeurde vluchten in serie D, namelijk 5.

c Hier moet de effectgrootte worden bepaald: $E = \frac{6541-3840}{\frac{1}{2} \cdot (1354+512)} \approx 2{,}9$ (of nauwkeuriger).

Het antwoord: het verschil is groot.

d De mediaan is kleiner dan het gemiddelde.
De verdeling moet dus scheef zijn met een staart naar rechts.
Dus schets a past het best.

e Het verschil is middelmatig, want beide boxen overlappen, maar niet beide medianen liggen in de andere box.

f De kortste vluchtduur is ongeveer 110 seconden (tussen 100 en 120 seconden is goed), zie experiment H.

De gemiddelde snelheid is $\frac{2462}{110-6 \cdot 5}$ cm per seconde.

g Voorbeelden van goede argumenten zijn:

1. Uit tabel 1: het aantal afgekeurde vluchten neemt af.
2. Uit tabel 2: het aantal keren dat de kortste route wordt gevonden, neemt toe.
3. Uit tabel 2: de gemiddelde afgelegde afstand per goedgekeurde vlucht neemt af.
4. Uit tabel 2 of uit de figuur: de mediaan van de afgelegde afstand per goedgekeurde vlucht neemt af.

17 a $0{,}43 \cdot 1212195 = 521244$, dus het percentage is $\frac{521244}{2575308} \cdot 100 = 20\%$.

b De modus is 1, want dat aantal binnenkomende links heeft de hoogste frequentie.

Het gemiddelde is groter dan de mediaan, want de (lange) staart ligt rechts.

De mediaan is groter dan de modus, want er zijn $133515 + 465915 = 599430$ artikelen met hoogstens 2 binnenkomende links (en dat is minder dan de helft van het totaal).
of
De mediaan is groter dan de modus, want aflezen uit de verdeling geeft ongeveer $130000 + 250000 = 380000$ artikelen met hoogstens 1 binnenkomende link (en dat is minder dan de helft van het totaal).

Dus: modus – mediaan – gemiddelde

c Het eerste kwartiel is bij ongeveer $0{,}25 \cdot 2575308 = 643827$ artikelen.

Er zijn $133515 + 465915 = 599430$ artikelen met hoogstens 2 binnenkomende links.

Om op het eerste kwartiel te komen moeten daar ongeveer 44000 artikelen bij; dat kan zeker met de artikelen met 3 binnenkomende links (want daarvan zijn er meer dan 44000).

Een artikel met 3 binnenkomende links krijgt $1\frac{1}{2}$ ster, dus $Q_1 = 1{,}5$.

Dus het is juist aangegeven.

Opmerking: het aantal artikelen met hoogstens 2 binnenkomende links mag worden afgelezen uit het staafdiagram. Het afgelezen aantal moet tussen 580000 en 620000 liggen.

d Uit de boxplot kan je de kwartielen aflezen, je ziet dus gemakkelijker dat ongeveer 25% van de artikelen 30 of meer binnenkomende links heeft of dat minstens de helft 9 of meer binnenkomende links heeft. In het staafdiagram kun je bij elk aantal binnenkomende links van 0 t/m 49 de frequentie aflezen en daardoor kun je dus ook de modus aflezen.

18 a Mannen: de breedte van het interval is $2 \cdot 2 \cdot \frac{\overline{s}}{\sqrt{n}} = 4 \cdot \frac{5{,}8}{\sqrt{34}} \approx 3{,}98$.

Vrouwen: de breedte van het interval is $2 \cdot 2 \cdot \frac{8{,}1}{\sqrt{32}} \approx 5{,}73$.
Dus het interval voor de mannen is het smalst.

b Bij 95% van de experimenten zal de gemiddelde lichaamslengte van de mannelijke en vrouwelijke studenten aan de universiteit in het betreffende interval liggen.

c Als één of beide standaardafwijkingen groter worden, wordt in de formule van de effectgrootte de noemer groter.

De teller blijft gelijk, met als gevolg dat de uitkomst kleiner wordt.

De effectgrootte wordt dan kleiner, dus het verschil kan kleiner worden. (Bijvoorbeeld van groot naar middelmatig of van middelmatig naar gering.)

d Met de tabel: $E = \frac{183{,}8 - 170{,}8}{\frac{1}{2}(5{,}8 + 8{,}1)} \approx 1{,}9$ (of nauwkeuriger).

Het verschil is groot.

Met de boxplots: De boxen overlappen elkaar.
De mediaan van de vrouwen ligt buiten de box van de mannen (of omgekeerd: de mediaan van de mannen ligt buiten de box van de vrouwen).
Het verschil is middelmatig.
De conclusies zijn dus niet hetzelfde.

e
- De boxen overlappen elkaar maar voor een heel klein deel.
- De effectgrootte is veel groter dan de grenswaarde van $0{,}8$.

De conclusie die het best te verdedigen is, is dat het verschil groot is.

f $\text{phi} = \frac{5 \cdot 30 - 2 \cdot 29}{\sqrt{(5+29)(5+2)(29+30)(2+30)}} \approx 0{,}14$

Het verschil is dus gering.

19 a Aflezen: 6 landen, dus $\frac{6}{16} \cdot 100 \approx 38\%$ (of nauwkeuriger).

b Oostenrijk, Duitsland, Denemarken, Finland, Nederland, Noorwegen, Zweden en Verenigd Koninkrijk.

c De steekproefproportie is $\frac{4292}{7400} \approx 0{,}58$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $0{,}58 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}58(1-0{,}58)}{7400}}$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage is dus $[56{,}9; 59{,}1]$.
Dit interval ligt binnen het interval $[56{,}6; 59{,}4]$, dus uitspraak 1 is juist.

Opmerking 1: Reken door met je antwoorden van de tussenstappen. Rond aan het einde niet af op gehelen als in de tekst waarden met één decimaal gegeven zijn.
Opmerking 2: Leg ook uit dat het gevonden interval binnen het gegeven interval ligt.

d Dit kan met de effectgrootte: $E = \frac{0{,}9}{\frac{1}{2} \cdot (6{,}0+6{,}2)} \approx 0{,}1$.

Dit is kleiner dan $0{,}4$ dus het verschil is gering.

e Maak de volgende tabel.

		geopereerd		
		wel	niet	totaal
zorginfectie opgelopen	wel	1286	3408	4694
	niet	31378	59227	90605
	totaal	32664	62635	95299

$\text{phi} = \frac{1286 \cdot 59227 - 3408 \cdot 31378}{\sqrt{4694 \cdot 32664 \cdot 62635 \cdot 90605}} \approx -0{,}03$

$-0{,}02 \leq -0{,}03 \leq 0{,}2$, dus het verschil is gering.

20 a Score gelijk of lager dan 70: 89%. Dus hoger dan 70: 11%.

$0{,}11 \cdot 2255 = 248{,}05$ dus 248 of 249 kandidaten.

b Een schaal van $0 - 90$ punten.

Het minimum zit bij 0 en het maximum bij 88.

De waarden van Q_1, Q_2 (mediaan) en Q_3 lees je af:
Q_1: 43 of 44, Mediaan: 53 of 54, Q_3 63 of 64.

Teken nu de boxplot.

c Zie de tabel.

	oude programma	nieuwe programma
≤ 45 punten	29%	24%
≤ 65 punten	77%	60%

6 Naar het examen

1 a Het subsidiebedrag is $2500 \cdot 0{,}63 = 1575$ (euro).

De kosten zijn $250 + 475 + 150 = 875$ (euro per hectare).

De oppervlakte van de bloemenrand is $3{,}5 \cdot 2500 = 8750$ (m^2).

De kosten van de bloemenrand zijn $\frac{8750}{10000} \cdot 875 \approx 766$ (euro), dus het subsidiebedrag is hoger.

b In de formule moet worden ingevuld $S = 0{,}53$ en $D = 500$.

Dit geeft $W = 14{,}045$.

De nettowinst is $14{,}045 \cdot 21 = 294{,}95$ (of 295) (euro).

c De vergelijking $100 \cdot S - 0{,}035 \cdot 1025 - 21{,}455 = 0$ moet worden opgelost.

Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost.

Dit geeft $S \approx 0{,}573$ (of nauwkeuriger).

Het antwoord: (minimaal) 58 (cent) (of € 0,58) (per strekkende meter).

d Er geldt $100 \cdot S - 0{,}035 \cdot D - 21{,}455 = 0$.

Dit geeft $100 \cdot S = 0{,}035 \cdot D + 21{,}455$.

Daaruit volgt $S = 0{,}00035 \cdot D + 0{,}21455$, dus $a = 0{,}00035$ en $b = 0{,}21455$.

2 a Conclusie 1

- De gemiddelde score van de 16- tot 24-jarigen in Nederland is hoger dan 285, terwijl dat van de hele populatie ongeveer 280 is.
- (Dit betekent dat de groep 16- tot 24-jarigen gemiddeld hoger gescoord heeft dan de 25- tot 65-jarigen,) dus de conclusie is juist.

Conclusie 2

- De gemiddelde score van de 16- tot 24-jarigen in Zweden is hoogstens gelijk aan de gemiddelde score van Oostenrijk en die is lager dan 280.
- (De gemiddelde score van de hele populatie is 280, dus de groep 16- tot 24-jarigen heeft gemiddeld lager gescoord dan de 25- tot 65-jarigen,) dus de conclusie is juist.

b Een juiste redenering, bijvoorbeeld gebaseerd op:

- de symmetrie van de normale verdeling, waarbij een getallenvoorbeeld is vermeld, of
- een vergelijking van mediaan en gemiddelde, waarbij de waarden van mediaan en gemiddelde zijn vermeld.

c Dit kan met behulp van de effectgrootte en ook met behulp van boxplots.

- De effectgrootte is $E = \frac{265{,}5 - 245{,}8}{\frac{1}{2}(55{,}5 + 51{,}3)} \approx 0{,}37$, dus het verschil is gering.
- De box van Canada ligt tussen $230{,}8$ en $303{,}9$; de mediaan van Spanje is $250{,}3$ en deze ligt daarbinnen. De box van Spanje ligt tussen $216{,}3$ en $280{,}9$; de mediaan van Canada is $269{,}8$ en deze ligt daarbinnen. De conclusie: het verschil is gering.

d Dit kan met behulp van de standaardafwijking en ook met behulp van de interkwartielafstand IQR.

- De standaardafwijking: die van Australië is groter dan die van Spanje, dus de spreiding van Australië is groter dan die van Spanje.
- Voor Australië geldt $IQR = 70{,}7$ en voor Spanje geldt $IQR = 64{,}6$, dus de spreiding van Australië is groter dan die van Spanje.

e Het verschil tussen de hoogste en de laagste waarde is voor Nederland groter dan voor Japan. In Japan is de spreiding kleiner dan in Nederland.

3 a De hoeveelheid koraal in 2012 was $0{,}138 \cdot 345000 = 47610$ (km^2).

De procentuele afname is $\frac{97000-47610}{97000} \cdot 100 \approx 50{,}9\%$.

b De groeifactor per jaar is $(0{,}5)^{\frac{1}{10}} \approx 0{,}93$ (of nauwkeuriger), dus de afname is 7%.

c De groeifactor per jaar is $1{,}0089$, dus de vergelijking $1{,}0089^t = 1{,}5$ moet worden opgelost.

Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost (bijvoorbeeld met de GR).

Het antwoord: 46 (jaar).

4 a De groeifactor per jaar is $1{,}0139$, dat is per maand $(1{,}0139)^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}00115$ (of nauwkeuriger).
Het antwoord: $0{,}115$(%).

b De vergelijking $-231299{,}46 + 231565{,}69 \cdot 1{,}001151^t = 5000$ moet worden opgelost.

Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost (bijvoorbeeld met de GR).

Dit geeft $t = 18$ (of nauwkeuriger), dus in maart 2014.

c Na $11 \cdot 12 = 132$ maanden moet er nog een restschuld zijn, maar na $12 \cdot 12 = 144$ maanden moet de restschuld gelijk aan 0 zijn. De studieschuld van Maaike was 6000 euro.

d Bij een toename van de studieschuld van 6000 naar 6500 hoort een toename van de restschuld na 60 maanden van $4097-3561 = 536$ (euro). Dit is $\frac{536}{5} = 107{,}20$ (euro) per 100 euro extra studieschuld.

Bij een toename van de studieschuld van 6000 naar 6200 hoort dus een toename van de restschuld van $2 \cdot 107{,}20 = 214{,}40$ (euro), dus het antwoord is: $3561 + 214{,}40 = 3775{,}40$ (of 3775) euro.

5 a De oppervlakte moet vanaf A0 11 keer worden gehalveerd.

De oppervlakte is $1000000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 488$ (mm^2).

b De vergelijking $\sqrt{2} \cdot b^2 = 15625$ moet worden opgelost.

Beschrijven hoe je hieruit vindt dat breedte $b \approx 105{,}1$ (mm) (of nauwkeuriger).

De hoogte is $\sqrt{2} \cdot 105{,}1 \approx 149$ (of $\frac{15625}{105{,}1} \approx 105$).

Het antwoord: de hoogte is 149 (mm) en de breedte is 105 (mm).

c Alle opeenvolgende quotiënten berekenen: $\frac{84}{119} \approx 0{,}7$, $\frac{59}{84} \approx 0{,}7$, $\frac{42}{59} \approx 0{,}7$ en $\frac{30}{42} \approx 0{,}7$.

De quotiënten zijn nagenoeg gelijk aan elkaar(, dus er is bij benadering een exponentieel verband tussen de hoogte h en het formaatnummer n).

d De breedte wordt telkens met $\frac{93-21}{4} = 18$ (cm) vermeerderd.
De breedte van Z6-papier is $93 + 18 = 111$ (cm).

e De breedte b wordt telkens met $\frac{93-21}{4} = 18$ (cm) vermeerderd, dus $b = 18n + c$.
Bij $n = 1$ is $b = 21$, dus $c = 3$ (cm).
Daarom is $O = 30 \cdot (18n + 3) = 540n + 90$. En dus $a = 540$ en $b = 90$.

6 De provincie met de meeste bioscopen per inwoner is de provincie waar het aantal inwoners per bioscoop het laagst is.

Dit is de provincie Groningen.

Het gemiddeld aantal bioscoopbezoeken per inwoner van Groningen is gelijk aan het totaal aantal bioscoopbezoeken in Groningen gedeeld door het totaal aantal inwoners van Groningen.

Aflezen voor Groningen: het aantal bioscopen is 11 en het aantal inwoners per bioscoop is 50000 (met een marge van 1000).

Het totaal aantal inwoners van Groningen is (ongeveer) $50000 \cdot 11 = 550000$.

Het aantal bezoeken per inwoner is dan ongeveer $1180000 : 550000 \approx 2{,}1$ dus Kees heeft gelijk.

Register

a
aselect 44
asymptoot 34

b
betrouwbaarheidsinterval 50
boxplots vergelijken 50
breuk 6

c
centrummaten 46
constant 36
continu 44
correlatiecoëfficiënt 50
cumulatieve frequentie 46

d
dalend 36
data 44
decimaal getal 6
diagram 46
differentiequotiënt 36
discreet 44

e
eenheid 4
effectgrootte 50
eigenschappen van machten en exponenten 8
exponentieel verband 26, 34
exponentieel verval 26
exponentiële groei 26

f
frequentietabel 46

g
gebied 18
gemiddelde 46
grenslijn 18
groeifactor 26
groeipercentage 26
grootheid 4

h
halveringstijd 28
hellingsgetal 14
histogram 46

i
interkwartielafstand 46

k
klassenindeling 46
kruistabel 50
kwalitatieve variabelen 44
kwantitatieve variabelen 44

l
lineair extrapoleren 18
lineair interpoleren 18
lineair verband 14, 34
lineaire ongelijkheid 16, 18
lineaire vergelijking 16, 18
logaritmische schaalverdeling 36

m
machtsverheffen 4
mediaan 46
meertoppig 48
modale klasse 46
modus 46

n
nominaal 44
normale verdeling 48

o
omgekeerd evenredig verband 34
onderzoeksvraag 44
ongelijkheid 14
ordinaal 44

p
populatie 44
populatiegemiddelde 50
populatieproportie 50
proportie 48
puntenwolk 50

r
recht evenredig verband 14, 34
rekenen met variabelen 8
rekenen met wortels 8
rekenvolgorde 4
relatief frequentiepolygoon 46
representatief 44
richtingscoëfficiënt 14

s
scheef 48
significante cijfers 4
spreidingsbreedte 46
spreidingsdiagram 50
spreidingsmaten 46
staart 48
standaardafwijking 46, 48
statistische samenhang 50
statistische variabelen 44

steekproef 44
steekproefomvang 44
steekproevenverdeling 48
stijgend 36
symmetrisch 48

t

toenamediagram 36
trendlijn 50

u

uitschieter 46
uniform 48

v

verdubbelingstijd 28
vergelijking 14
verschil van cumulatieve percentages 50
vervalpercentage 26
vuistregels voor de normale verdeling 48

w

wetenschappelijke notatie 4
worteltrekken 4

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Stichting Math4All

Uitwerkbijlage bij Opgave 4 op pagina 67

restschuld (afgerond op hele euro's) bij een maandelijkse terugbetaling van € 45,41

maanden na moment van eerste terugbetaling	oorspronkelijke studieschuld																		
	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000
0	455	955	1455	1955	2455	2955	3455	3955	4455	4955	5455	5955	6455	6955	7455	7955	8455	8955	9455	9955
12	0	419	926	1433	1940	2447	2954	3461	3968	4475	4982	5489	5996	6503	7010	7517	8024	8531	9038	9545
24	0	0	391	905	1419	1933	2447	2961	3475	3989	4503	5017	5531	6045	6559	7073	7587	8101	8615	9129
36	0	0	0	369	890	1411	1933	2454	2975	3496	4017	4538	5059	5581	6102	6623	7144	7665	8186	8707
48	0	0	0	0	354	883	1411	1939	2468	2996	3525	4053	4581	5110	5638	6166	6695	7223	7752	8280
60	0	0	0	0	0	347	882	1418	1954	2489	3025	3561	4097	4632	5168	5704	6240	6775	7311	7847
72	0	0	0	0	0	0	346	889	1432	1976	2519	3062	3605	4148	4692	5235	5778	6321	6864	7407
84	0	0	0	0	0	0	0	353	904	1455	2005	2556	3107	3658	4208	4759	5310	5861	6411	6962
96	0	0	0	0	0	0	0	0	368	927	1485	2043	2602	3160	3718	4277	4835	5394	5952	6510
108	0	0	0	0	0	0	0	0	0	391	957	1523	2089	2656	3222	3788	4354	4920	5486	6052
120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	422	996	1570	2144	2718	3292	3866	4440	5014	5588
132	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	462	1044	1626	2208	2790	3372	3954	4536	5118
144	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	510	1100	1690	2280	2870	3460	4050	4640
156	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	567	1165	1763	2362	2960	3558	4156
168	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	26	633	1239	1846	2453	3059	3666
180	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	93	709	1323	1938	2553	3168