Opgave 4 Uitlenen

In bibliotheken moet men voortdurend beslissingen nemen over het afschrijven van boeken, het vervangen van beschadigde of zoekgeraakte exemplaren, enzovoort. Daarvoor is van belang dat men kan voorspellen hoe vaak een boek uitgeleend zal worden. P. M. Morse heeft hiervoor een wiskundig model ontwikkeld. In deze opgave passen wij zijn model toe op een vaste collectie van 9480 boeken. Geen van deze boeken wordt meer dan 7 keer per jaar uitgeleend. Volgens het model van Morse geldt voor deze collectie de volgende overgangsmatrix (M):

$$\begin{array}{cc} & \text{aantal keer uitgeleend in een jaar} \\ & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{aantal keer uitgeleend} \\ \text{in het volgende jaar} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}819 & 0{,}606 & 0{,}449 & 0{,}333 & 0{,}247 & 0{,}183 & 0{,}135 & 0{,}100 \\ 0{,}164 & 0{,}303 & 0{,}360 & 0{,}366 & \boxed{0{,}345} & 0{,}310 & 0{,}271 & 0{,}231 \\ 0{,}016 & 0{,}076 & 0{,}144 & 0{,}201 & 0{,}242 & 0{,}264 & 0{,}271 & 0{,}265 \\ 0{,}001 & 0{,}013 & 0{,}038 & 0{,}074 & 0{,}113 & 0{,}149 & 0{,}180 & 0{,}203 \\ 0{,}000 & 0{,}002 & 0{,}008 & 0{,}020 & 0{,}039 & 0{,}064 & 0{,}090 & 0{,}117 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}001 & 0{,}005 & 0{,}011 & 0{,}022 & 0{,}036 & 0{,}054 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}001 & 0{,}002 & 0{,}006 & 0{,}012 & 0{,}021 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}001 & 0{,}002 & 0{,}005 & 0{,}009 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

In matrix M is bijvoorbeeld te zien dat van de boeken die in een jaar vier keer worden uitgeleend, bijna 35% het volgende jaar één keer worden uitgeleend.

Van de boeken die in 1995 niet werden uitgeleend is er naar verwachting geen enkel boek dat twee jaar later (dus in 1997) zeven keer wordt uitgeleend.

5p **13** □ Toon dit aan met behulp van matrix M.

Er zijn boeken die in 1995 twee keer werden uitgeleend.

6p **14** □ Bereken hoeveel procent van deze boeken naar verwachting precies één keer zal worden uitgeleend in de twee jaren 1996 en 1997 samen.

Met behulp van matrix M kan worden berekend dat de boeken die 7 keer in een bepaald jaar worden uitgeleend, in het daarop volgende jaar gemiddeld 2,3 keer worden uitgeleend.
We noteren dit als $E_7 = 2{,}3$.
Op dezelfde manier zijn E_0, E_1, ..., E_6 gedefinieerd.

4p **15** □ Toon met behulp van de gegevens uit matrix M aan: $E_4 \approx 1{,}4$.

Er zijn matrices die bij vermenigvuldiging met matrix M als produkt een matrix opleveren die uitsluitend de getallen E_0, E_1, ..., E_7 als elementen heeft.

5p **16** □ Geef een voorbeeld van zo'n matrix. Licht het antwoord toe, vermeld daarbij duidelijk de volgorde van de matrixvermenigvuldiging.

In tabel 1 staan de uitleencijfers voor 1995. Met behulp van matrix M zijn de verwachte uitleencijfers voor 1996 uitgerekend. Deze staan ook in tabel 1.

tabel 1

Uitleencijfers voor 1995 en verwachte uitleencijfers voor 1996

aantal keer uitgeleend	0	1	2	3	4	5	6	7
aantal boeken in 1995	7012	1978	397	68	19	4	1	1
verwacht aantal boeken in 1996	7148	1925	340	56	10	1	0	0

Het aantal boeken dat meer dan 4 keer per jaar wordt uitgeleend, blijkt gering te zijn. Daarom vereenvoudigt men het model door deze boeken gemakshalve als 4 keer uitgeleend te tellen. Uitgaande van matrix M stelt men de volgende matrix N op:

$$\begin{array}{ll} & \text{aantal keer uitgeleend in een jaar} \\ & \begin{array}{ccccc} \quad 0 & \quad\;\; 1 & \quad\;\; 2 & \quad\;\; 3 & \quad\;\; 4 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{aantal keer uitgeleend} \\ \text{in het volgende jaar} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}819 & 0{,}606 & 0{,}449 & 0{,}333 & 0{,}247 \\ 0{,}164 & 0{,}303 & 0{,}360 & 0{,}366 & 0{,}345 \\ 0{,}016 & 0{,}076 & 0{,}144 & 0{,}201 & 0{,}242 \\ 0{,}001 & 0{,}013 & 0{,}038 & 0{,}074 & 0{,}113 \\ 0{,}000 & 0{,}002 & 0{,}009 & 0{,}026 & 0{,}053 \end{pmatrix} = N \end{array}$$

Met behulp van matrix N kan men ook berekenen hoeveel boeken naar verwachting in 1996 drie keer worden uitgeleend.

4p **17** □ Toon aan dat het zo berekende aantal niet of nauwelijks verschilt van het aantal dat in tabel 1 vermeld is.

U_t is het gemiddelde aantal uitleningen per boek per jaar in het jaar t.
Men kan aantonen dat steeds bij benadering geldt:
$U_{t+1} = 0{,}2 + 0{,}3U_t$
Op den duur zullen de percentages boeken die 0 keer per jaar, 1 keer per jaar, enzovoort, worden uitgeleend, hetzelfde blijven.

4p **18** □ Bereken hoe groot het gemiddeld aantal uitleningen per boek per jaar op den duur zal zijn.