

Examen VWO

2013

tijdvak 2
woensdag 19 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Oplopende korting

Grote winkelketens organiseren soms spectaculaire acties met flinke kortingen. Hiermee hoopt men onder andere klanten te winnen en een grotere naamsbekendheid te krijgen.

Maffe marathon

Een warenhuisketen organiseerde in het voorjaar van 2009 een kortingsactie. Door aankopen van minstens € 25 te doen op meerdere dagen konden klanten een behoorlijke korting krijgen.

In de folder stond hierover:

aankoopbedrag per dag	korting eerste dag	korting tweede dag	korting derde dag
€ 25 tot € 75	€ 2,50	€ 5,00	€ 7,50
€ 75 tot € 150	€ 7,50	€ 15,00	€ 22,50
€ 150 tot € 300	€ 15,00	€ 30,00	€ 45,00
€ 300 of meer	€ 30,00	€ 60,00	€ 90,00

Een voorbeeld: een klant koopt tijdens de actieperiode bij deze keten op drie dagen artikelen voor de volgende bedragen.

	aankoopbedrag	korting
eerste dag	€ 80,00	€ 7,50
tweede dag	€ 36,00	€ 5,00
derde dag	€ 319,00	€ 90,00

In het voorbeeld bedraagt de uiteindelijke korting 23,6% van het totale aankoopbedrag.

Als deze klant de aankopen van de eerste twee dagen verwisselt, krijgt de klant meer korting.

- 4p 1 Bereken hoeveel procent korting de klant in dat geval krijgt. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Door de aankoopbedragen slim te kiezen, kan een klant het uiteindelijke percentage van de korting groter maken. Zo kan de klant uit het voorbeeld dit percentage bijvoorbeeld groter maken door de aankoopbedragen van de eerste en tweede dag te verwisselen, maar ook door op de derde dag niet voor € 319 aan te kopen, maar voor € 300.

Het is met deze actie mogelijk om een kortingspercentage op het totale aankoopbedrag te halen van meer dan 27%.

- 4p 2 Geef voor de eerste, tweede en derde dag een aankoopbedrag waarbij een korting op het totale aankoopbedrag van meer dan 27% behaald wordt. Licht je antwoord met een berekening toe.

Stapelweken

Een grote boekhandelketen organiseerde in het voorjaar van 2010 een andere kortingsactie. Klanten kregen een korting op de gekochte boeken die opliep naarmate ze meer boeken kochten. Bij 2 of 3 boeken was de korting 20%, bij 4 of 5 boeken 40% en bij 6 of meer boeken 60%.

Van een detectiveserie, waarvan de prijs € 5,50 per boek is, wil Fred 1 deel kopen, Floortje 2 delen en Ruud 4 delen.

- 4p **3** Bereken hoeveel geld zij besparen als ze deze boeken niet afzonderlijk maar samen kopen.

Jitske wil meerdere exemplaren van een kleurboek kopen voor een verjaardagsfeestje van haar buurmeisje. Zonder korting kost zo'n kleurboek € 3,00.

De regelmaat in de aanbieding brengt Jitske op het idee om hierbij een wiskundig model te ontwerpen. In dit model verandert zij iets aan de stapelkorting: zij gaat ervan uit dat er bij n boek(en) een korting geldt van $n \cdot 10\%$. De korting geldt voor maximaal 9 boeken.

Als Jitske 6 boeken zou kopen, zou ze zonder korting € 18,00 moeten betalen. De prijs met korting kan ze berekenen door 60% van de € 18,00 af te halen.

Jitske wil een formule opstellen waarmee ze de totale prijs P van n exemplaren van het kleurboek kan berekenen.

- 4p **4** Stel een dergelijke formule op. Licht je antwoord toe.

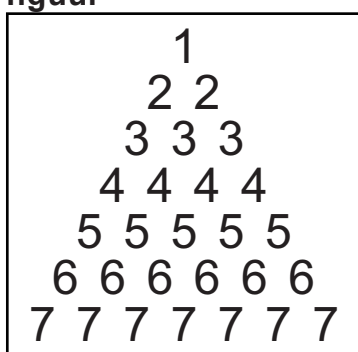
Tricoda

Het familiespel Tricoda is uitgeroepen tot Speelgoed van het jaar 2010. Dat gebeurde na een verkiezing die online werd gehouden. Een vakjury had daarvoor 5 spellen genomineerd. Op de verkiezingsite konden bezoekers hun stem uitbrengen op één van deze 5 spellen. Het spel dat de meeste stemmen kreeg, werd de winnaar van de verkiezing. Ruim 85 000 mensen bezochten deze site. Van hen bracht 18 procent een stem uit.

- 3p 5 Bereken hoeveel stemmen er ten minste naar de winnaar zijn gegaan.

Het spel Tricoda bestaat uit 28 stenen. Het cijfer 1 komt één keer voor, het cijfer 2 twee keer, het cijfer 3 drie keer en zo verder tot en met het cijfer 7, dat zeven keer voorkomt. Zie figuur.

figuur



Elke speler krijgt 3 stenen, die op een standaard worden geplaatst, waarbij de volgorde niet van belang is. De 3 stenen vormen zo een cijfertrio.

- 3p 6 Een speler heeft de steen met het cijfer 1 op zijn standaard.
Bereken het aantal mogelijke cijfertrio's op de standaard van deze speler.

De stenen staan zo op de standaards, dat elke speler wel de cijfertrio's van de andere spelers ziet, maar zijn eigen cijfertrio niet. Om het spel te winnen moet je, met behulp van vragenkaartjes, beredeneren welke drie getallen op je eigen standaard staan. Een voorbeeld van een spelsituatie zie je op de foto.

foto



In een beurt pakt een speler een kaartje met een vraag van een stapel, leest deze voor en beantwoordt de vraag.

In de tabel zie je een mogelijke spelsituatie:

tabel

Speler	Cijfertrio	Som
A	2 3 7	$2 + 3 + 7 = 12$
B	2 6 7	$2 + 6 + 7 = 15$
C	4 5 7	$4 + 5 + 7 = 16$
D	1 3 5	$1 + 3 + 5 = 9$

In het vervolg van deze opgave bekijken we deze spelsituatie nader.

Speler A pakt een kaart en leest voor: "Op hoeveel standaards is de som van de cijfers 12 of meer?" Hij geeft als antwoord: "Op 2 standaards (die ik zie)".

Spelers B en C weten nu dat de som van hun cijfers 12 of hoger is en speler D weet dat de som van zijn cijfers lager dan 12 is.

4p 7 Toon aan dat dit juist is.

Speler B pakt vervolgens een kaart en leest voor: "Op hoeveel standaards ziet u alleen maar even cijfers of alleen maar oneven cijfers?" Hij geeft als antwoord: "Op 1 standaard".

5p 8 Onderzoek of speler D op basis van de informatie van speler A en speler B zeker kan weten dat al zijn cijfers oneven zijn.

Aan het wereldkampioenschap voetbal 2010 in Zuid-Afrika deden 32 landen mee. Ze speelden eerst een groepsfase. Hierin speelden de landen in 8 poules van 4 teams. In zo'n poule speelt ieder team één wedstrijd tegen elk ander team. De twee hoogst eindigende teams per poule gingen door naar de knock-outfase. Deze overgebleven teams speelden allemaal één wedstrijd tegen een ander team en de verliezer moest naar huis. De winnaars gingen door en speelden weer één wedstrijd tot er uiteindelijk nog twee teams over waren. Die speelden de finale. Er was ook nog een wedstrijd om de derde plaats, de troostfinale.

In eerdere edities van het WK waren er minder deelnemende teams. Zo waren er in 1974 in West-Duitsland maar 16 teams. Die speelden volgens hetzelfde schema: eerst in poules van 4 en de twee hoogst eindigende teams naar de knock-outfase.

Er werden in 1974 natuurlijk veel minder wedstrijden gespeeld dan in 2010.

- 5p **9** Ga met een berekening na of de verdubbeling van het aantal deelnemende teams ook geleid heeft tot een verdubbeling van het totaal aantal wedstrijden.

Alle WK's kenden een groepsfase met poules van 4 teams. Dat hoeft natuurlijk niet. Er zouden ook meer teams in een poule kunnen zitten. Dat leidt dan wel tot een groter aantal poulewedstrijden.

$W(n)$ is het aantal wedstrijden in een poule met n teams. Er geldt nu de volgende formule:

$$W(n + 1) = W(n) + n$$

In deze formule is $W(n + 1)$ het aantal wedstrijden in een poule met $n + 1$ teams en $W(1) = 0$.

- 4p **10** Toon aan dat deze formule klopt voor $n = 10$.

Engelse sportstatistici hebben zich voor het toernooi van 2010 ook aan voorspellingen gewaagd. Zij keken voor de deelnemende landen naar het bruto binnenlands product per hoofd van de bevolking (bbp), de bevolkingsomvang (pop) en de wedstrijdervaring (erv). Dat leverde de volgende formule op:

$$GD(A, B) = 0,316 \cdot \log\left(\frac{pop(A)}{pop(B)}\right) + 0,334 \cdot \log\left(\frac{bbp(A)}{bbp(B)}\right) + 1,702 \cdot \log\left(\frac{erv(A)}{erv(B)}\right)$$

Hierbij is $GD(A, B)$ het aantal doelpunten dat land A naar verwachting meer zal scoren dan land B als zij tegen elkaar spelen. Dat aantal hoeft geen geheel getal te zijn en kan ook negatief zijn. Voor wedstrijdervaring koos men het aantal deelnames aan wereldkampioenschappen vóór dat van 2010.

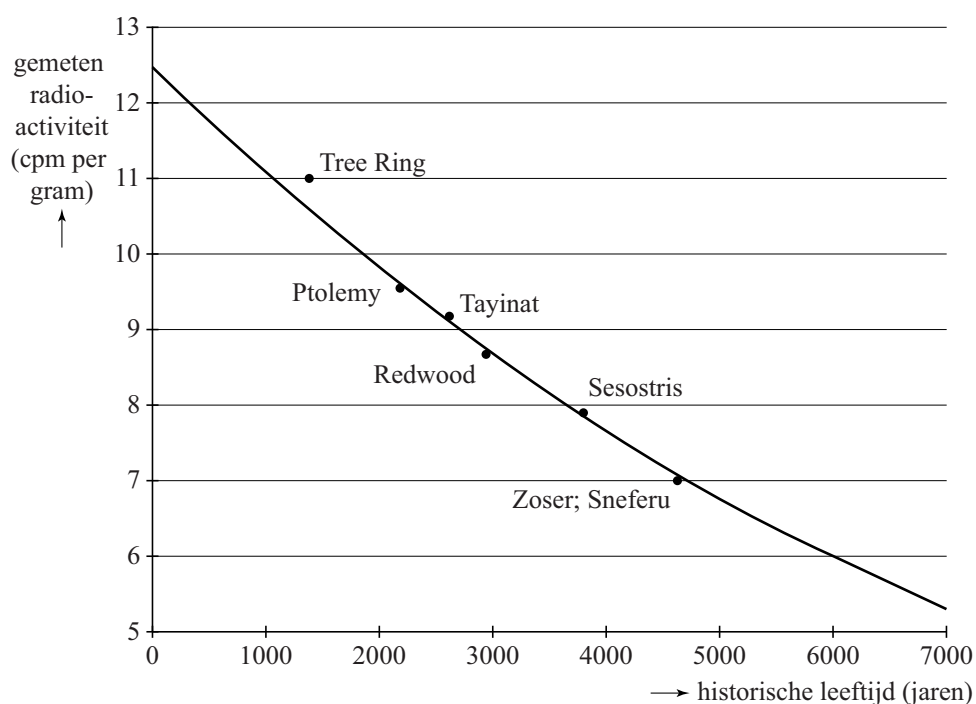
Voor Italië en Engeland zijn bbp en pop nagenoeg even groot, zodat alleen de wedstrijdervaring het verschil bepaalt. Vóór 2010 deed Italië 16 keer mee aan een wereldkampioenschap, Engeland 12 keer.

- 4p 11 Bereken met behulp van de formule het voorspelde aantal doelpunten dat Italië méér maakt als het tegen Engeland zou spelen. Rond het antwoord af op twee decimalen.

Archeologie

In de archeologie gebruikt men de C14-methode bij het vaststellen van de historische leeftijd (ouderdom) van bepaalde vondsten. Deze methode werd in 1949 ontwikkeld door de Amerikaanse scheikundige Libby, die hiervoor de Nobelprijs gekregen heeft. Volgens de theorie neemt de radioactiviteit van dood organisch materiaal exponentieel af en daarom kun je door de radioactiviteit te meten bepalen hoe oud een voorwerp is. De figuur hieronder komt uit een artikel van Libby uit 1949. Libby testte de C14-methode door deze te gebruiken op zes verschillende voorwerpen waarvan de historische leeftijd op een andere manier bekend was.

figuur



Langs de verticale as staat de gemeten radioactiviteit in cpm (counts per minute) per gram materiaal. Dit is een maat voor de hoeveelheid C14. Langs de horizontale as staat de historisch leeftijd van het voorwerp in jaren.

Volgens de theorie neemt de gemeten radioactiviteit exponentieel af. De grafiek gaat door de punten (0; 12,5) en (6000; 6). Hiermee kan men de groeifactor berekenen.

- 3p 12 Bereken met deze punten de groeifactor per jaar in 7 decimalen nauwkeurig.

Voor het vervolg van de opgave gaan we uit van de formule:

$$N = 12,5 \cdot 0,999878^t$$

Hierin is N de gemeten radioactiviteit van het voorwerp in cpm per gram en t is de historische leeftijd volgens de C14-methode van het voorwerp in jaren.

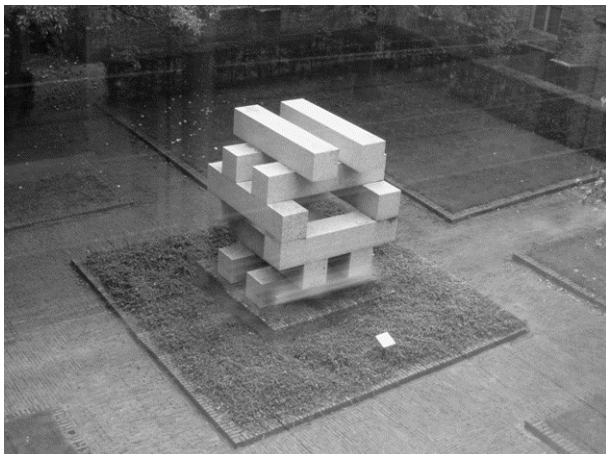
De punten in de figuur stellen de metingen aan de voorwerpen voor. Het punt "Ptolemy" hoort bij een stuk hout van een doodskist van een Egyptische mummie. Deskundigen schatten dat deze doodskist uit ongeveer 200 voor Chr. dateert. Voor dit hout werd in 1949 een radioactiviteit van 9,5 cpm per gram gemeten.

- 4p **13** Bereken het verschil tussen de historische leeftijd volgens de C14-methode en de schatting van de deskundigen.

12 balken

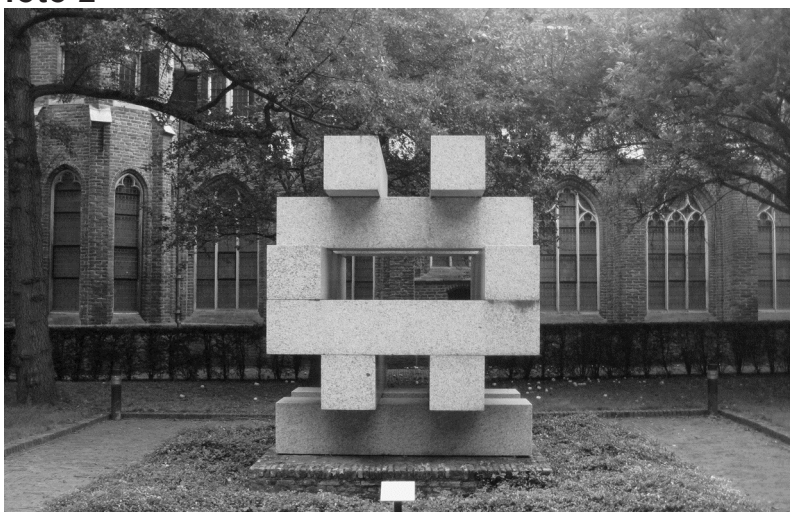
Op de binnenplaats van het museum Catharijneconvent in Utrecht staat een kunstwerk van Max Bill. Zie foto 1.

foto 1



Het kunstwerk is opgebouwd uit 12 balken. Deze balken hebben alle dezelfde afmetingen: 42 bij 42 bij 210 cm. Elke laag van het kunstwerk bestaat uit twee horizontale, evenwijdig geplaatste balken. Op foto 2 zie je het vooraanzicht van het kunstwerk.

foto 2



Op de uitwerkbijlage staat het vooraanzicht afgebeeld.

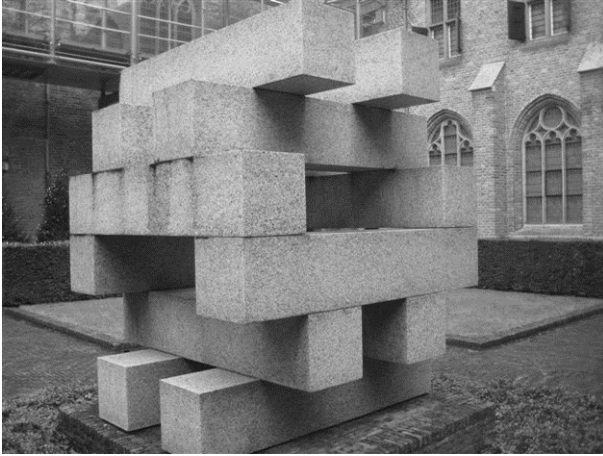
- 6p **14** Teken op de uitwerkbijlage een zijaanzicht en het bovenaanzicht van dit kunstwerk.

Het kunstwerk past precies in een doos van 210 bij 210 bij 252 cm.

- 4p **15** Bereken welk percentage van de inhoud van zo'n doos ingenomen wordt door de 12 balken.

Het kunstwerk is geplaatst op een verhoging van 20 cm. In foto 1 zie je dat de foto van bovenaf is genomen. Foto 3 is van een andere hoogte genomen. Deze foto staat op de uitwerkbijlage.

foto 3



4p **16** Onderzoek op welke hoogte in cm de foto is genomen.

Luchtverversing in klaslokalen

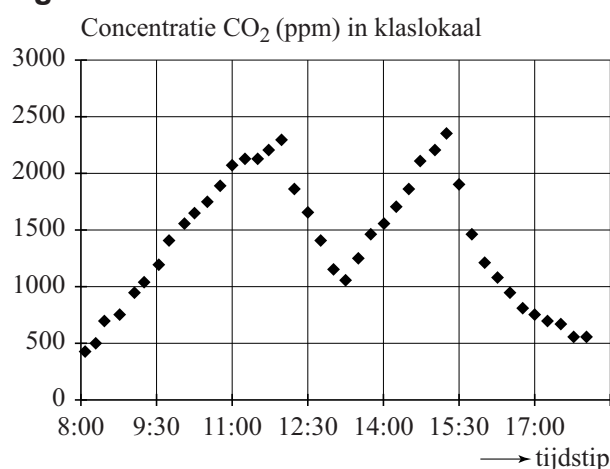
Uit CO₂-metingen blijkt dat in 80% van de klaslokalen van basisscholen de CO₂-concentratie te hoog is. De CO₂-concentratie wordt gemeten met een CO₂-meter (zie foto). Als de CO₂-concentratie te hoog is, kunnen gezondheidsklachten als hoofdpijn, vermoeidheid en concentratieproblemen ontstaan. Het Ministerie van OCW heeft 'Het Frisse Scholenproject' in het leven geroepen met als doel scholen te stimuleren minder energie te verbruiken en het binnenmilieu te verbeteren.

foto



De CO₂-concentratie wordt gemeten in ppm. De afkorting ppm staat voor parts per million, oftewel het aantal deeltjes per miljoen. Zodra de leerkracht en leerlingen van een basisschool 's ochtends het lokaal binnenkomen, gaat de CO₂-concentratie omhoog. Iedere 15 minuten meet de CO₂-meter de concentratie. In figuur 1 zie je hoe de CO₂-concentratie gedurende de dag verloopt. Deze figuur staat ook vergroot afgedrukt op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Afhankelijk van de CO₂-waarde brandt op de CO₂-meter een groen, oranje of rood lampje. Dit betekent het volgende:

Groen: CO₂-waarde < 1000. Er is voldoende ventilatie. Als het haalbaar is, streef je naar een waarde van 800 ppm. Lager hoeft niet, want dan kan er onnodig energieverlies zijn.

Oranje: 1000 ≤ CO₂-waarde < 1400. Er wordt matig geventileerd. Het is nu wel aan te raden om op zoek te gaan naar een manier om de klas beter te ventileren.

Rood: CO₂-waarde ≥ 1400. Er is onvoldoende ventilatie. Er is een reële kans op gezondheidsklachten en negatieve effecten op leerprestaties zijn te verwachten.

Voor het klaslokaal van de basisschool van figuur 1 is te berekenen hoe lang daar de verschillende lampjes hebben gebrand vanaf binnenkomst van de leerlingen om 8:00 uur tot 15:15 uur als de schooldag voor de leerlingen ten einde is.

- 4p 17 Bereken hoeveel procent van de schooldag er geen groen lampje brandt. Gebruik de figuur op de uitwerkbijlage.

Volgens figuur 1 neemt de CO₂-concentratie vrijwel constant toe als er leerlingen in een lokaal zitten, immers de stijgende delen van de grafiek kun je benaderen met rechte lijnen.

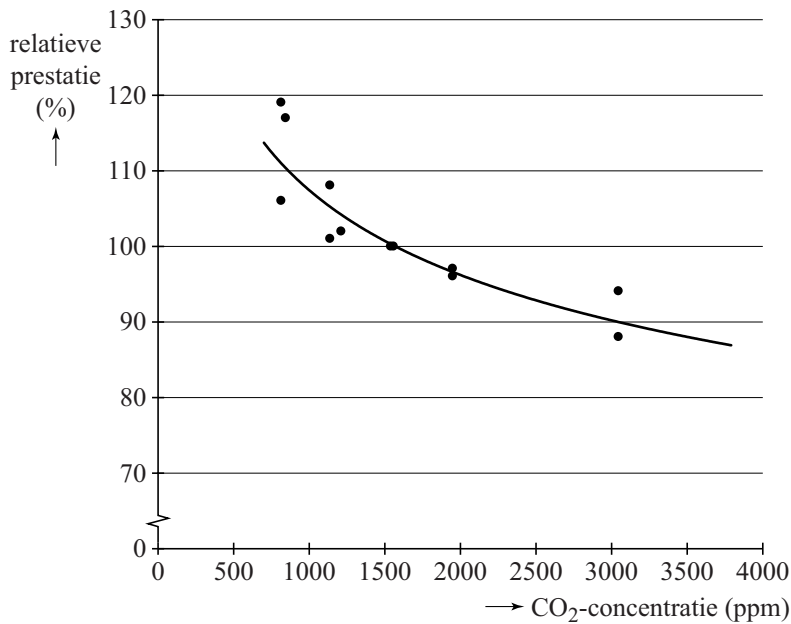
Als een leerkracht de klas na 15:15 uur langer in het lokaal houdt, zal de CO₂-concentratie steeds verder oplopen. Hoewel het rode lampje al enige tijd brandt, wil de leerkracht weten hoe lang hij de klas nog in het lokaal kan houden zonder dat de CO₂-concentratie boven de 3000 ppm komt.

- 4p 18 Bepaal tot hoe laat de leerkracht de klas na 15:15 uur in het lokaal kan houden. Gebruik de figuur op de uitwerkbijlage.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Uit verschillende onderzoeken is duidelijk geworden dat een verhoogde CO₂-concentratie de leerprestatie van leerlingen negatief beïnvloedt. In figuur 2 zijn de gegevens uit een aantal onderzoeken weergegeven. De gemiddelde CO₂-concentratie in deze onderzoeken is 1500 ppm. Hoewel dit boven de norm is, stellen de onderzoekers bij deze waarde de prestatie-index op 100%. Dit betekent dat in klaslokalen waarbij wel aan de norm is voldaan, de relatieve prestatie groter is dan 100%. In figuur 2 is te zien dat bij een hogere CO₂-concentratie de relatieve prestatie afneemt.

figuur 2



In figuur 2 is de grafiek van $y = c \cdot x^{-0,159}$ getekend, waarbij c een constante is. Deze grafiek past redelijk bij de meetgegevens van de verschillende onderzoeken.

Door de waarde van c te bepalen is het mogelijk om met behulp van de formule te onderzoeken vanaf welke CO₂-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

- 5p **19** Toon aan dat c ongeveer gelijk is aan 320 en bereken met de formule vanaf welke CO₂-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.
- 3p **20** Schrijf de formule $y = c \cdot x^{-0,159}$ als een breuk en beredeneer daarmee dat de grafiek dalend is.