

Examen VWO

2012

tijdvak 1
dinsdag 22 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 19 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES volgens syllabus pilot

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g \log a + {}^g \log b = {}^g \log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g \log a - {}^g \log b = {}^g \log \frac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g \log a^p = p \cdot {}^g \log a$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^g \log a = \frac{p \log a}{p \log g}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

Schroefas

Een belangrijk onderdeel van een boot is de schroefas. Deze as wordt door de motor in beweging gebracht. Daardoor gaat de schroef van het schip draaien en dan kan de boot varen. De motor, de schroefas en de schroef samen noemen we hier het **aandrijfsysteem** van de boot.

foto

het plaatsen van een schroefas



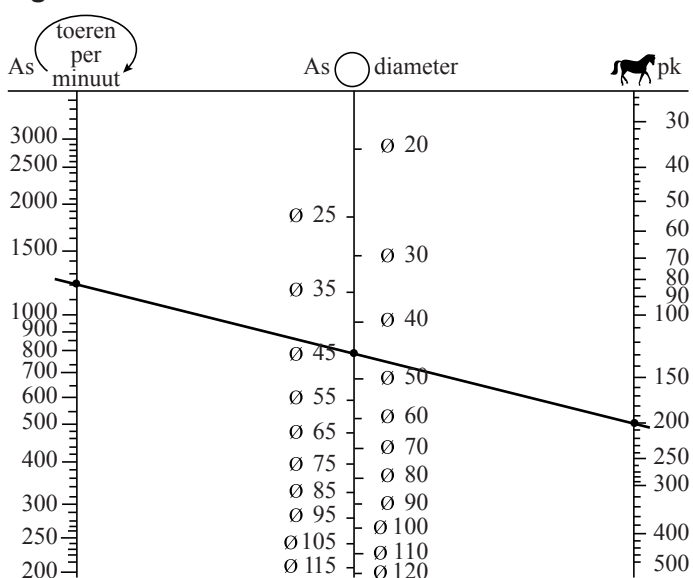
De minimale diameter van de schroefas die nodig is, hangt af van de prestaties die de motor van deze boot kan leveren. In figuur 1 zie je een grafiek om de minimale diameter van de as vast te stellen. Figuur 1 vind je ook vergroot op de uitwerkbijlage.

In dit zogenoemde nomogram zie je drie schalen:

- de linkerschaal: het aantal toeren (of omwentelingen) per minuut (tpm). Dit wordt ook wel het toerental genoemd;
- de middelste schaal: de diameter van de schroefas, gemeten in mm;
- de rechterschaal: het vermogen, uitgedrukt in paardenkracht (pk).

Zoals je kunt zien, is elk van de drie schalen niet-lineair.

figuur 1



Wanneer je een lijn trekt door de drie schalen kun je een van de drie waarden bepalen als je de andere twee weet. Zo hoort volgens figuur 1 bij een motor van 200 pk en 1200 tpm een asdiameter van (ten minste) 45 mm.

Python-Drive is een bedrijf dat aandrijfsystemen maakt. Op hun website staat dat alle systemen van het type P60-K (70 pk, 2600 tpm) een asdiameter hebben tussen 30 en 40 mm.

- 3p 1 Onderzoek met behulp van figuur 1 op de uitwerkbijlage of de asdiameter van dit type groot genoeg is.

In het voorbeeld in figuur 1 zie je een motor van 200 pk en 1200 tpm met een bijbehorende asdiameter van 45 mm. Er zijn ook wel motoren te vinden met een ander vermogen en een ander toerental waarbij dezelfde asdiameter van 45 mm hoort. Dan valt op dat een groter vermogen een hoger toerental oplevert.

- 3p 2 Leg uit hoe je dat in figuur 1 kunt zien.

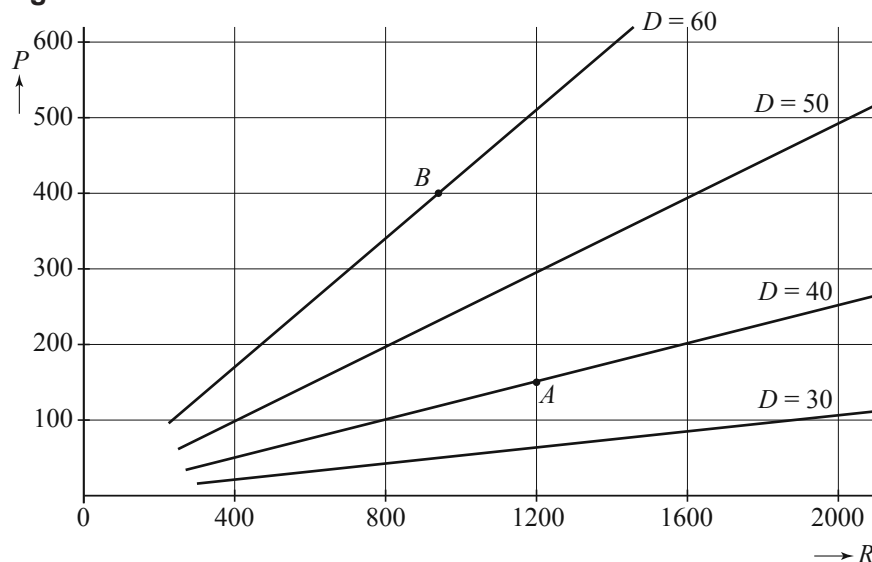
Lloyd's is een organisatie die zich bezighoudt met het opstellen van regels voor de controle op de zeewaardigheid van schepen. Volgens een van deze regels moet de diameter D van de schroefas voldoen aan de volgende formule:

$$D = 79,78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$$

In deze formule is D uitgedrukt in mm, het vermogen P uitgedrukt in pk en het toerental R in tpm.

In een tijdschrift dat gaat over aandrijfsystemen kun je figuur 2 tegenkomen. In deze figuur zie je voor enkele waarden van D het verband getekend tussen de bijbehorende waarden van P en R .

figuur 2



In zo'n figuur kan elk aandrijfsysteem met een punt worden weergegeven. Zo hoort het punt A bij het aandrijfsysteem met waarden (1200, 150, 40).

In figuur 2 is punt B aangegeven. Bij dit aandrijfsysteem is het vermogen goed af te lezen. De waarde van het toerental is echter niet nauwkeurig af te lezen, maar met behulp van de formule kunnen we deze wel berekenen.

- 4p **3** Bereken met behulp van de formule het toerental dat bij dit aandrijfsysteem hoort.

In enkele gevallen komt het voor dat de asdiameter al bekend is, bijvoorbeeld wanneer alleen de motor moet worden vervangen. Dan is het handig om de

formule $D = 79,78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$ anders te schrijven.

We gaan uit van een asdiameter van 30 mm.

- 4p **4** Herschrijf de formule hierboven zo dat je een formule krijgt waarin P uitgedrukt wordt in R .

Hooikoorts

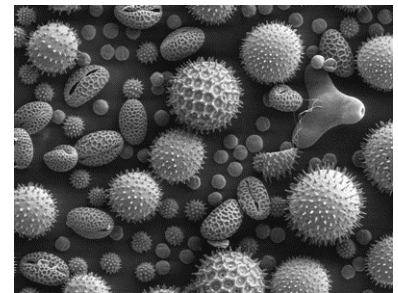
Hooikoorts is een vervelende allergische aandoening waar veel mensen last van hebben. Iemand die last heeft van hooikoorts, reageert op zogenoemde pollen in de lucht, die afkomstig zijn van bomen en grassen die in bloei staan. De allergische reactie veroorzaakt naast irritatie aan ogen, neus en keel ook hoest- en niesbuien.

PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht.

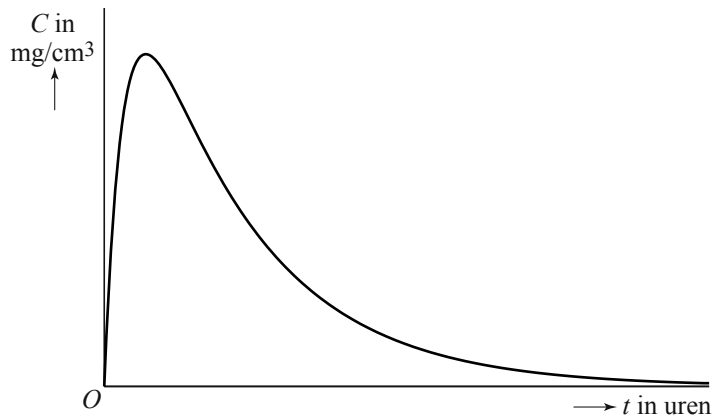
Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af omdat het door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan noemen we C . In figuur 1 zie je een schets van de grafiek van C .

foto

uitvergroete pollen



figuur 1



Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op die dit verloop redelijk benadert:

$$C_1(t) = \frac{16t}{190t^2 + 60}$$

Hierin is C_1 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t de tijd in uren na het innemen van de pil.

- 6p **5** Bereken met behulp van de afgeleide van C_1 na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

Een andere onderzoeker stelt een geheel andere formule op voor het verband tussen de tijd na het innemen van de pil en de concentratie werkzame stof:

$$C_2(t) = 0,13(e^{-0,65t} - e^{-3,9t})$$

Hierin is C_2 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t weer de tijd in uren na het innemen van de pil.

Aan de schets van de grafiek is te zien dat de werkzame stof na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen is. Met een redenering kun je aantonen dat elk van beide formules dit proces beschrijft.

- 6p **6** Beredeneer aan de hand van de formules van C_1 en C_2 dat de werkzame stof volgens **beide** formules na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed is verdwenen.

Hoewel de grafieken van C_1 en C_2 beide erg op de grafiek in figuur 1 lijken, verschillen de momenten waarop het maximum bereikt wordt wel van elkaar.

- 6p **7** Onderzoek met behulp van de afgeleide C'_2 of het maximum van C_2 eerder of later dan het maximum van C_1 optreedt.

Waardepunten

De verpakkingen van Douwe Egberts koffie zijn voorzien van (waarde)punten die je kunt sparen. Met deze punten kun je bepaalde producten kopen. Als je niet voldoende waardepunten hebt gespaard voor een product, dan kun je een bedrag bijbetalen en zo het product toch aanschaffen.

Marjolein heeft 3600 punten gespaard. Ze wil haar theeservies uitbreiden en kan kiezen uit:

Theeglas	700 punten
Theelepeltje	450 punten
Theekop en schotel	600 punten

Ze wil al haar punten uitgeven en niets bijbetalen. Het blijkt dat er dan 4 verschillende combinaties mogelijk zijn.

- 4p **8** Welke verschillende combinaties van artikelen kan Marjolein met precies 3600 punten aanschaffen? Licht je antwoord toe.

Op de website van Douwe Egberts (DE) stond tot 2009 het volgende:

- per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- daarna zijn per artikel iedere 100 punten € 0,50 waard;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

Voorbeeld

Kop en schotel van hiernaast kosten samen € 5,-.
Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor € 5,- of gratis meenemen voor 800 punten. Ook kun je 400 punten inleveren en nog € 2,- bijbetalen.

foto



Bij DE kost een gebaksbordje € 9,30 en een taartplateau € 46,50.

Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12 000 waardepunten en wil zo min mogelijk euro's bijbetalen.

- 4p **9** Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

Er zijn ook andere spaarsystemen te bedenken, bijvoorbeeld een systeem waarbij klanten die veel punten sparen daarvoor iets meer beloond worden. Zo bedenkt Alwin, een wiskunde A-leerling uit 6V, een ander systeem. Zie de tabel.

tabel

aantal punten	100	1100	2100	3100	5100	7100	9100
waarde in euro's	1,50	2,14	3,06	4,37	8,90	18,15	37,01

Je kunt in de tabel zien dat er geen lineair verband is tussen het aantal punten en de waarde in euro's.

In het systeem van Alwin is er sprake van een (bij benadering) exponentieel verband.

- 4p **10** Laat voor alle waarden in de tabel zien dat er inderdaad (bij benadering) sprake is van een exponentieel verband en bereken de groeifactor per 1000 punten in drie decimalen nauwkeurig.

Behendigheid

In Nederland wordt er verschil gemaakt tussen kansspelen en behendigheidsspelen. Een spel als roulette, waarbij de speler geen enkele invloed kan uitoefenen op het verloop van het spel (en dus ook niet op zijn winst-/verlieskansen) is duidelijk een kansspel. Een spel als schaken echter waarbij een speler zijn winst-/verlieskansen zelf kan beïnvloeden door oefening is natuurlijk een behendigheidsspel. Er zijn echter ook verschillende spelen waarbij niet meteen vast te stellen is om welke categorie het gaat. Zo kun je je bij pokeren afvragen of dit een kansspel of een behendigheidsspel is. De onderzoekers Borm en Van der Genugten hebben een methode ontwikkeld om bij elk spel dit onderscheid te maken. Daartoe hebben ze enkele begrippen gedefinieerd:

- het **toevalseffect** TE
- het **leereffect** LE

Het toevalseffect is een getal dat uitdrukt in welke mate het toeval een rol speelt bij het spel: het toevalseffect is groot als het toeval een grote rol speelt. Het leereffect is een getal dat aangeeft in hoeverre een grotere ervaring helpt bij het spelen van het spel: het leereffect is groter naarmate de ervaring een grotere bijdrage levert aan de uitkomst van het spel.

Beide getallen, toevalseffect TE en leereffect LE , zijn (natuurlijk) nooit negatief. Ze zijn ook nooit beide tegelijkertijd 0.

Hoe die getallen TE en LE bepaald worden, komt verderop in deze opgave aan de orde. Eerst kijken we naar een formule die Borm en Van der Genugten gemaakt hebben met die twee begrippen. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$B = \frac{LE}{LE + TE}$$

Het getal B dat met deze formule wordt berekend, noemen de onderzoekers het **behendighedsniveau**. Ook al weten we nu nog niet hoe TE en LE bepaald worden, toch kunnen we wel iets zeggen over de mogelijke waarde van het getal B .

1. B is nooit negatief;
2. B is ten hoogste 1;
3. Als twee spelen hetzelfde positieve leereffect hebben, is B groter bij het spel met het kleinere toevalseffect;
4. Als twee spelen hetzelfde positieve toevalseffect hebben, is B groter bij het spel met het grotere leereffect.

- 3p **11** Laat met behulp van de formule en de omschrijvingen van TE en LE zien dat de bovenstaande beweringen 1, 2 en 3 juist zijn.

De bovenstaande formule voor B is ook te schrijven als $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$.

- 3p **12** Toon aan dat deze formule ook geschreven kan worden als $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$.

Om de vierde bewering “Als twee spelen hetzelfde positieve toevalseffect hebben, is B groter bij het spel met het grotere leereffect” na te gaan, kun je gebruik maken van de formule $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$.

- 3p 13 Leg met behulp van $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$ uit dat de vierde bewering inderdaad juist is.

Om het behendighedsniveau van een spel te bepalen moet je dus een methode vaststellen om TE en LE van dat spel te berekenen. Borm en Van der Genugten hebben dat bij verschillende spelen gedaan en hebben daarna ook een grens vastgesteld waarmee ze een onderscheid konden maken tussen een kansspel en een behendigheidsspel. Die grens ligt volgens de onderzoekers bij $B = 0,20$. Als B groter is dan 0,20 heb je te maken met een behendigheidsspel. Deze grens van 0,20 betekent dat in een kansspel het leereffect wel een rol mag spelen, maar niet te veel. Het leereffect moet beduidend kleiner zijn dan het toevalseffect.

Op 3 maart 1998 concludeerde de Hoge Raad dat poker een kansspel is (en daarom alleen mag worden gespeeld in door de overheid gecontroleerde casino's).

foto

pokeren een kansspel?



De onderzoekers hebben in samenwerking met het televisieprogramma Nieuwslicht een experiment uitgevoerd om na te gaan of deze beslissing van de Hoge Raad wel terecht was. In het verslag over dit experiment schrijven zij op welke manier zij het behendighedsniveau van het pokerspel 'Texas Hold'Em' hebben bepaald. Zij deelden de spelers in drie typen in:

- de beginner, die alleen de regels van het spel kent (zijn winst in het spel wordt alleen door geluk bepaald);
- de ervaren speler, die veel ervaring heeft met het spel (zijn winst wordt bepaald door geluk en kunde);
- de fictieve speler¹⁾, een ervaren speler die ook informatie heeft over toevalselementen in het spel, bijvoorbeeld welke kaarten de andere spelers hebben en welke kaarten er op tafel zullen komen te liggen (zijn winst wordt door geluk, kunde en informatie bepaald).

Met behulp hiervan definieerden Borm en Van der Genugten TE en LE :

$$TE = \text{winst van de fictieve speler} - \text{winst van de ervaren speler}$$

$$LE = \text{winst van de ervaren speler} - \text{winst van de beginner}$$

- 3p **14** Leg uit dat TE groter is naarmate het toeval een grotere rol speelt bij de uitkomst van het spel.

In een ander experiment, vergelijkbaar met dat van Nieuwslicht, speelden een beginner, een ervaren speler en een fictieve speler aan aparte tafels onder dezelfde omstandigheden elk drie rondes. Allen kregen bij het begin van iedere ronde evenveel geld om in te kunnen zetten. Na die drie rondes werd de stand opgemaakt van de winst per ronde. Zie de tabel.

tabel

winst per ronde in euro's

	beginner	ervaren speler	fictieve speler
ronde 1	-28	-11	10
ronde 2	30	90	161
ronde 3	-32	1	219

Om na te gaan of poker wel of niet als kansspel gezien moet worden, kun je de totale winst van ieder van de drie spelers in de tabel berekenen en daarmee het behendighedsniveau B bepalen van het pokerspel 'Texas Hold'Em'.

- 3p **15** Is het pokerspel 'Texas Hold'Em' volgens de methode van Borm en Van der Genugten een kansspel als je uitgaat van de tabel? Licht je antwoord toe.

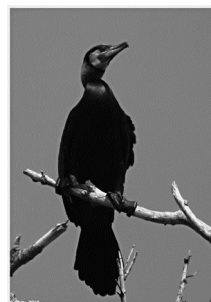
noot 1 Die fictieve speler bestond alleen in dit experiment: hij verkreeg zijn extra informatie door het gebruik van een 'oortje' waarmee hem informatie doorgegeven werd die in een normaal spel onbekend is voor een speler.

Aalscholvers

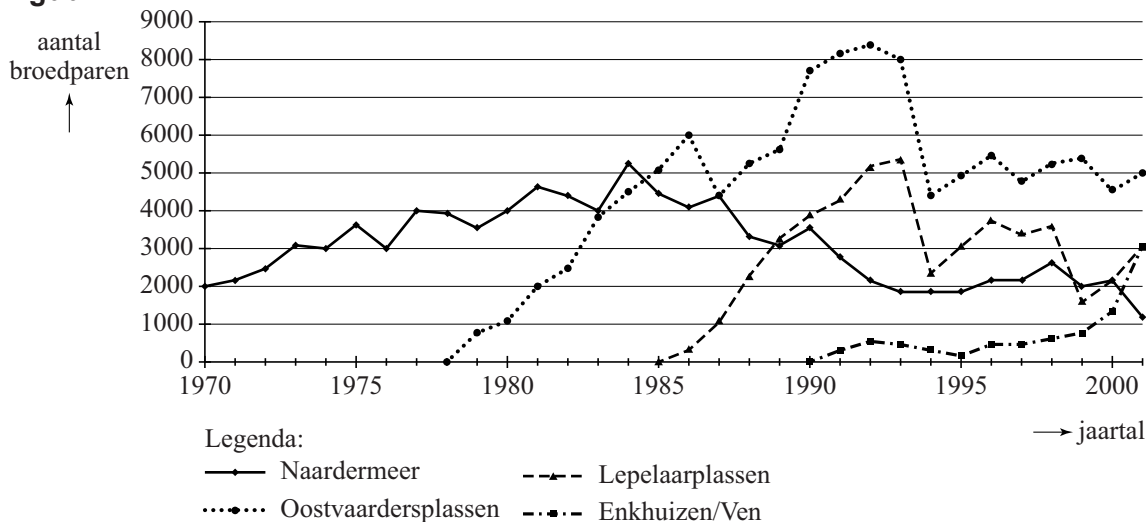
Op de foto hiernaast zie je een aalscholver. Aalscholvers leven in de buurt van meren en voeden zich met vis.

foto

In figuur 1 zie je de aantallen broedparen van vier verschillende kolonies (groepen) aalscholvers. Figuur 1 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.



figuur 1

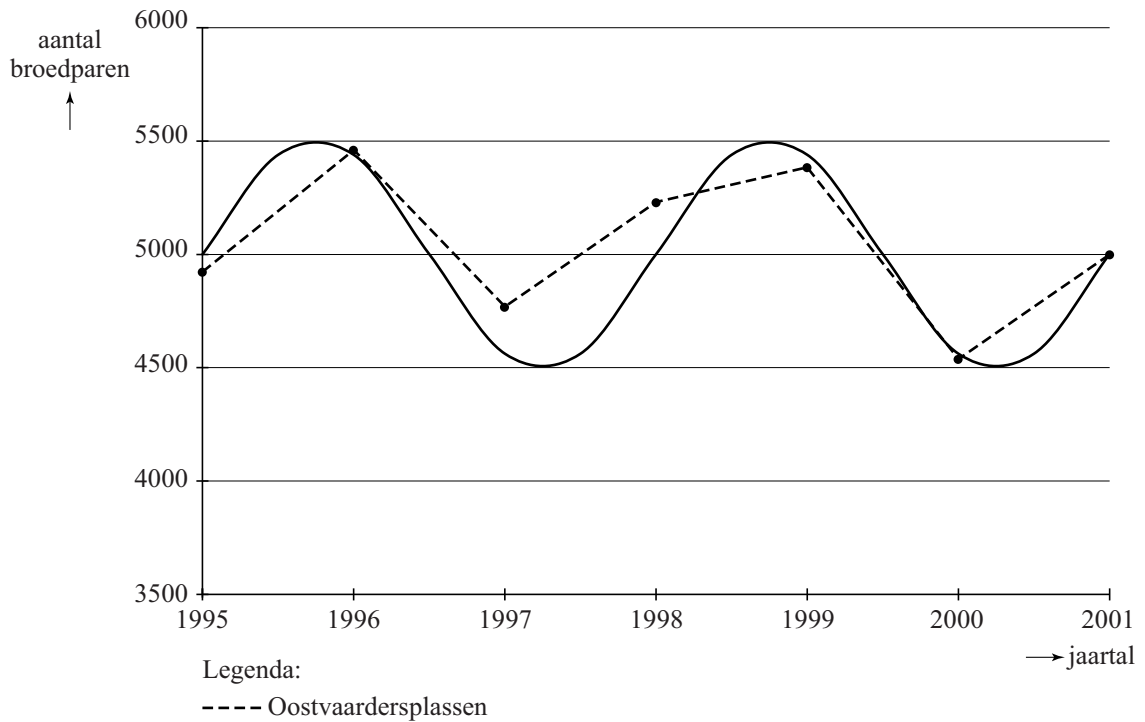


In 1978 verschenen de eerste aalscholvers bij de Oostvaardersplassen en in 1985 bij de Lepelaarplassen. Beide kolonies vertoonden in het begin een periode van snelle groei, namelijk de periode 1978-1992 voor de Oostvaardersplassenkolonie en de periode 1985-1993 voor de Lepelaarplassenkolonie. We vergelijken de gemiddelde groei per jaar in de periode 1978-1992 voor de Oostvaardersplassenkolonie met de gemiddelde groei per jaar in de periode 1985-1993 voor de Lepelaarplassenkolonie. De terugval in 1987 doet vermoeden dat de gemiddelde groei per jaar van de aantallen in de Oostvaardersplassenkolonie kleiner zal zijn dan die in de Lepelaarplassenkolonie.

4p **16** Onderzoek met een berekening of dit inderdaad zo is en geef aan hoe je dit zonder berekening ook in de grafiek kunt zien. Gebruik daarbij de uitwerkbijlage.

Na een sterke terugval in 1994 vertonen de aantallen in de Oostvaardersplassenkolonie een periodieke schommeling. Zie figuur 2. Zo'n schommeling kan bijvoorbeeld ontstaan doordat een slecht broedseizoen gevolgen heeft voor een aantal jaren later, als deze vogels volwassen worden en zelf jongen krijgen.

figuur 2

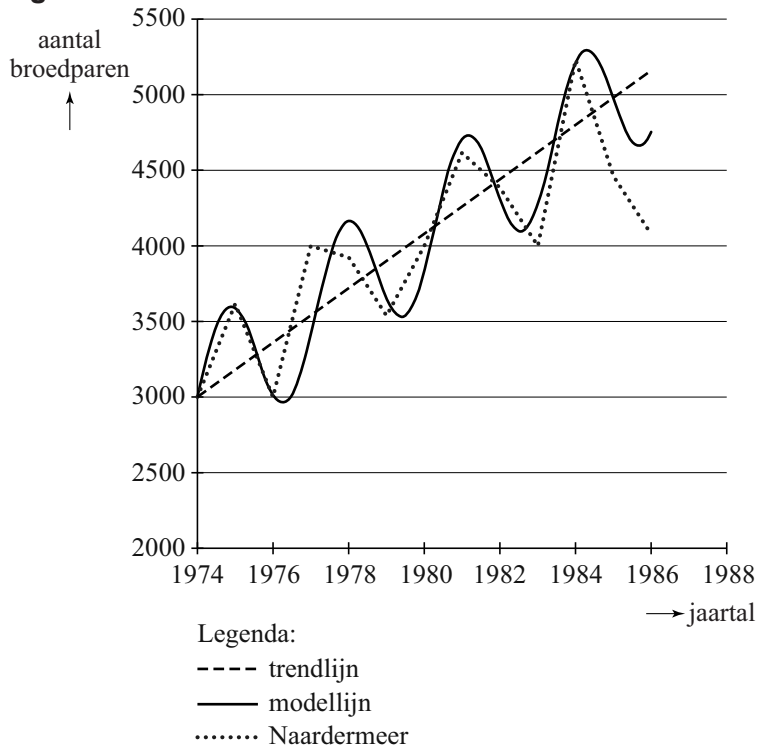


Men kan de aantallen broedparen van de Oostvaardersplassenkolonie van 1995 tot en met 2001 benaderen met een sinusfunctie. In figuur 2 zie je de grafiek van deze sinusfunctie.

- 4p **17** Stel een formule op die de sinusgrafiek van figuur 2 zo goed mogelijk benadert. Neem t in jaren met $t = 0$ in 1995. Licht je antwoord toe.

De kolonie bij het Naardermeer bestaat al langer. In de periode van 1974 tot en met 1985 is hier ook een schommeling van de aantallen te zien. Bovendien nemen de aantallen langzaam toe. In figuur 3 is de ontwikkeling van de aantallen benaderd met een modellijn. Figuur 3 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 3



Bij de modellijn kan men een formule opstellen van de vorm:

$$N = p + q \cdot t + a \cdot \sin(b \cdot t)$$

Hierin is t in jaren met $t = 0$ in 1974.

Het gedeelte $p + q \cdot t$ betekent dat de evenwichtsstand niet constant is, maar stijgt volgens een rechte lijn: de trendlijn. De waarden van p , q , a en b in deze formule kan men met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage berekenen.

6p **18** Bereken de waarden van p , q , a en b .

Topjaar voor appel en peer

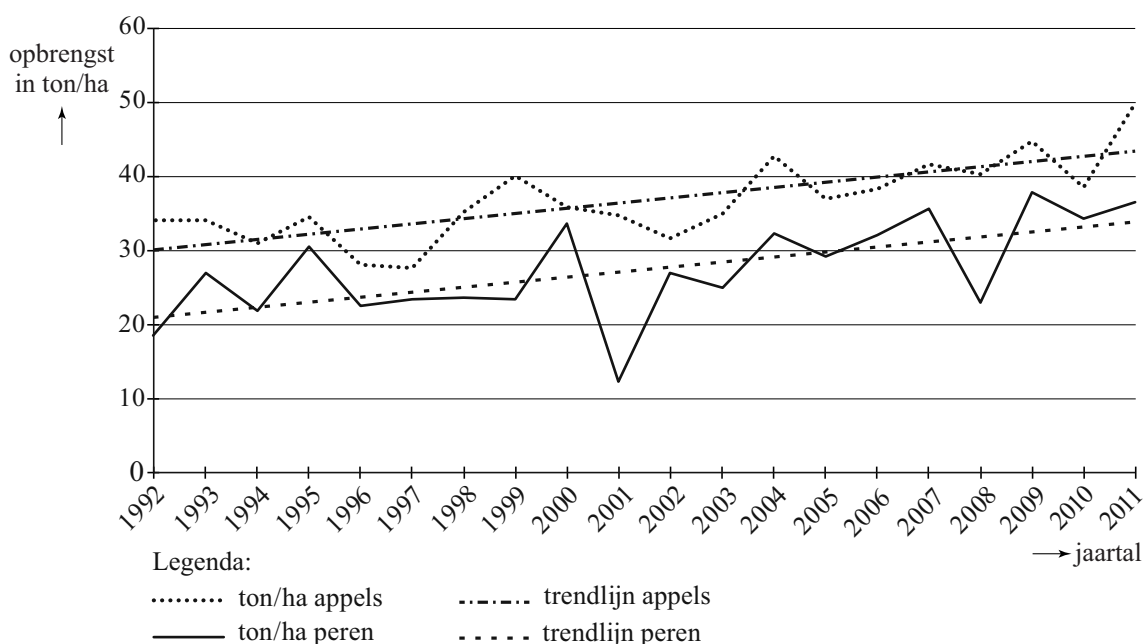
In september 2011 meldde het CBS dat de verwachtingen voor de appeloogst en de perenoogst voor 2011 erg gunstig waren. Men verwachtte dat de totale opbrengst van de appelteelt in Nederland circa 400 miljoen kilogram zou zijn. Voor de totale perenoopbrengst hield men rekening met een slordige 300 miljoen kilogram.

In deze opgave houden we ons bezig met de opbrengst van beide fruitsoorten door de jaren heen. We gebruiken daarvoor twee aspecten: de gemiddelde opbrengst in ton (1000 kg) per hectare van een fruitsoort en de totale oppervlakte van de boomgaarden van een fruitsoort.

In onderstaande figuur, ook afkomstig van het CBS, zie je de opbrengst in ton per hectare voor ieder jaar vanaf 1992 tot en met 2011 weergegeven, zowel voor appels als peren. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur

Opbrengst appels en peren in ton per hectare



Uit de figuur blijkt dat de opbrengst per hectare van zowel appels als peren een stijgende trend vertoont. Deze trend zou je kunnen beschrijven met een lineair verband door een rechte lijn te trekken die de gegevens redelijk benadert. In de figuur zijn die trendlijnen getrokken voor de opbrengst van appels in ton per hectare en de opbrengst van peren in ton per hectare.

Hieronder een citaat uit een publicatie van het CBS:

Oppervlakte appelbomen in bijna 20 jaar meer dan gehalveerd

De oppervlakte appelbomen daalde in 2011 tot 8,4 duizend hectare en is nog maar twee procent groter dan de oppervlakte perenbomen. De oppervlakte perenbomen steeg in 2011 tot 8,2 duizend hectare. In 1992 was er nog 17 duizend hectare beplant met appelbomen. De oppervlakte perenbomen is in diezelfde periode met 50 procent toegenomen. Als de ontwikkeling van de afgelopen jaren doorzet, zal de oppervlakte perenbomen in Nederland in 2012 voor het eerst groter zijn dan de oppervlakte appelbomen.

Uit dit citaat valt te concluderen dat de oppervlakte perenbomen stijgt terwijl die voor appelbomen daalt. Ook deze trends kun je lineair benaderen. De oppervlakte perenbomen is waarschijnlijk al in 2012 groter dan de oppervlakte appelbomen. Dat geldt niet voor de totale opbrengst. Het zal nog wel even duren voordat de totale opbrengst van peren groter is dan die van appels.

We gaan er in deze opgave van uit dat de trends alle vier lineair zijn.

- 8p **19** Onderzoek, uitgaande van bovengenoemde trendmatige ontwikkelingen, in welk jaar de totale perenopbrengst voor het eerst groter zal zijn dan de totale appelopbrengst. Maak eventueel gebruik van de figuur op de uitwerkbijlage.