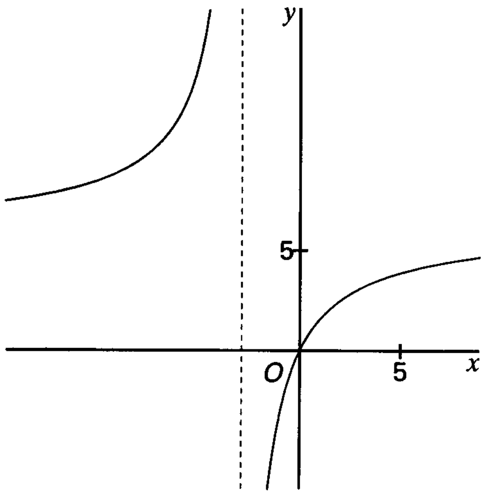
Opgave 1

De functie f is gegeven door

$$f(x) = \frac{6x}{x+3}$$

In figuur 1 is de grafiek van f getekend.

figuur 1



6p **1** □ Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $O(0, 0)$.

3p **2** □ Onderzoek of er punten van de grafiek van f op de lijn $y = 6$ liggen.

5p **3** □ Bereken voor welke waarden van $x > 0$ geldt: $6 - f(x) < 0{,}1$

De functie g is gegeven door

$$g(x) = \frac{6x^2}{x^2+3}$$

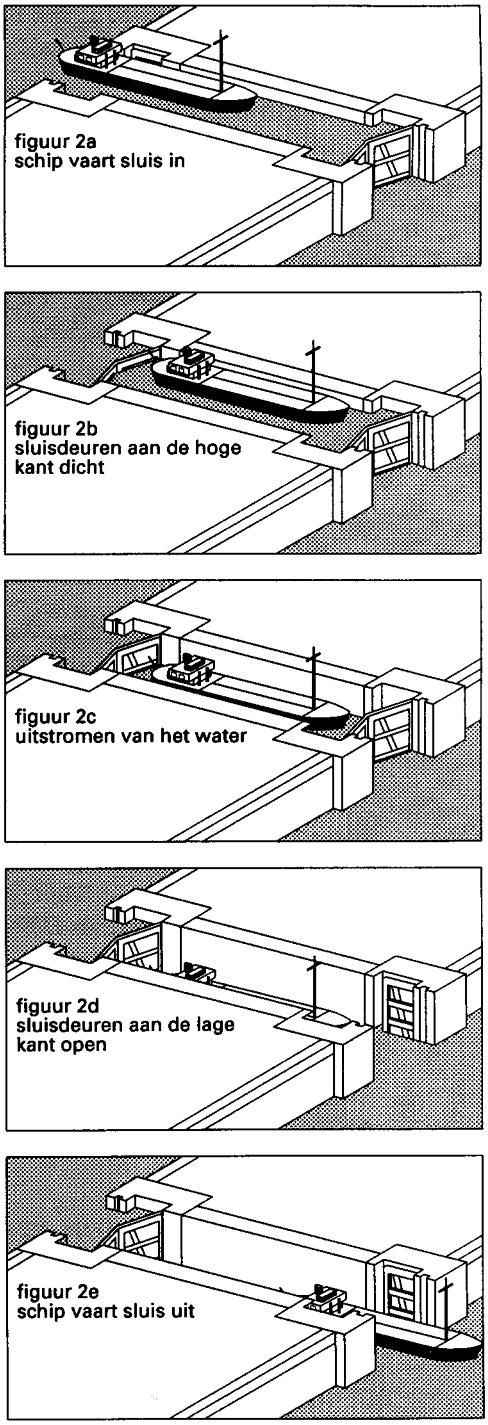
5p **4** □ Bereken de uiterste waarde van $g(x)$ en onderzoek of dit een maximum of een minimum is.

3p **5** □ Welke waarden kan $g(x)$ aannemen? Geef een toelichting.

Opgave 2 De schutsluis

Schutsluizen maken scheepvaartverkeer mogelijk tussen waterwegen met verschillende waterhoogten. In een schutsluis kunnen schepen 'zakken' van een hoog naar een laag niveau of 'stijgen' van een laag naar een hoog niveau. Dit wordt schutten genoemd.
In de figuren 2a t/m 2e is schematisch weergegeven hoe een schutsluis werkt als een schip van 'hoog' naar 'laag' wordt geschut.

figuren 2a t/m 2e



figuur 2a
schip vaart sluis in

figuur 2b
sluisdeuren aan de hoge kant dicht

figuur 2c
uitstromen van het water

figuur 2d
sluisdeuren aan de lage kant open

figuur 2e
schip vaart sluis uit

Er zijn 4 sluisdeuren. In elke sluisdeur zit onder water een afsluitbare rechthoekige doorlaatopening.
Deze 4 doorlaatopeningen zijn even groot. Het water kan hierdoor de sluis uit- of instromen. Daarvoor is tijd nodig.
In een handboek over sluizen staat de volgende formule:

$$T = \frac{A_1 \cdot h}{18 \cdot A_2 \cdot \sqrt{20h}}$$

In deze formule is:
- T de tijd in minuten die nodig is voor het uit- of instromen van het water;
- A_1 de oppervlakte in m^2 van het water tussen de gesloten sluisdeuren;
- A_2 de totale oppervlakte in m^2 van de doorlaatopeningen in de twee sluisdeuren aan één kant van de sluis;
- h het verschil in meters tussen de waterhoogten aan weerskanten van de sluis.

In een sluis is de oppervlakte van het water tussen de gesloten sluisdeuren 120 m^2.
De doorlaatopening in elke sluisdeur is 50 cm lang en 30 cm hoog.

Met behulp van de formule kan men zien dat voor deze sluis geldt:
$T = c\sqrt{h}$, waarin c een constante is.

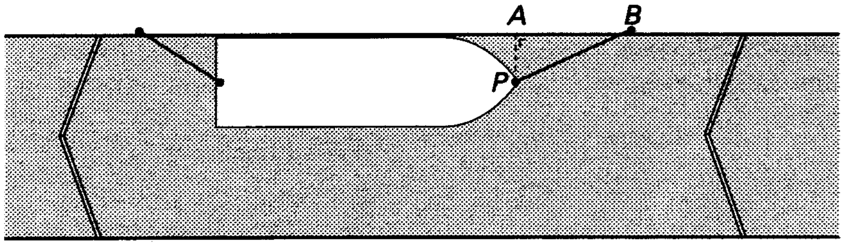
6p **6** □ Toon aan dat $c \approx 4{,}969$.

Bij deze sluis duurt het uitstromen van het water (zie figuur 2c) 9 minuten.

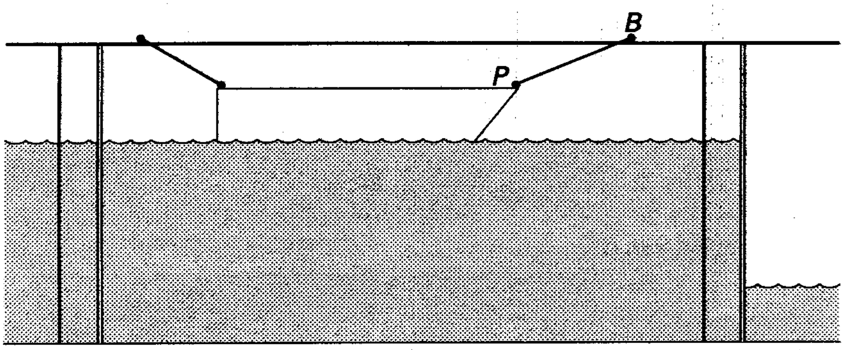
7 □ Bereken in twee decimalen nauwkeurig hoeveel m^3 water hierbij gemiddeld per seconde de sluis uitstroomt.

Een boot wordt geschut van hoog naar laag. Na binnenvaren in de sluis wordt de boot met twee touwen vastgelegd, zoals weergegeven in de figuren 3a en 3b.

figuur 3a (bovenaanzicht)



figuur 3b (zijaanzicht)



We bekijken in deze vraag alleen het touw aan de voorkant van de boot. Dat touw gaat van P naar B en gaat om B heen terug naar P.
Bij P is nog voldoende touw over om tijdens het zakken van de boot de dubbele verbinding P-B-P in stand te houden.
Ook het touw aan de achterkant is lang genoeg om ervoor te zorgen dat de boot tijdens het schutten verticaal kan worden verplaatst.
De breedte van de boot is 2,8 m. Bij het begin van het schutten is het hoogteverschil tussen het dek van de boot en de sluiskade 0,9 m. De afstand AB in het bovenaanzicht is 2,2 m.

4p **8** □ Bereken de lengte van de dubbele verbinding P-B-P bij het begin van het schutten in gehele decimeters nauwkeurig.

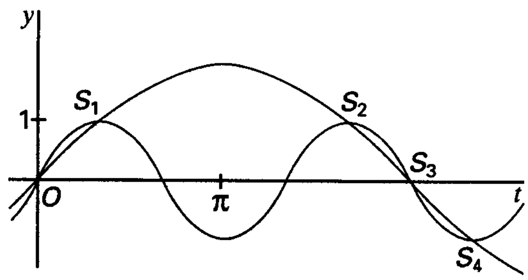
Tijdens het schutten zakt de boot 3,0 m.

4p **9** □ Bereken in gehele decimeters hoeveel touw bij het begin van het schutten er dan bij P minstens nog aanwezig moet zijn.

Opgave 3

In figuur 4 zijn de grafieken van de functies
$f: t \rightarrow 2 \sin \frac{1}{2} t$
en
$g: t \rightarrow \sin \frac{3}{2} t$
voor een deel getekend.

figuur 4



8p **10** □ Teken in de figuur op de bijlage de grafieken van f en g voor $2\pi \leqq t \leqq 6\pi$.

De snijpunten van de grafieken van f en g met een positieve t-coördinaat worden achtereenvolgens $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \ldots$ genoemd.

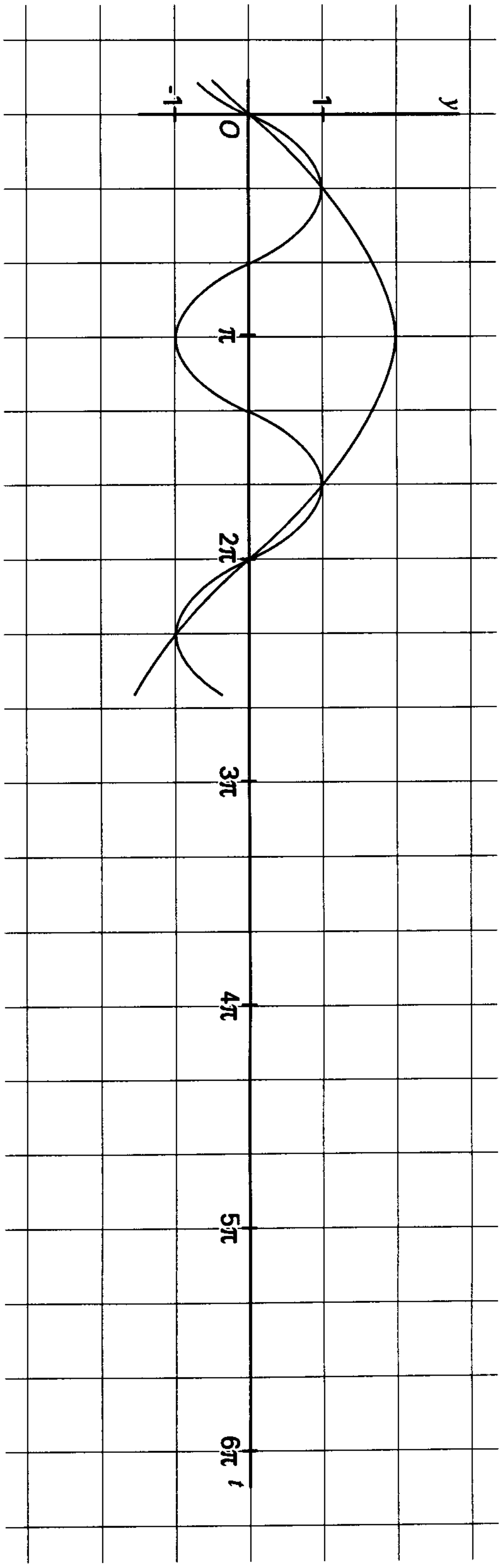
8p **11** □ Toon aan dat het punt $(\frac{1}{3}\pi, 1)$ zowel op de grafiek van f als op de grafiek van g ligt en leid hieruit de coördinaten van S_2, S_4 en S_{11} af.

De grafieken van f en g horen bij twee harmonische bewegingen.
De amplitude van de grafiek van g wordt verkleind.
De verkleining is zodanig dat de grafiek van de nieuwe harmonische beweging en de grafiek van f in $O(0,0)$ een gemeenschappelijke raaklijn hebben.

8p **12** □ Bereken de amplitude van deze nieuwe harmonische beweging.

Bijlage bij opgave 3

Opgave 3

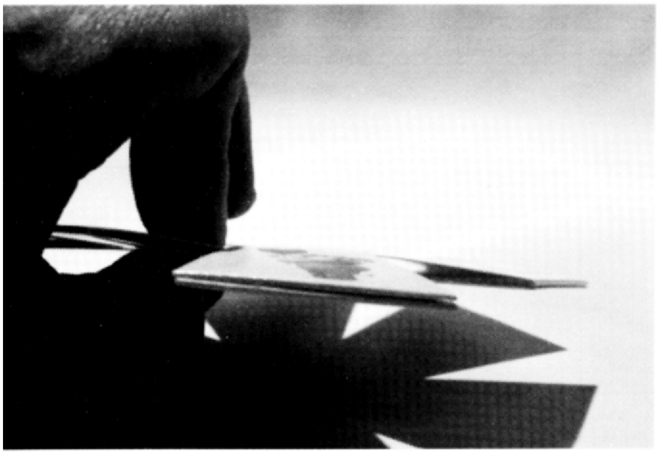


Opgave 4 De jumping card

Een jumping card is een doosje van karton dat platgedrukt kan worden. Dwars door de 'card' is een elastiekje gespannen (zie figuur 5). Door de 'card' plat te drukken wordt dat elastiekje uitgerekt. Als er geen druk op de 'card' wordt uitgeoefend, zorgt het elastiekje ervoor dat de jumping card een ruimtelijk lichaam is.

figuur 5

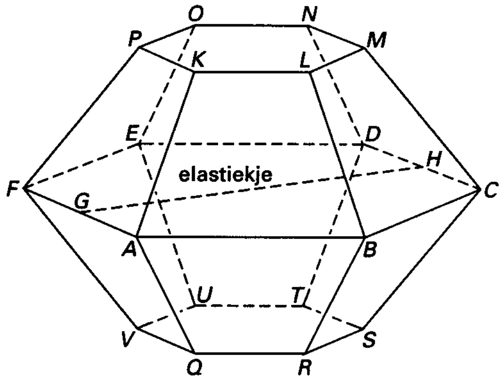
figuur 6



figuur 7

De 'card' wordt platgedrukt in een enveloppe verstuurd (zie figuur 6). Als de ontvanger de 'card' uit de enveloppe haalt, springt de 'card' door de spanning in het elastiekje automatisch in de vorm die in figuur 7 te zien is.

figuur 8



De jumping card bestaat dan uit twee afgeknotte piramiden, zie figuur 8. Elke afgeknotte piramide is een deel van een regelmatige zeszijdige piramide. Van de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ heeft elke zijde een lengte van 4,5 cm. De regelmatige zeshoeken $KLMNOP$ en $QRSTUV$ hebben elk zijden met een lengte van 2,5 cm. Verder is gegeven dat elke opstaande ribbe van de afgeknotte piramiden een hoek van 60° maakt met het vlak $ABCDEF$.
G is het midden van de ribbe AF en H is het midden van de ribbe CD.
Het elastiekje is gespannen tussen G en H.
Op de bijlage is het bovenaanzicht van de jumping card op ware grootte getekend als er geen druk op wordt uitgeoefend.

7p **13** □ Toon aan dat de afstand van vlak $KLMNOP$ tot vlak $QRSTUV$ in millimeters nauwkeurig gelijk is aan 69 mm.

3p **14** □ Bereken in millimeters nauwkeurig de lengte van het elastiekje als er geen druk op de jumping card wordt uitgeoefend.

5p **15** □ Toon door berekening aan dat het elastiekje, als de jumping card wordt platgedrukt, in millimeters nauwkeurig, 43 mm wordt uitgerekt.

Als de jumping card is platgedrukt, zijn er in het bovenaanzicht uitsparingen zichtbaar, zoals ook in de schaduw in figuur 6 te zien is.

8p **16** □ Teken in de figuur op de bijlage het bovenaanzicht van de platgedrukte jumping card. Licht je werkwijze toe.

Bijlage bij opgave 4

Opgave 4