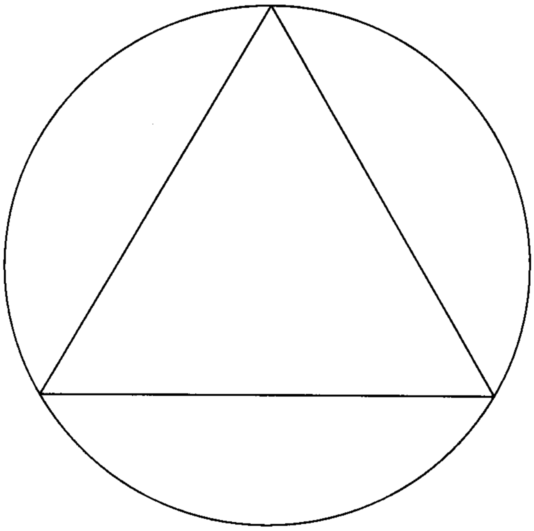
Opgave 1 Sneeuwvlokkromme

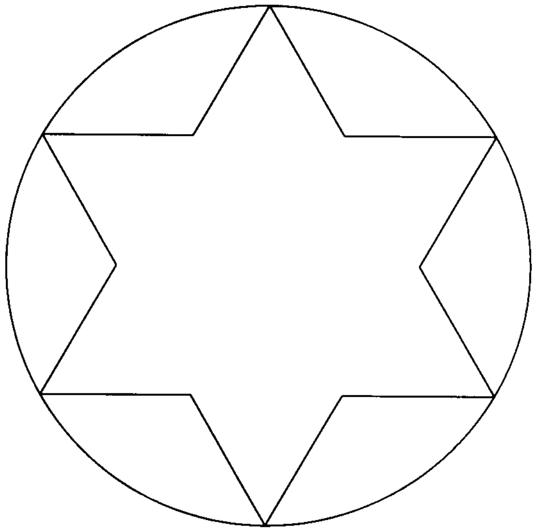
figuur 1

het nulde model



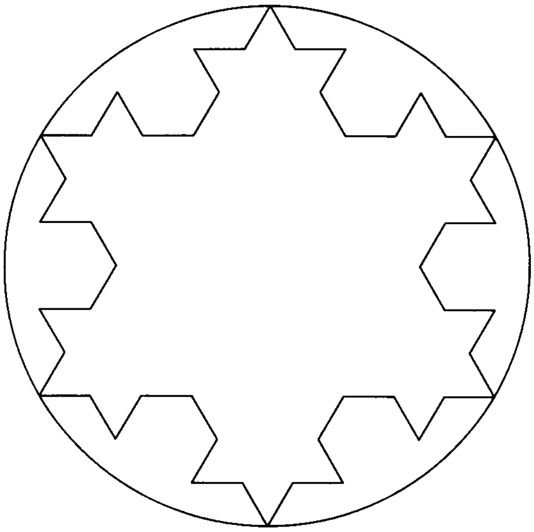
figuur 2

het eerste model

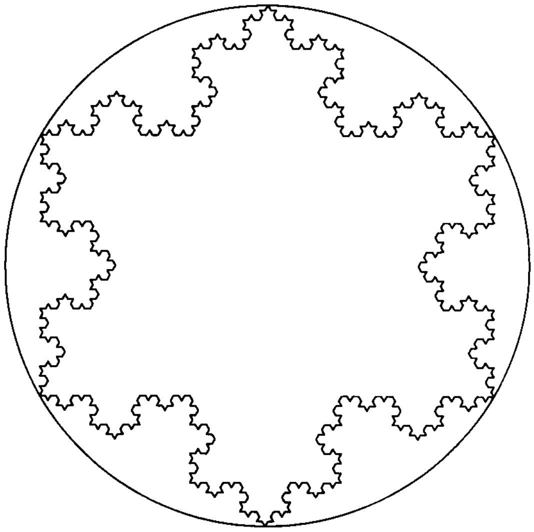


figuur 3

het tweede model



figuur 4



In figuur 1 is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 6 cm en de omgeschreven cirkel getekend. Deze figuur noemen we het nulde model.
Uit een model ontstaat het volgende model volgens onderstaande procedure:

a Verdeel elke zijde van de veelhoek in drie gelijke stukken.
b Teken tegen elk middelste stuk een gelijkzijdige driehoek (aan de buitenkant van de veelhoek).
c Laat vervolgens elk middelste stuk uit het oorspronkelijke model weg.

Als deze procedure één keer is toegepast ontstaat het eerste model; de gelijkzijdige driehoek wordt een ster (zie figuur 2).
Pas hierop weer dezelfde procedure toe en je krijgt het tweede model (zie figuur 3). Zo kan men doorgaan, op den duur gaat de kromme steeds meer op een sneeuwvlok lijken (zie figuur 4).

3p 1 □ Bereken de omtrek P_0 van de driehoek in het nulde model en de omtrek P_1 van de ster in het eerste model.

5p 2 □ Bereken uit hoeveel lijnstukjes het vijfde model bestaat.

De formule voor de omtrek P_n van de veelhoek in het n-de model is

$P_n = 18 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, waarbij de omtrek P_n uitgedrukt is in cm.

4p 3 □ Toon dit aan.

4p 4 □ Bereken de kleinste waarde van n waarvoor de omtrek groter is dan 1 kilometer.

Voor de oppervlakte O_n van de veelhoek in het n-de model geldt de formule:
$O_n = \left(1{,}6 - 0{,}6 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \cdot 9\sqrt{3}$, waarbij O_n uitgedrukt is in cm^2.

5p 5 □ Controleer de juistheid van deze formule voor $n = 0$ en $n = 1$.

4p 6 □ Onderzoek of O_n groter kan zijn dan 25 cm^2.

Opgave 2

De functie f is gegeven door $f(x) = 1 - 2\sin\frac{1}{3}(x + \pi)$ waarbij $0 \leqq x \leqq 8\pi$.

6p **7** □ Los op: $f(x) = 0$.

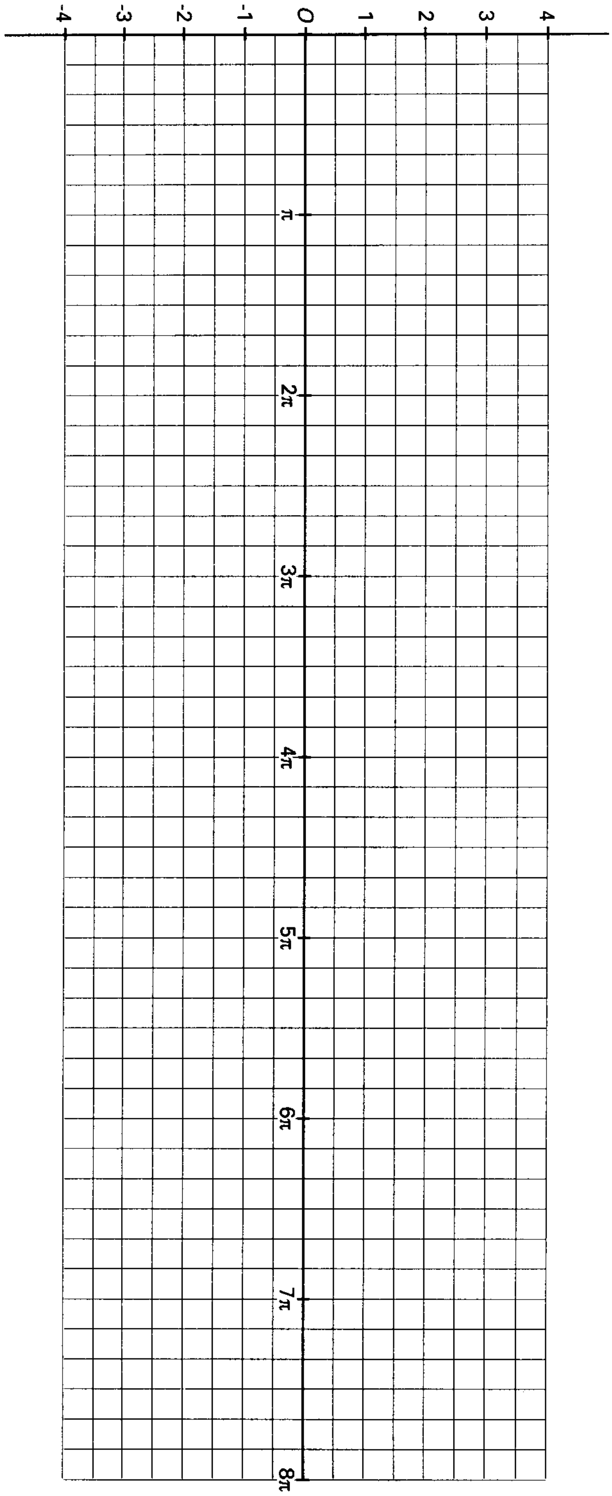
7p **8** □ Teken de grafiek van f in de figuur van de bijlage. Licht je werkwijze toe.

4p **9** □ Geef de coördinaten van de toppen van de grafiek van f. Licht je antwoord toe.

5p **10** □ Voor welke waarden van x geldt zowel $f'(x) > 0$ als $f''(x) < 0$? Licht je werkwijze toe.

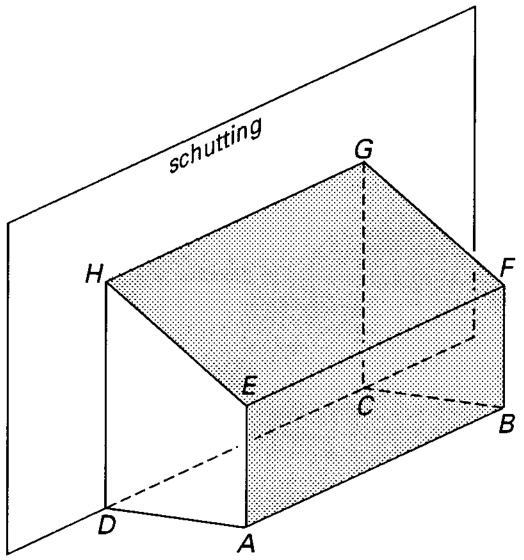
Bijlage bij opgave 2

Opgave 2



Opgave 3 Opslagruimte

figuur 5



Met behulp van een frame van uitschuifbare tentstokken AE en BF en een rechthoekig zeil van 5 bij 10 meter wordt tegen een schutting een opslagruimte gemaakt in de vorm van een recht prisma $AEHD.BFGC$. De grensvlakken $AEHD$ en $BFGC$ blijven open en hebben elk de vorm van een trapezium met rechte hoeken in A, D, B en C.
De breedte AD van de opslagruimte is 3 meter. Het zeil wordt met de lange kant van 10 meter op de grond bevestigd langs AB.
Het wordt over de stok EF strak gespannen naar de schutting waar het zo hoog mogelijk wordt bevestigd. In figuur 5 is dat langs HG. De korte kant van het zeil valt langs AE en EH.
$AE + EH = 5$ meter. Doordat AE ($= BF$) variabel is, zal de hoogte van HG ook variabel zijn.

6p **11** □ Bereken de inhoud van de opslagruimte als $AE = 1$ m. Rond je antwoord af op gehele m^3.

De inhoud V van het prisma $AEHD.BFGC$ hangt af van de lengte h van AE.
Voor V geldt: $V = 30h + 15\sqrt{16 - 10h + h^2}$, waarbij h uitgedrukt is in m en V in m^3.

6p **12** □ Toon aan dat deze formule juist is.

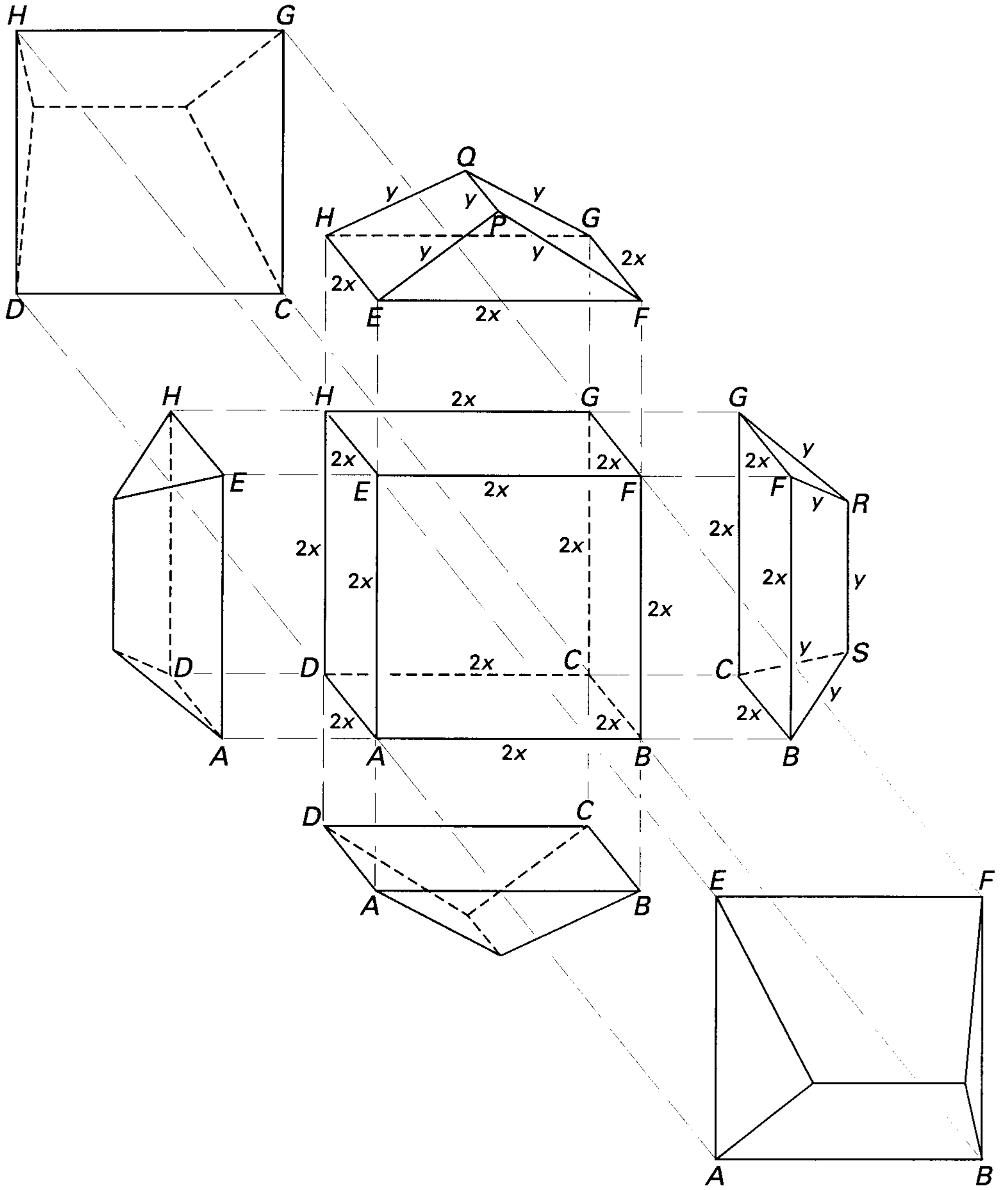
Neem aan dat $V = 60$.

5p **13** □ Toon aan dat dan geldt:
$(4 - 2h)^2 = 16 - 10h + h^2$ en bereken daaruit tot welke lengte AE en BF zijn uitgeschoven.

8p **14** □ Bereken in gehele cm nauwkeurig de waarde van h waarbij de inhoud van de opslagruimte maximaal is.

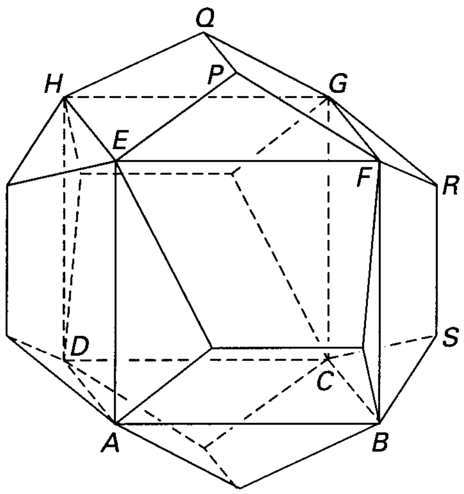
Opgave 4 Regelmatig twaalfvlak

figuur 6



In de figuren 6 en 7 is aangegeven hoe met een kubus en zes gelijke dakvormige figuren een nieuwe ruimtelijke figuur kan worden samengesteld. In figuur 7 is te zien hoe de dakvormige delen tegen de kubus zijn bevestigd. Deze dakdelen zijn zo te maken dat er een regelmatig twaalfvlak ontstaat, waarvan de twaalf grensvlakken regelmatige vijfhoeken zijn.

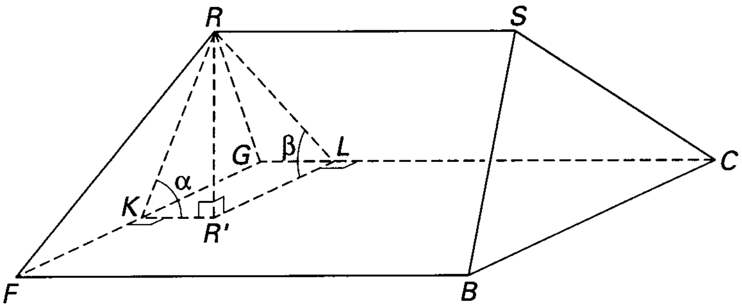
figuur 7



De lengte van de ribben van de kubus stellen we $2x$ en van de dakdelen stellen we de lengte van de ribben die niet tegen de kubus aankomen, gelijk aan y (zie figuur 6).
We willen $2x$ en y zo kiezen dat er vlakke vijfhoeken, bijvoorbeeld *PQGRF* in figuur 7, ontstaan.

Jaap wil op de beschreven manier een regelmatig twaalfvlak maken met ribbe 4.
Dus $y = 4$.
Hij probeert eerst wat uit. Hij neemt $2x = 6$. In figuur 8 heeft hij een dakvorm getekend met $y = 4$ en $2x = 6$.

figuur 8



Jaap gaat nu letten op de hellingshoeken α en β van de schuine vlakdelen.

7p **15** □ Toon met een berekening aan dat nu geldt: $\alpha \approx 68°$ en $\beta \approx 39°$.

Het lukt Jaap niet om met de gekozen afmetingen van de kubus en die dakdelen een regelmatig twaalfvlak te maken, want bijvoorbeeld driehoek *RGF* en vierhoek *PQGF* vormen zo geen vlakke vijfhoek *PQGRF*.

Jaap wil nieuwe dakvormen maken die wel samen met een kubus een regelmatig twaalfvlak kunnen vormen.

4p **16** □ Leg uit waarom de afmetingen daarvoor zo gekozen moeten worden, dat $\alpha + \beta = 90°$.

Jaap wil een regelmatig twaalfvlak maken met een ribbelengte van 4. Dus $y = 4$.

7p **17** □ Bereken de exacte waarde van x bijvoorbeeld met behulp van de eigenschap:
als $\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1$, dan is $\alpha + \beta = 90°$.