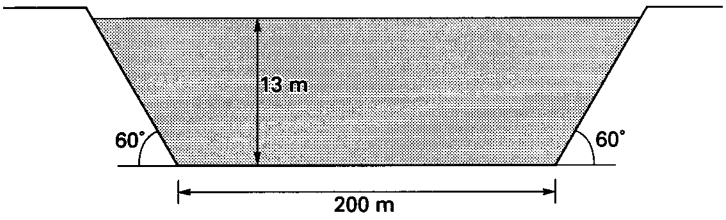
Opgave 1 Watertransport

Water is schaars in het Midden-Oosten. Turkije en Israël werken aan een plan om jaarlijks 1,1 miljard m^3 water uit een hoog gelegen Turks meer via een pijpleiding en een kanaal door de Golan-hoogten te laten stromen naar droge gebieden in Israël en Syrië. Dit kanaal zou, behalve voor de watervoorziening en de scheepvaart, in dit onrustige gebied in militair opzicht van grote betekenis kunnen zijn als tankbarrière. Theoretisch gezien een mooi idee, maar is het technisch uitvoerbaar? In deze opgave onderzoeken we onder andere of er niet te veel eisen worden gesteld.

Als tankbarrière moet het kanaal een brede bodem en steile wanden krijgen en minstens 13 meter diep zijn.
In figuur 1 is een dwarsprofiel getekend van een kanaal dat aan deze eisen voldoet.

figuur 1



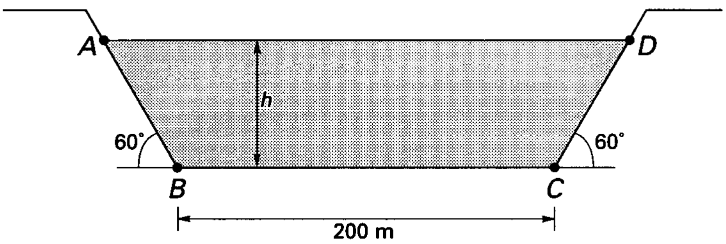
Om scheepvaart mogelijk te maken mag de stroomsnelheid van het water maximaal 3 m/s bedragen.

5p **1** ☐ Bereken voor de situatie in figuur 1 hoeveel m^3 water het kanaal per seconde zou doorlaten bij een stroomsnelheid van 3 m/s en een waterhoogte van 13 meter. Rond het antwoord af op een geheel getal.

Volgens waterbouwkundigen zijn drie factoren van invloed op de stroomsnelheid van het water in een kanaal: de *hydraulische straal*, het *verhang* en de remmende werking van oevers en bodem. Hieronder worden deze begrippen nader toegelicht.

Voor de berekening van de *hydraulische straal R* heb je de 'natte oppervlakte' en de 'natte omtrek' nodig. Bekijk daartoe het dwarsprofiel van het kanaal in figuur 2.

figuur 2



De 'natte oppervlakte' is de oppervlakte van vierhoek $ABCD$.
De 'natte omtrek' is de totale lengte van de lijnstukken in dit dwarsprofiel die de afscheiding vormen tussen grond en water: $AB + BC + CD$.

De hydraulische straal R is het quotiënt van de natte oppervlakte en de natte omtrek, in formulevorm

$$R = \frac{\text{Oppervlakte vierhoek } ABCD}{AB + BC + CD}$$

In de situatie van figuur 2 kan R worden opgevat als functie van de waterhoogte h in meters.

6p **2** □ Laat zien dat in die situatie bij benadering de volgende formule geldt:

$$R(h) = \frac{200h + 0{,}6h^2}{200 + 2{,}3h}.$$

6p **3** □ Toon met behulp van de formule uit vraag 2 aan dat bij stijging van de waterhoogte de hydraulische straal ook toeneemt.

In de waterbouwkunde wordt voor de stroomsnelheid van een kanaal de volgende formule gehanteerd:

$$V = k \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot S^{\frac{1}{2}}$$

Hierin is:

- V de stroomsnelheid in m/s,
- S het verhang, dat wil zeggen het hoogteverschil (in kilometers) per kilometer kanaallengte (zo betekent $S = 0{,}003$ dat het kanaal per kilometer 3 meter daalt),
- R de hydraulische straal in m,
- k een constante die samenhangt met de weerstand van de oevers en de bodem. Een glad geasfalteerde kanaalwand remt de stroom minder dan begroeide oevers en een bodem vol oneffenheden. De waarde van k is dan ook hoger naarmate de weerstand minder is.

Voor het kanaal geldt $S = 0{,}003$ en $k = 50$.
Als dwarsprofiel nemen we opnieuw de situatie van figuur 2.

4p **4** □ Toon door een berekening aan dat bij een waterhoogte van 13 m de stroomsnelheid van het water veel groter is dan de maximaal toelaatbare 3 m/s.

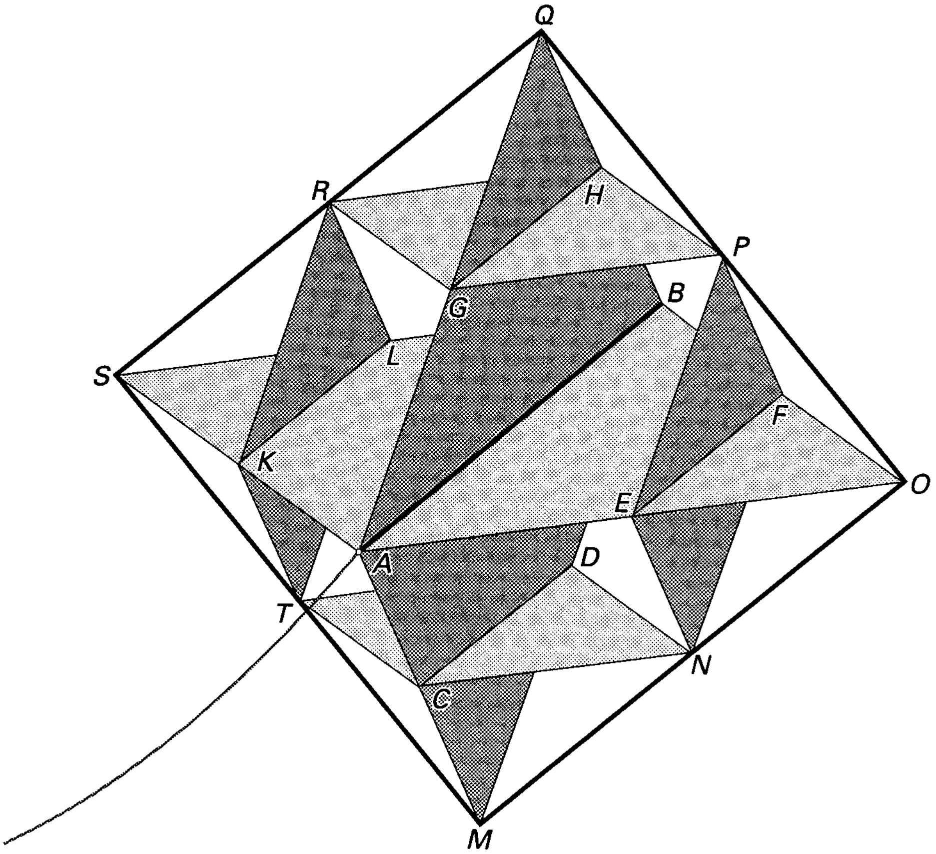
Bij een waterhoogte van 13 m is de stroomsnelheid van het water te hoog.

6p **5** □ Onderzoek of bij waterhoogten boven 13 m de stroomsnelheid van het water lager dan 3 m/s kan zijn.

Opgave 2 Facetvlieger

Een facetvlieger bestaat uit zes vierkanten die elkaar doorsnijden: twee grote vierkanten *AOBS* en *AQBM* met zijden van 60 cm en vier kleinere vierkanten *CNDT*, *EPFN*, *GPHR* en *KRLT* die alle vier even groot zijn (zie figuur 3). De vlieger heeft een frame van vier stokken die samen het vierkant *MOQS* vormen. Ook *AB* is met een stok versterkt (zie figuur 3).

figuur 3



De zes vierkanten zijn gemaakt van een speciale textielsoort die zonder zoom verwerkt kan worden.

4p **6** □ Bereken de totale oppervlakte aan textiel van de vlieger.

4p **7** □ Bereken de lengte van de stok *MO*.

5p **8** □ Verklaar waarom de stok *AB* loodrecht staat op vlak *MOQS*.

Het touw waaraan de vlieger is opgelaten, hangt altijd iets gebogen. Voor de beantwoording van de volgende vraag nemen we echter aan dat het volgens een rechte lijn gespannen staat. De hoek die het vliegertouw met de grond maakt, noemen we α. Het touw is 100 m lang en op een bepaald moment is $\alpha = 50°$. Doordat de wind toeneemt stijgt de vlieger 15 m, maar het touw blijft 100 m lang.

6p **9** □ Bereken hoe groot α nu is in gehele graden nauwkeurig.

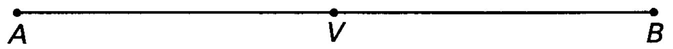
V is het midden van *AB*. Op de bijlage is een begin getekend van het aanzicht van de vlieger in de richting *PV*. De vierkanten *AOBS*, *CNDT* en *GPHR* zijn blauw en de vierkanten *AQBM*, *EPFN* en *KRLT* zijn groen. Het blauwe en het groene textiel zijn niet doorzichtig.

4p **10** □ Voltooi het aanzicht op de bijlage en licht je werkwijze toe.

2p **11** □ Arceer in het aanzicht de blauwe delen.

Bijlage bij opgave 2

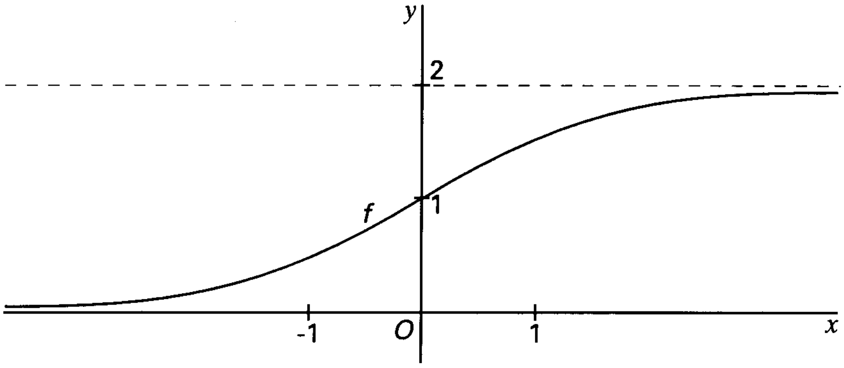
Opgave 2



Opgave 3

In figuur 4 is de grafiek van een functie f getekend.

figuur 4



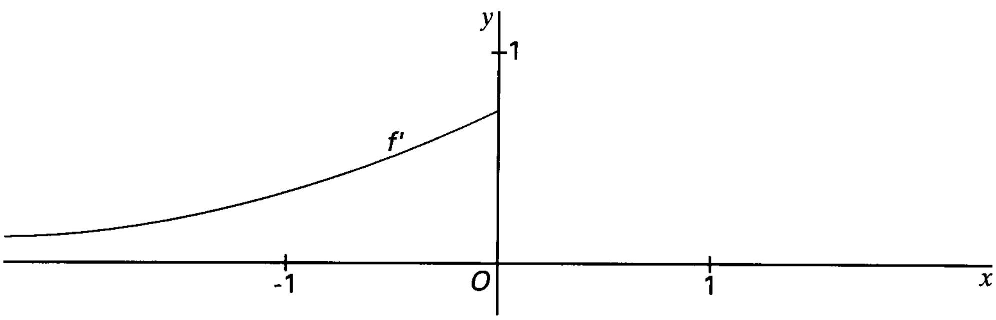
Voor $x \leqq 0$ geldt het voorschrift $f(x) = 2^x$
Voor $x \geqq 0$ geldt voor f een ander voorschrift.
Gegeven is verder dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in het punt (0, 1), wat betekent dat bij spiegeling in het punt (0, 1) de grafiek van f overgaat in zichzelf.

4p **12** □ Bereken $f(1)$ en bereken $f(5)$.

4p **13** □ Stel voor $x \geqq 0$ het functievoorschrift van f op.

In figuur 5 en op de bijlage is de grafiek van de afgeleide functie f' getekend voor $x \leqq 0$.

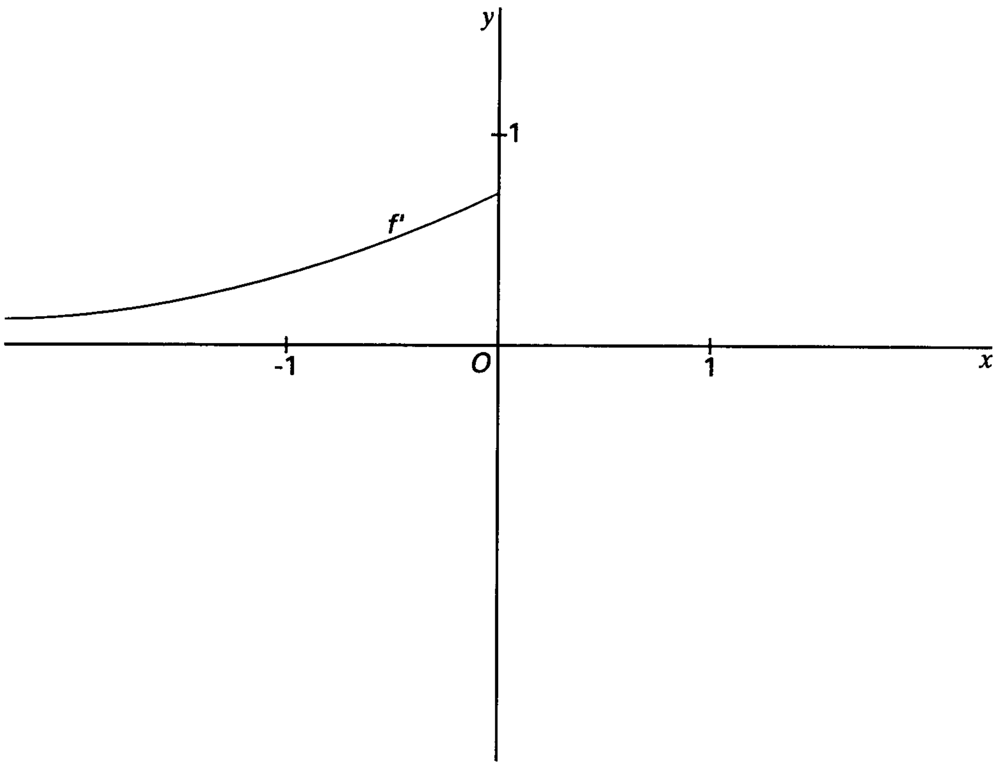
figuur 5



5p **14** □ Voltooi in de figuur op de bijlage de grafiek van f' door ook het gedeelte dat hoort bij $x > 0$ te tekenen. Licht je werkwijze toe.

Bijlage bij opgave 3

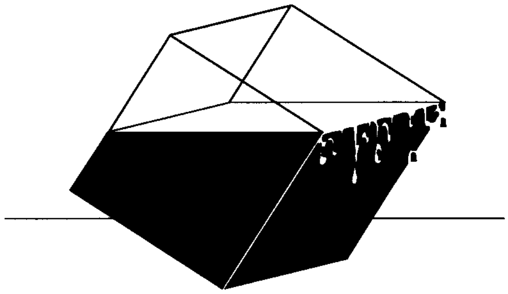
Opgave 3



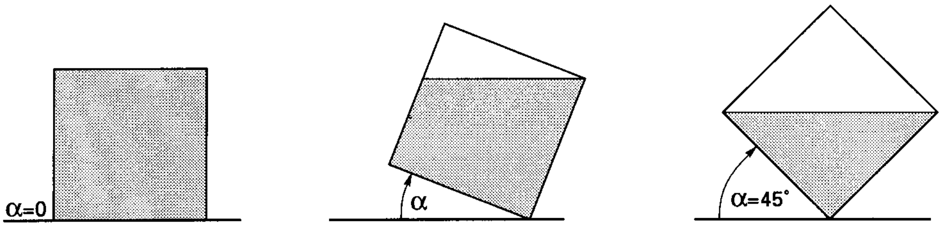
Opgave 4 De kantelende gietpan

In een klokkengieterij hangt een gietpan met vloeibaar brons. Door de pan te kantelen loopt het metaal uit de pan in de gietvorm. We nemen als model voor de pan een kubus met ribbelengte 1 (zie figuur 6).
In figuur 7 zijn aanzichten getekend van de pan op een drietal verschillende tijdstippen tijdens het gieten.

figuur 6



figuur 7



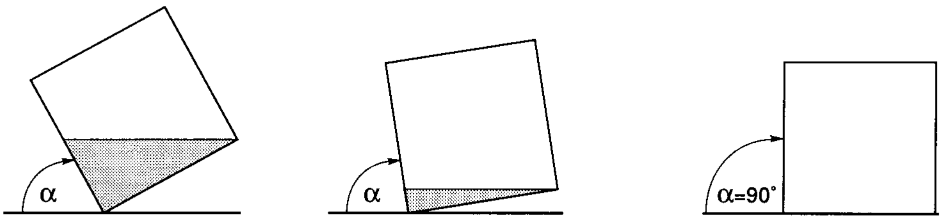
De hoek waarover gekanteld wordt noemen we α, uitgedrukt in graden. De hoeveelheid vloeistof die door het kantelen is weggestroomd, heeft volume V.

4p **15** □ Toon aan dat voor $0 \leqq \alpha \leqq 45°$ de volgende formule geldt:

$$V = \tfrac{1}{2}\tan\alpha$$

In figuur 8 zijn drie situaties getekend waarbij gekanteld is over een hoek die groter is dan 45°.

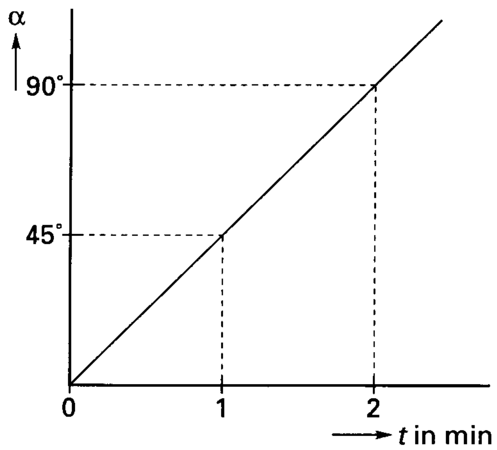
figuur 8



6p **16** □ Druk het volume V van de hoeveelheid weggestroomde vloeistof uit in α voor $45° \leqq \alpha \leqq 90°$.

De pan wordt zo gekanteld dat hoek α met een constante snelheid toeneemt. Het verband tussen α en de verstreken tijd t, in minuten, kan dan grafisch worden weergegeven met een rechte lijn (zie figuur 9).

figuur 9



5p **17** □ Bereken na hoeveel tijd 20% van de vloeistof is weggestroomd. Geef het antwoord in gehele seconden.

Als de pan gekanteld wordt zoals in figuur 9 is weergegeven, dan is de hoeveelheid vloeibare brons die er per seconde uitstroomt, niet steeds constant.
Om een goed gietprodukt te krijgen en ook om veiligheidsredenen wil men dat de hoeveelheid vloeistof die per seconde wegstroomt, constant is. Dat betekent dat de hoeveelheid weggestroomde vloeistof na t minuten, evenredig moet zijn met de tijd t. Er moet dan gelden: $V = ct$. Na 1 minuut is de pan weer half leeg en de totale uitstroomtijd blijft 2 minuten.

2p **18** □ Bereken c.

Bij deze wijze van kantelen wordt het verband tussen α en t niet meer door een rechte lijn beschreven.

4p **19** □ Teken in de figuur op de bijlage de grafiek die het verband aangeeft tussen t en α voor $0 \leqq t \leqq 1$. Licht je werkwijze toe.

4p **20** □ Voltooi de grafiek op de bijlage door ook het gedeelte te tekenen dat hoort bij $1 \leqq t \leqq 2$. Licht je werkwijze toe.

Bijlage bij opgave 4

Opgave 4