Eindexamen wiskunde B havo 1994-I

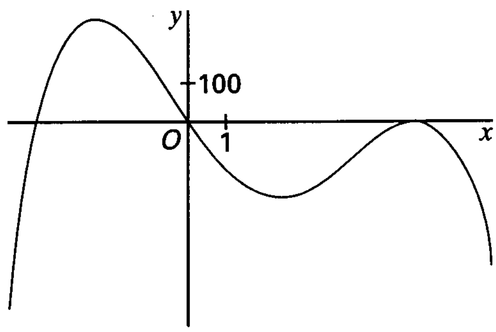
Opgave 1

In figuur 1 is een grafiek getekend van de functie f gegeven door

$f(x) = -x(4 + x)(6 - x)^2$.

Op de x-as en de y-as zijn de schaalverdelingen verschillend: de eenheid op de y-as is honderd maal zo klein getekend als op de x-as.

figuur 1



6p **1** □ Voor welke waarden van x is $f(x)$ negatief?

6p **2** □ Toon aan dat $f'(x) = -4(6 - x)(6 - x^2)$

Iemand heeft het vermoeden dat $O(0, 0)$ een buigpunt van de grafiek van f is.

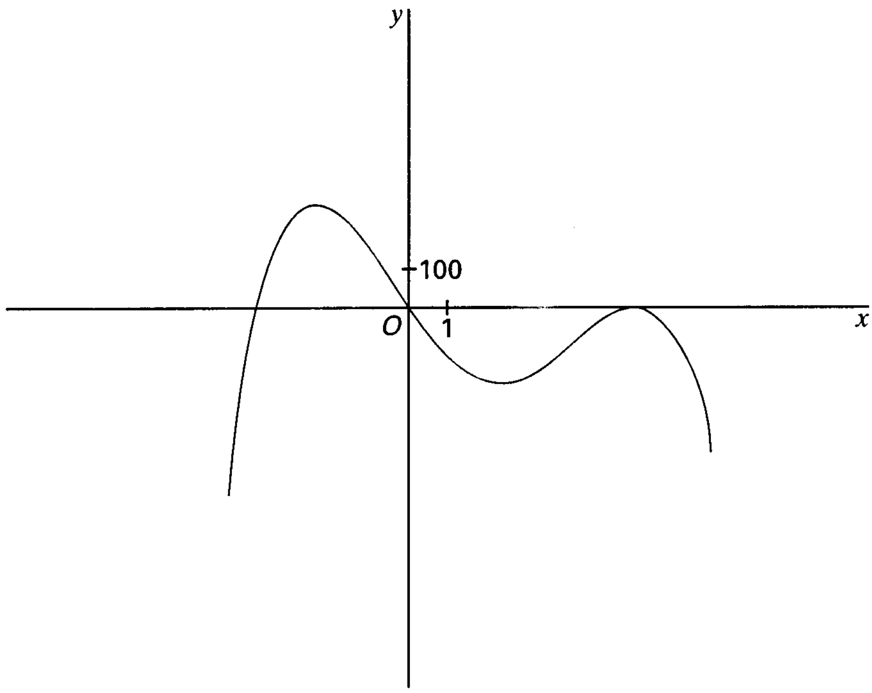
5p **3** □ Onderzoek of dat vermoeden juist is.

Op de bijlage is nogmaals een grafiek van f getekend.
De functie g is gedefinieerd door $g(x) = f(2x)$.

7p **4** □ Leg uit hoe de grafiek van g uit de grafiek van f kan worden afgeleid en teken in de figuur op de bijlage de grafiek van g.

Bijlage bij opgave 1

Opgave 1



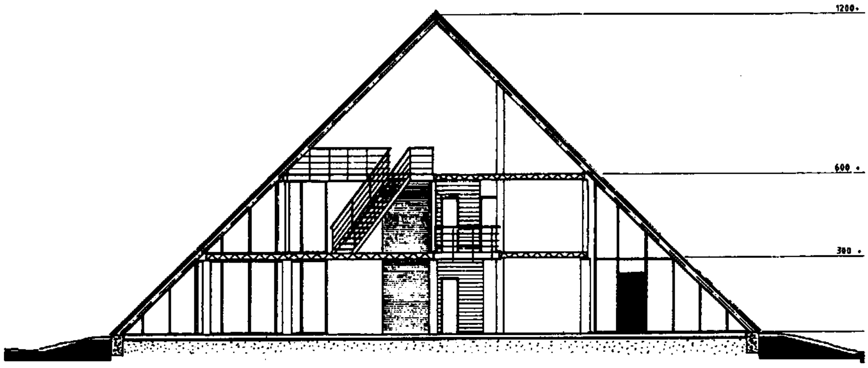
Opgave 2 Kantoorpiramide

Een directeur van een reclamebureau geeft een architect opdracht om een kantoor te ontwerpen in de vorm van een regelmatige vierzijdige piramide.
De architect neemt de piramide van Cheops in Egypte als voorbeeld.
Deze heeft een grondvlak van 233 bij 233 meter en een hoogte van 145 meter. De kantoorpiramide moet wel kleiner worden. De architect wil dat de piramide ongeveer even steil wordt als die van Cheops.
Voor de steilheid wordt de hoek genomen die een zijvlak maakt met het grondvlak.
In overleg met de directeur wordt besloten de piramide 12 meter hoog te maken en een grondvlak van 24 bij 24 meter te nemen.

5p 5 □ Bereken het verschil van de steilheden van de twee piramiden. Geef het antwoord in hele graden.

De benedenverdieping (de begane grond) heeft de vorm van een afgeknotte piramide met een hoogte van 3 meter (zie figuur 2).

figuur 2

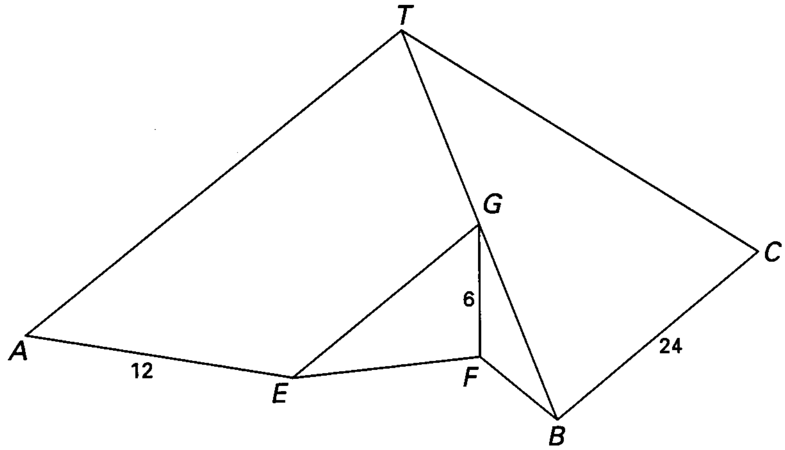


Om de inhoud hiervan uit te rekenen, gebruikt de architect de formule:
$I = \frac{1}{3}h(O_1 + O_2 + \sqrt{O_1 \cdot O_2})$ die ook al in de oudheid bij de Egyptenaren bekend was.
Hierbij is h de hoogte van de afgeknotte piramide, O_1 de oppervlakte van het grondvlak en O_2 die van het bovenvlak.

8p 6 □ Bereken eerst de inhoud van de benedenverdieping zonder deze formule te gebruiken en onderzoek hierna of die formule dezelfde uitkomst geeft.

In de piramide wordt een uitsparing gemaakt voor de ingang zoals in figuur 3 is aangegeven. E is het midden van AB.
$\angle EFG = \angle BFG = \angle BFE = 90°$.

figuur 3

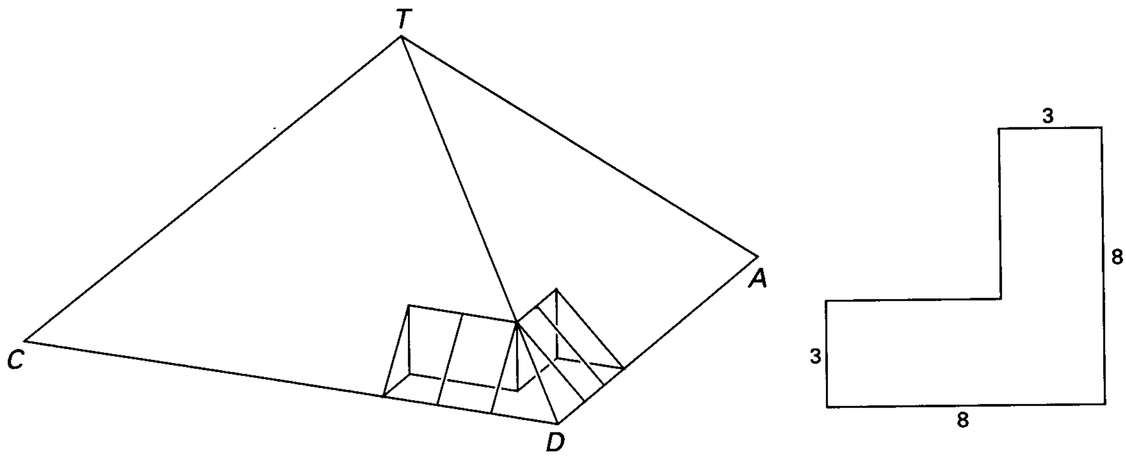


In de figuur van de bijlage zijn 3 punten van het grondvlak van de piramide in perspectief getekend. AB is evenwijdig aan de horizon.

8p 7 □ Teken in de figuur van de bijlage de top van de piramide en voltooi de perspectieftekening van de piramide met de uitsparing bij de ingang. Licht je werkwijze toe.

Aan de achterzijde krijgt de piramide door de aanleg van een terras een tweede uitsparing die 3 meter hoog is (zie figuur 4). Ook de wanden van deze uitsparing staan loodrecht op het grondvlak van de piramide. Het terras is L-vormig (zie figuur 5).

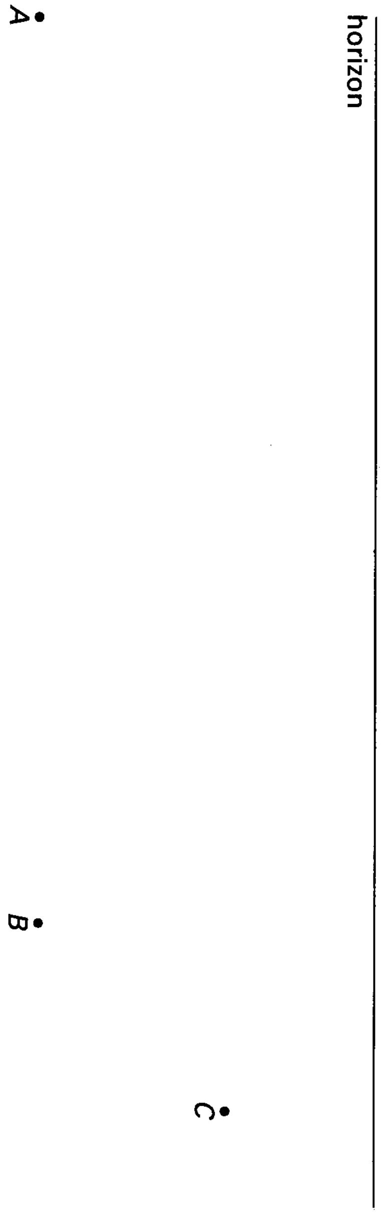
figuren 4 en 5



7p 8 □ Bereken hoeveel m^3 van de inhoud van de piramide verloren gaat door de aanleg van dit terras.

Bijlage bij opgave 1

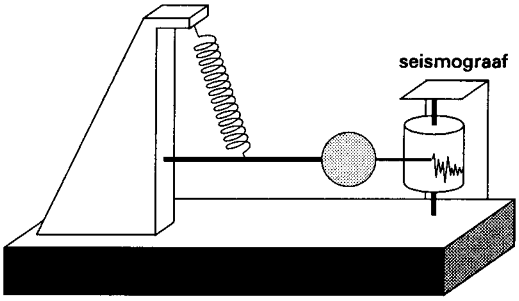
Opgave 2



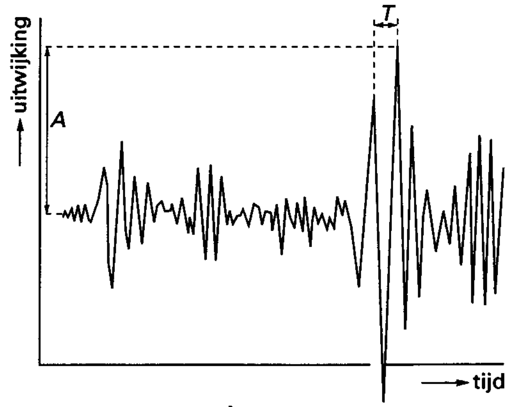
Opgave 3 Aardbevingen

Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die de aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Zie de figuren 6 en 7.

figuur 6



figuur 7



seismogram

Verspreid over de aarde staan veel seismografen opgesteld. De uitwijking van een seismograaf hangt af van de afstand van dit instrument tot de plaats aan de oppervlakte van de aarde waar de beving het eerst optreedt. Deze plaats noemt men het epicentrum van de aardbeving.
Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruikt men seismogrammen die op een afstand van 100 kilometer van het epicentrum zijn gemaakt (standaardseismogrammen).

De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme (met grondtal 10) gebruikt van de grootste uitwijking die in het seismogram voorkomt.
Als de maximale uitwijking van de seismograaf tien keer zo groot wordt, dan neemt de kracht op de schaal van Richter met één toe.

De aardbeving in Nederland op 13 april 1992 had een kracht van 5,50 op de schaal van Richter. De kracht van de aardbeving in 1960 in Chili was 8,42.
Van beide bevingen is in de standaardseismogrammen de grootste uitwijking gemeten.

5p 9 □ Bereken de verhouding tussen deze twee grootste uitwijkingen.

Als op een bepaald waarnemingsstation een seismogram gemaakt is en je weet de plaats van het epicentrum, dan kun je met de volgende formule de kracht van de aardbeving berekenen:

$$R = \log \frac{A}{T} + 1{,}66 \cdot \log D + 3{,}30$$

Hierin is:

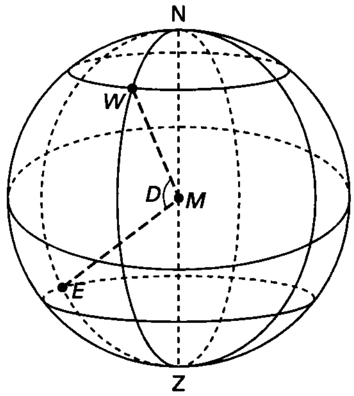
R de kracht van de aardbeving, uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter.

A de grootste uitwijking in het seismogram in µm (1 µm = 0,001 mm); A is aangegeven in figuur 7.

T de tijd in seconden van de trilling met de grootste uitwijking; ook T is in figuur 7 aangegeven.

D de grootte in graden van de hoek tussen de verbindingslijnstukken ME en MW. M is het middelpunt van de aarde, E is het epicentrum en W is de plaats van het waarnemingsstation. Zie figuur 8.

figuur 8



Uit de formule volgt inderdaad dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitslag van de seismograaf tien keer zo groot wordt (bij dezelfde T en D).

7p **10** □ Toon dit aan.

Van de Chileense aardbeving van 1960 werd in De Bilt een seismogram opgenomen. De trillingen gaven daar een maximale uitslag van 1000 µm; de trillingstijd T bedroeg 20 seconden. Na invulling van D werd $R = 8{,}42$ gevonden.
Voor de omtrek van de aarde nemen we 40000 km.

7p **11** □ Bereken de afstand over de aardbol tussen De Bilt en het epicentrum in Chili in honderden kilometers nauwkeurig.

Niet alleen in De Bilt maar ook in andere plaatsen werd in 1960 een seismogram van de Chileense aardbeving opgenomen. Op al die plaatsen berekende men dat de kracht van die aardbeving 8,42 was.
Hoewel A, T en D van plaats tot plaats verschilden, gaf de formule voor R steeds 8,42 als resultaat.
Voor deze aardbeving bestond dus het volgende verband tussen A, T en D:

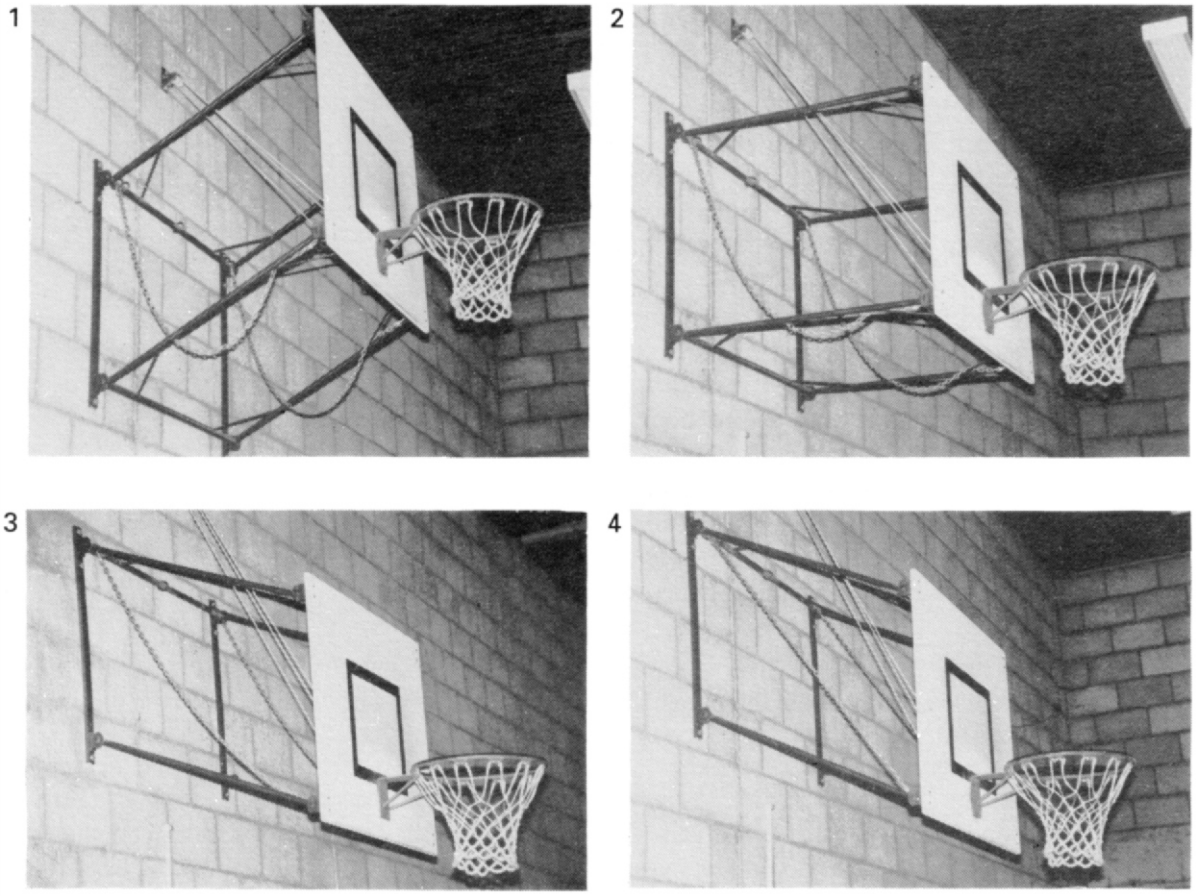
$$8{,}42 = \log \frac{A}{T} + 1{,}66 \cdot \log D + 3{,}30$$

4p **12** □ Toon aan dat dit verband ook in de vorm $D = p \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^q$ kan worden geschreven en bereken p en q in 2 decimalen nauwkeurig.

Opgave 4 Basketbal

In figuur 9 zie je vier 'momentopnamen' van het neerlaten van een basketbalstellage.

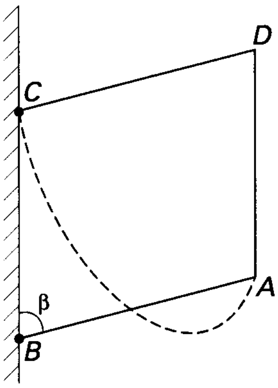
figuur 9



De stellage bestaat uit een frame met een rechthoekig bord waaraan een basket bevestigd is. Een basket is een ijzeren ring met een netje. Twee kettingen, die even lang zijn, dienen als beveiliging tegen vallen of te ver zakken van het geheel.
Het zijaanzicht van het frame is een parallellogram.
We noemen dit parallellogram $ABCD$ (zie figuur 10).

BC is 90 cm en AB is 100 cm lang. In de gymzaal waar de foto's genomen zijn, is voor bevestigingspunt B een hoogte van 280 cm gekozen. Neem aan dat een van de kettingen bevestigd is in de punten C en A.

figuur 10



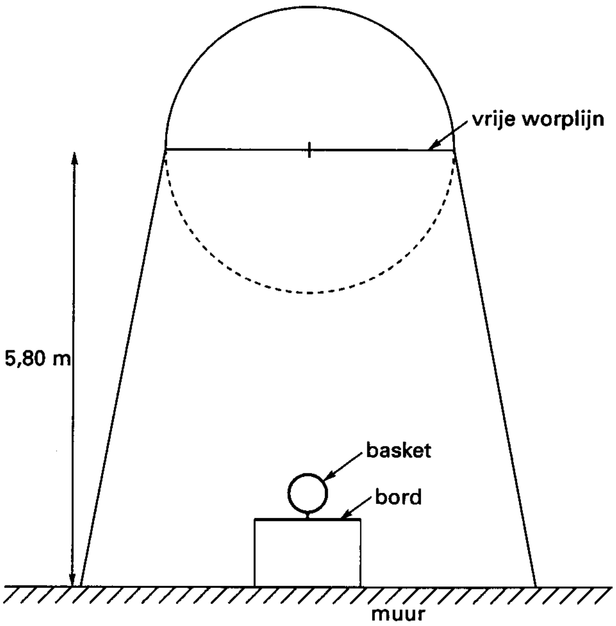
Stel dat de ketting zo lang is dat bij het neerlaten van de stellage punt A niet lager kan komen dan 250 cm boven de grond.

4p **13** □ Bereken in dat geval de lengte van de ketting in cm nauwkeurig.

Het frame wordt helemaal omhooggetrokken tot tegen de muur. Tijdens deze beweging beschrijft punt A een baan. De hoogte van h van punt A is afhankelijk van β $(\angle ABC = \beta)$.

4p 14 □ Druk de hoogte h uit in β.

figuur 11



In figuur 11 is een bovenaanzicht getekend van het vrije worpgebied met de basketbalstellage. Het frame wordt zo ver neergelaten dat punt A op een hoogte van 250 cm komt. Neem aan dat het bord met de basket precies even groot is als de voorkant van het frame. Een speler met een ooghoogte van 195 cm staat midden op de vrije worplijn.

7p 15 □ Onderzoek of hij vanaf die plaats boven de rand van het bord iets van het frame kan zien.