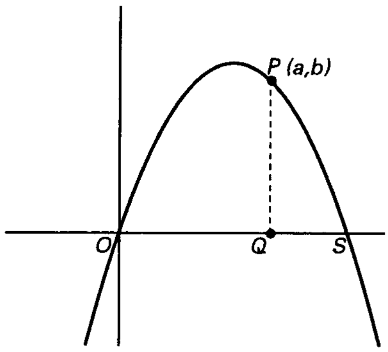
Eindexamen wiskunde B havo 1993-II

Opgave 1

figuur 1



De parabool die in figuur 1 is getekend, snijdt de x-as in O en S.
Een punt $P(a, b)$ doorloopt de parabool tussen O en S.
Een vergelijking van deze parabool is

$$y = -\frac{1}{2}x(x - 6)$$

Neem $a = 5$. De raaklijn in P aan de parabool snijdt in dit geval de x-as in A en de y-as in B.

7p **1** □ Bereken de lengte van het lijnstuk AB.

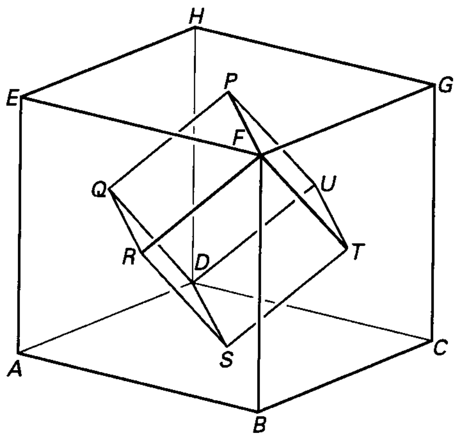
Neem a nu veranderlijk.
De projectie van P op de x-as is Q.

7p **2** □ Bereken de maximale oppervlakte van $\triangle OPQ$.

Opgave 2

In de kubus *ABCD.EFGH*, met ribbenlengte 6, die in figuur 2 is afgebeeld, bevindt zich een ruimtelijk lichaam *L*.
Van de acht hoekpunten van *L* zijn er twee tevens hoekpunten van de kubus, de punten *D* en *F*.
De overige zes hoekpunten van *L* zijn de middens van de zijvlakken van de kubus. *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* en *U* zijn achtereenvolgens de middens van de vierkanten *EFGH*, *ADHE*, *ABFE*, *ABCD*, *BCGF* en *CDHG*.

figuur 2



4p **3** □ Toon aan dat alle ribben van *L* even lang zijn.

5p **4** □ Teken het aanzicht in de richting van de lijn *AC* van de kubus met daarin het lichaam *L*. Geef daarin duidelijk de plaats aan van alle hoekpunten van de kubus en het lichaam *L*.

4p **5** □ Teken vierhoek *RSTF* op ware grootte.

2p **6** □ Onderzoek of lichaam *L* een kubus is.

Lichaamsdiagonaal *BH* staat loodrecht op de vlakken *ACF* en *DEG*. (Dit hoeft niet aangetoond te worden.)

5p **7** □ Toon aan dat de afstand van vlak *FRST* tot vlak *PQDU* gelijk is aan $2\sqrt{3}$.

6p **8** □ Bereken zonder af te ronden de inhoud van lichaam *L*.

Opgave 3

Het aantal insekten van een bepaald soort blijkt af te hangen van de middagtemperatuur van de omgeving.
Onderzoekers veronderstellen dat dit verband exponentieel is.
Voor een begrensd gebied werken ze met het volgende model:
$N = 1000 \cdot 2^{0,5M}$; hierin is N het aantal insekten en M de middagtemperatuur in °C. De middagtemperatuur is de gemiddelde temperatuur tussen 12.00 en 16.00 uur.

Deze formule is onder andere gebaseerd op een aantal tellingen in dit gebied.
In de tabel staan enkele resultaten van deze tellingen.

tabel

M (middagtemperatuur in °C)	0	10	16
N (aantal insekten)	1000	31000	250000

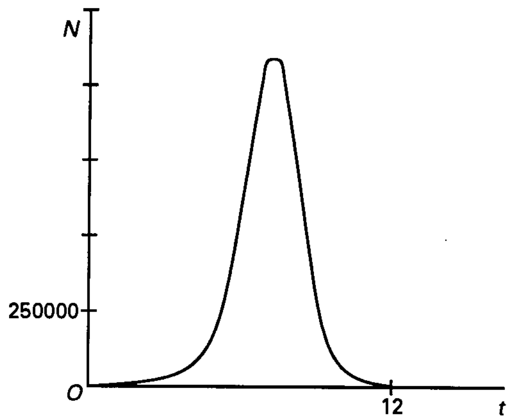
5p 9 □ Laat zien dat deze resultaten minder dan 5% afwijken van de resultaten van de formule.

In het gebied is de middagtemperatuur M in de loop van het jaar te benaderen met behulp van de formule:

$$M = 10 + 10\sin\frac{\pi}{6}(t - 4)$$

waarin M de middagtemperatuur in °C is en t de tijd in maanden vanaf het begin van het jaar. Zo staat bijvoorbeeld $t = 1\frac{1}{2}$ voor midden februari. (In dit model hebben alle maanden 30 dagen.)
Door samenstellen van de formules voor N en M is N in t uit te drukken.
In figuur 3 is een grafiek getekend van het verband tussen N en t.

figuur 3



4p 10 □ Bereken het maximale aantal insekten.

6p 11 □ Bereken in welke maanden van het jaar het aantal insekten groter is dan 180000.

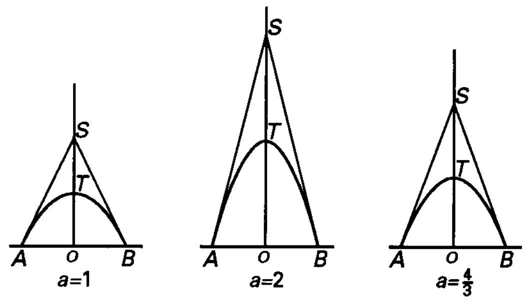
De formule voor N en t kan in de vorm $N = a \cdot b^{\sin c(t-d)}$ worden geschreven.

6p 12 □ Bereken a, b, c en d.

Opgave 4

In figuur 4 zijn drie bergparabolen getekend met raaklijnen in de snijpunten A en B met de x-as. Deze raaklijnen snijden elkaar in punt S op de y-as. In elke tekening lijkt het erop dat S op een hoogte ligt die tweemaal zo groot is als de hoogte van top T.

figuur 4



Om de bewering:

S ligt tweemaal zo hoog als T

te bewijzen, gaan we uit van de parabolen met vergelijking $y = -a(x^2 - 1)$, met $a > 0$.

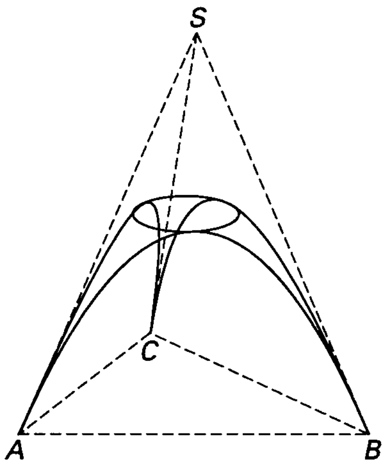
6p **13** □ Bewijs de bewering voor deze parabolen.

In het bouwwerk op de foto van figuur 5 zijn drie identieke parabolen zo geplaatst dat ze elkaar twee aan twee raken in de voetpunten. De toppen van de parabolen liggen op een horizontale cirkel.
Het hele bouwwerk past in een regelmatige piramide $S.ABC$.
De parabolen raken in de voetpunten aan elkaar maar ook aan de opstaande ribben van de piramide (zie figuur 6).
De voetpunten van de piramide liggen 24 meter uit elkaar. De cirkel waarop de toppen van de parabolen liggen, is op een hoogte van 24 meter geplaatst. De top S van de piramide ligt dus op een hoogte van 48 meter.

figuur 5

5p **14** □ Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de zijvlakken van de piramide maken met het grondvlak.

figuur 6



Op de bijlage is een deel van een aanzicht getekend in de horizontale richting loodrecht op AB. Je ziet daarin twee van de drie parabolen (ze zijn door de projectie een beetje 'scheef' geworden). Men kiest in dit aanzicht een coördinatenstelsel Oxy met de x-as langs AB en de y-as verticaal door C. De gekozen eenheid langs de assen komt overeen met 1 m.
De ontbrekende parabool heeft in dit aanzicht ook de vorm van een parabool.

6p **15** □ Stel een vergelijking op van de ontbrekende parabool in het gekozen stelsel.

6p **16** □ Teken in de bijlage de ontbrekende parabool en teken hierin ook het aanzicht van de piramide $S.ABC$.

6p **17** □ Bereken de straal van de cirkel die de drie toppen van de parabolen verbindt.

Bijlage bij opgave 4

Opgave 4