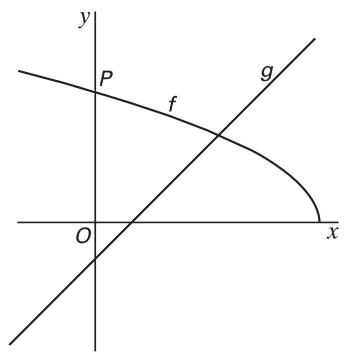
Functies

In figuur 1 zijn de grafieken getekend van de functies

$f(x) = \sqrt{-2x+12}$ en $g(x) = x - 1$.

figuur 1



4p **1** ☐ Los op: $f(x) \leq g(x)$. Rond de getallen in je antwoord die niet geheel zijn af op twee decimalen.

De grafiek van f snijdt de y-as in het punt P.
Lijn m raakt de grafiek van f in P.

5p **2** ☐ Bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van de richtingscoëfficiënt van lijn m.

In één punt van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan -1.

4p **3** ☐ Bereken de coördinaten van dit punt. Rond deze coördinaten af op één decimaal.

De verticale lijn $x = a$ snijdt de grafiek van f in punt S en de grafiek van g in punt T; S ligt boven T.

4p **4** ☐ Onderzoek voor welke waarde van a de lengte van ST gelijk is aan 2. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

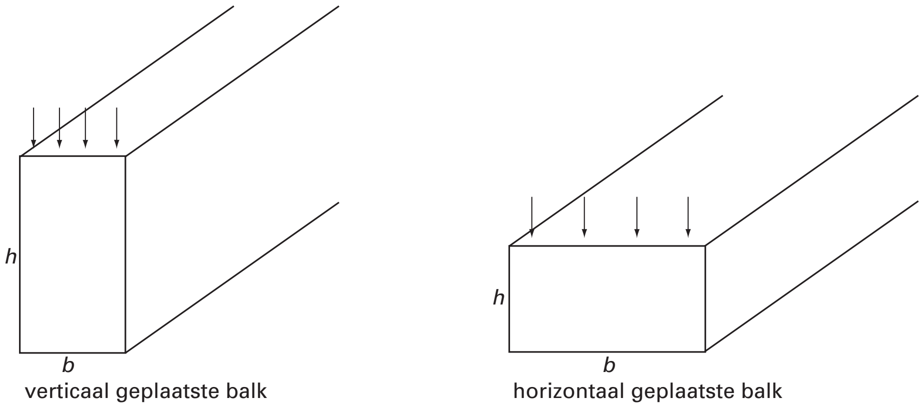
De grafiek van f wordt horizontaal verschoven. De beeldfiguur is de grafiek van een functie h. De grafiek van h snijdt de grafiek van g in het punt met x-coördinaat 4.

4p **5** ☐ Stel een functievoorschrift op van de functie h. Licht je werkwijze toe.

Sterkte van een balk

In een bouwconstructie worden houten balken door verticale krachten belast. De sterkte van zo'n balk hangt dan af van zijn afmetingen en de gebruikte houtsoort.
We bekijken liggende balken met een rechthoekige doorsnede. Balken kunnen op twee manieren worden neergelegd: met de lange rechthoekszijde horizontaal of verticaal. We noemen dit horizontaal of verticaal geplaatste balken. Zie figuur 2. De richting van de krachten is aangegeven met pijlen.

figuur 2



Voor de sterkte S van een balk van een bepaalde houtsoort geldt de formule: $S = 0{,}12 \cdot b \cdot h^2$.
Hierbij is b de basis in cm en h de hoogte van de dwarsdoorsnede in cm.

Een balk van deze houtsoort heeft een rechthoekige dwarsdoorsnede van 24 cm bij 6 cm.
Deze balk kan in verticale en in horizontale stand worden geplaatst.

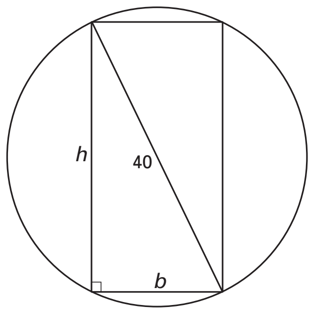
3p **6** ☐ In welke stand is de sterkte het grootst? Licht je antwoord toe.

De oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van een balk van deze houtsoort is gelijk aan 60 cm^2.
Voor de sterkte S geldt: $S = 100$.

5p **7** ☐ Bereken de afmetingen h en b van deze dwarsdoorsnede. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

Uit een cilindervormige boom van dezelfde houtsoort wil men een balk zagen met basis b en hoogte h.
Voor deze balk geldt nog steeds de formule $S = 0{,}12 \cdot b \cdot h^2$.
De cirkelvormige dwarsdoorsnede heeft een diameter van 40 cm. Zie figuur 3.

figuur 3



In deze situatie kan voor de sterkte de volgende formule gevonden worden: $S = 192 \cdot b - 0{,}12 \cdot b^3$.

4p **8** ☐ Toon aan dat deze formule juist is.

Men wil de balk zo uit de boom zagen dat de sterkte S maximaal is.

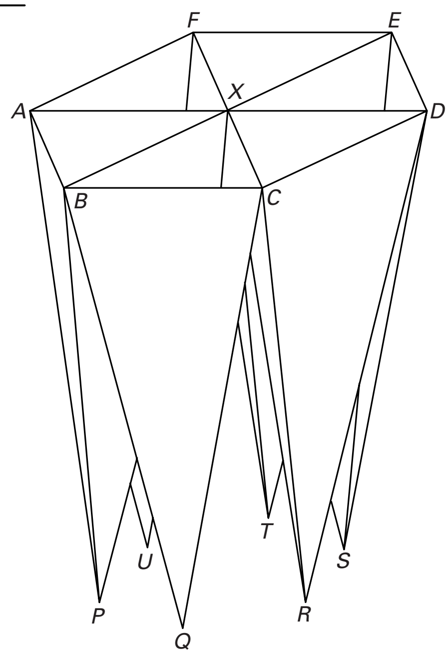
3p **9** ☐ Bereken de afmetingen van de dwarsdoorsnede van de balk in dat geval. Geef de waarden van b en h in één decimaal nauwkeurig.

Zespiramidenvaas

Op de foto is een zespiramidenvaas te zien. In figuur 4 is een model van deze vaas getekend. Het model bestaat uit zes identieke regelmatige, driezijdige piramiden. De zes grondvlakken van deze piramiden (bovenaan in figuur 4) liggen in één vlak en vormen samen een regelmatige zeshoek *ABCDEF*. De diagonalen *AD*, *BE* en *CF* snijden elkaar in het punt *X*. De achttien opstaande ribben zijn even lang.
De vaas steunt met de toppen *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* en *U* op de grond.

foto

figuur 4

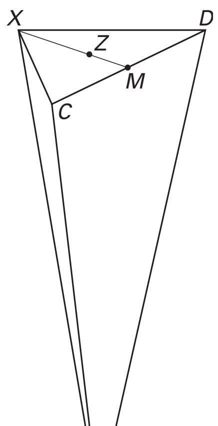


In de linker figuur op de bijlage bij vraag 10 is een begin getekend van een bovenaanzicht van de vaas; in de rechter figuur is een begin getekend van een zijaanzicht, waarbij de kijkrichting evenwijdig is met *BD*.
Beide aanzichten zijn op schaal getekend.

10p **10** ☐ Voltooi de beide aanzichten. Zet alle letters erbij.

In figuur 5 is één van de zes regelmatige piramiden getekend. *M* is het midden van de ribbe *CD*. *Z* is het zwaartepunt van driehoek *XCD*. Er geldt dan: de lengte van *MZ* is $\frac{1}{3}$ deel van de lengte van *MX*. *Z* ligt recht boven *R*.
De hoogte *RZ* van de vaas is 28 cm en de zijden van de regelmatige zeshoek *ABCDEF* zijn 12 cm.

figuur 5



6p **11** ☐ Bereken $\angle XMR$. Rond je antwoord af op hele graden.

In de vaas wordt zo veel water gedaan dat in alle zes piramiden de waterspiegels op halve hoogte staan.
De totale oppervlakte van de waterspiegels is dan ongeveer 93,5 cm^2.

4p **12** ☐ Toon dat aan.

Er wordt 3 liter water in de lege vaas gegoten (1 liter = 1 dm^3).

5p **13** ☐ Bereken voor hoeveel procent de vaas gevuld is. Geef je antwoord in gehele procenten nauwkeurig.

Bijlage bij vraag 10

Wiskunde B1,2 (nieuwe stijl)

Examen HAVO 2002

Tijdvak 1
Maandag 27 mei
13.30–16.30 uur

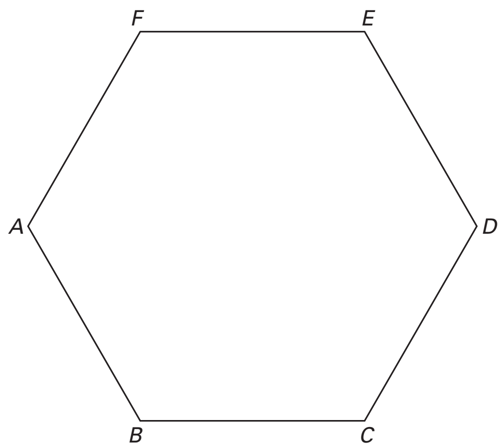
Examennummer

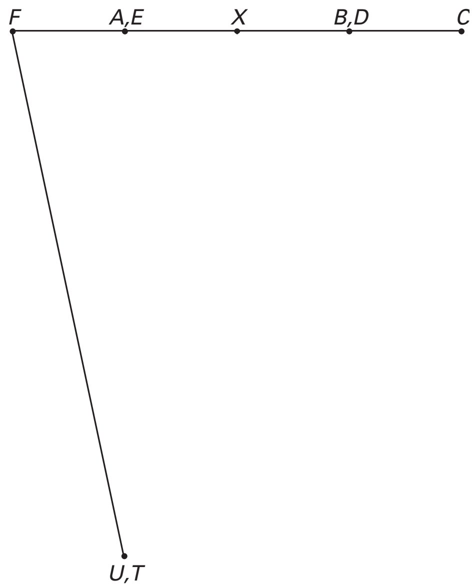
....

Naam

....

Vraag 10

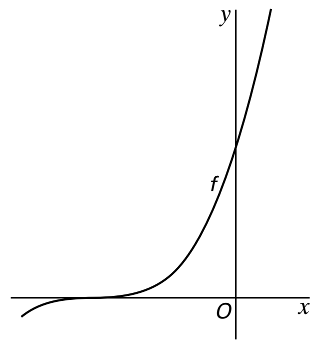




Derdegraadsfunctie

Met domein [−6, 1] is gegeven de functie $f(x)=(x+4)^3$.
In figuur 6 is de grafiek van f getekend.

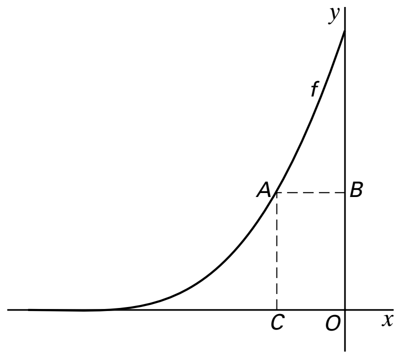
figuur 6



4p **14** ☐ Geef het bereik van de afgeleide functie f' op het gegeven domein. Licht je antwoord toe.

In figuur 7 is de grafiek van f getekend op het interval [−4, 0].
Op dit deel van de grafiek ligt een punt A.
Door vanuit A loodlijnen neer te laten op de x-as en de y-as ontstaat een rechthoek $COBA$.
Als punt A over de grafiek van f beweegt, zal de oppervlakte van de bijbehorende rechthoek veranderen.
De oppervlakte S van de rechthoek is afhankelijk van de x-coördinaat a van punt A.
Er geldt: $S(a)=-a(a+4)^3$.
De functie S heeft een maximum op het domein [−4, 0]. Iemand beweert dat dit maximum optreedt bij $a = -1$. In dat geval zou $S'(-1)$ gelijk moeten zijn aan 0.

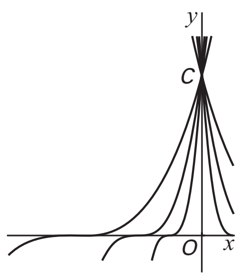
figuur 7



4p **15** ☐ Toon met behulp van differentiëren aan dat $S'(-1)=0$.

De gegeven functie f is een exemplaar uit de verzameling functies $g(x)=(px+4)^3$.
Voor $p = 1$ ontstaat de gegeven functie f.
In figuur 8 is voor een aantal waarden van p de bijbehorende grafiek getekend.
Voor elke waarde van p snijdt deze grafiek de y-as in het punt $C(0, 64)$.

figuur 8



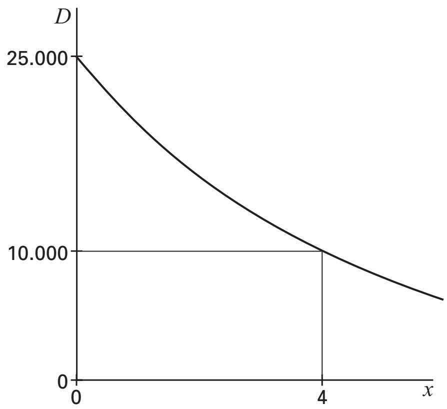
De helling van de grafiek van g in het punt C is afhankelijk van de waarde van p.

5p **16** ☐ Bereken exact voor welke waarde van p deze helling gelijk aan 10 is.

Bevolkingsdichtheid

Wijken in een stad die dicht bij het centrum liggen zijn dichter bevolkt dan wijken verder van het centrum af.
In 1950 begon men een onderzoek naar het verband tussen de bevolkingsdichtheid in een stad en de afstand tot het stadscentrum.
De bevolkingsdichtheid D in een punt P is het aantal inwoners in een cirkelvormig gebied rond P met een oppervlakte van 1 km^2.
In figuur 9 zie je een grafiek die voor een bepaalde stad het verband tussen de afstand x tot het stadscentrum (in km) en de bevolkingsdichtheid D weergeeft.
Uit deze grafiek kun je aflezen dat op een afstand van 4 kilometer van het stadscentrum de bevolkingsdichtheid gelijk is aan 10 000 inwoners per km^2.

figuur 9



Bij de grafiek van figuur 9 hoort de exponentiële formule $D = a \cdot \mathrm{e}^{-bx}$.
Hierin zijn a en b constanten.

4p **17** ☐ Bereken met behulp van figuur 9 de waarden van a en b. Rond in je antwoord gevonden waarden die niet geheel zijn af op twee decimalen.

Voor een tweede stad heeft men het volgende lineaire verband tussen $\ln(D)$ en x gevonden:

$$\ln(D) = 10 - 0{,}2x$$

5p **18** ☐ Toon algebraïsch aan dat bij benadering geldt: $D = 22\,000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2x}$.

Later heeft men ontdekt dat de aan het begin gegeven formule $D = a \cdot \mathrm{e}^{-bx}$ dikwijls niet voldoet, omdat vanuit het centrum gezien de dichtheid eerst toeneemt en vervolgens weer afneemt.

Voor de tweede stad leverde dit een nieuwe formule op: $D = 22000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}2x - 0{,}075x^2}$.
De grafiek van D is in figuur 10 getekend.

5p **19** ☐ Bereken met behulp van differentiëren op welke afstand van het centrum de bevolkingsdichtheid maximaal is.

figuur 10