Verzet en snelheid

Een racefiets heeft een set voortandwielen en een set achtertandwielen. De racefiets op de foto heeft drie voortandwielen, met 36, 46 en 52 tanden. De acht achtertandwielen hebben 11, 14, 17, 20, 22, 24, 26 en 28 tanden.
Door te schakelen kan een wielrenner bepalen over welke tandwielen hij de ketting wil laten lopen. Dit heet de keuze van een bepaald **verzet**.

foto

Een wielrenner kiest er bijvoorbeeld voor om de ketting over het voortandwiel met 52 tanden en over het achtertandwiel met 20 tanden te laten lopen. Dit betekent dat als hij de pedalen één keer rond laat gaan, het achterwiel $\frac{52}{20} = 2{,}6$ keer rondgaat. Bij een keuze van de combinatie 36 : 11 gaat het achterwiel (afgerond) 3,3 keer rond. Hoe vaker het achterwiel ronddraait bij één rondgang van de pedalen, hoe zwaarder het verzet is. De combinatie 36 : 11 levert dus een zwaarder verzet op dan de combinatie 52 : 20.

In de tabel op de uitwerkbijlage staat een overzicht van alle mogelijke combinaties van een voor- en een achtertandwiel.

2p **1** Geef op de uitwerkbijlage met kruisjes alle mogelijke combinaties aan van een voor- en een achtertandwiel die een zwaarder verzet opleveren dan de combinatie 52 : 20.

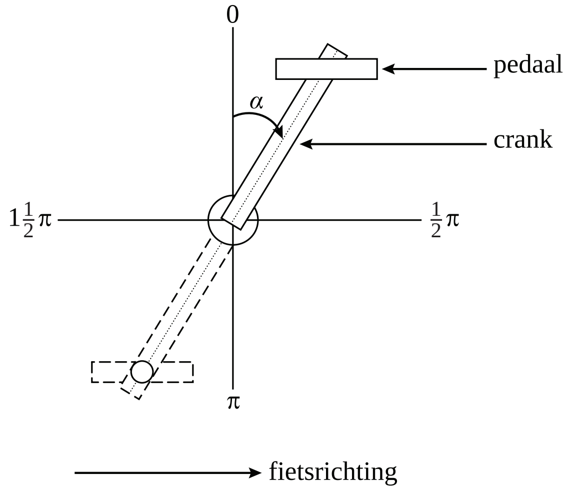
In de eindsprint van een wielerwedstrijd haalt een wielrenner een snelheid van 68 km/uur. Hij gebruikt daarbij de combinatie 52 : 11. De diameter van zijn achterwiel inclusief de opgepompte band is 67 cm.

5p **2** Bereken hoeveel keer per minuut de wielrenner de pedalen rond moet trappen om deze snelheid te bereiken.

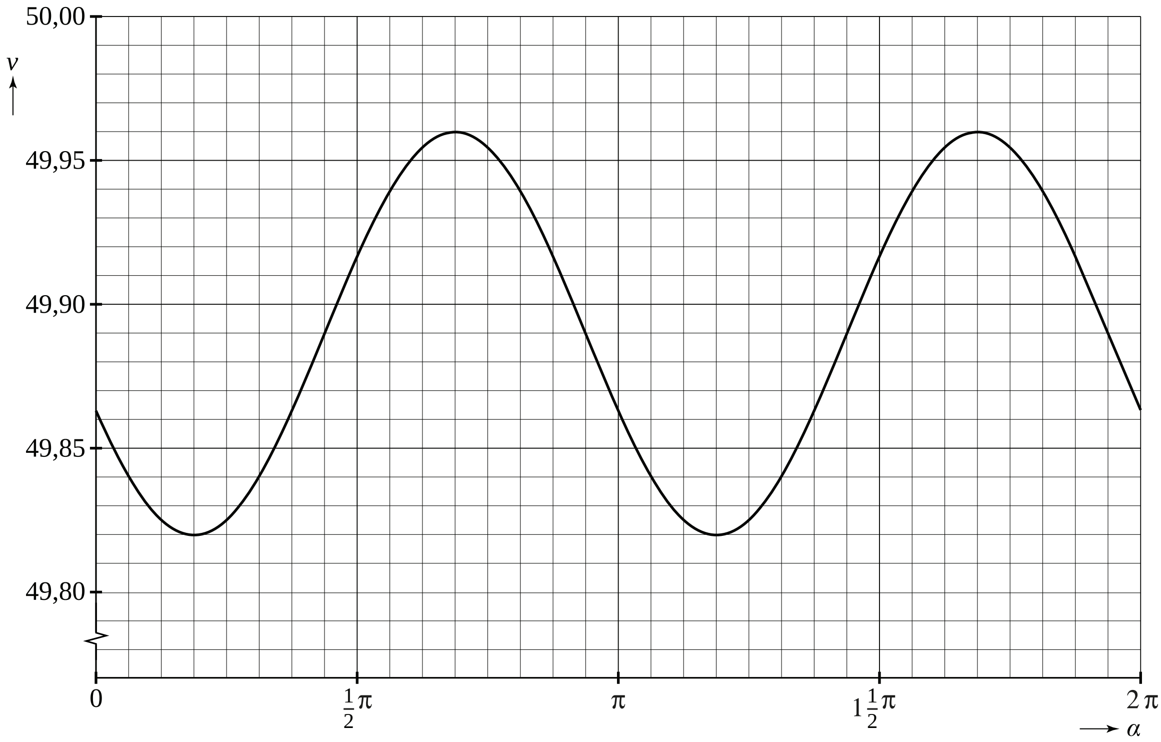
Fietsen met een constante snelheid is in de praktijk niet mogelijk omdat de kracht die op de pedalen wordt uitgeoefend, afhangt van de stand van de **crank**. De grootte van de hoek tussen de crank en de verticale richting in radialen noemen we α. Zie figuur 1.

In figuur 2 is de snelheid v van een wielrenner in km/uur uitgezet tegen α.

figuur 1



figuur 2



De grafiek in figuur 2 is te beschrijven met een formule van de vorm $v = p + q\sin(r(\alpha - s))$.

4p **3** Bepaal mogelijke waarden van p, q, r en s.

uitwerkbijlage

1

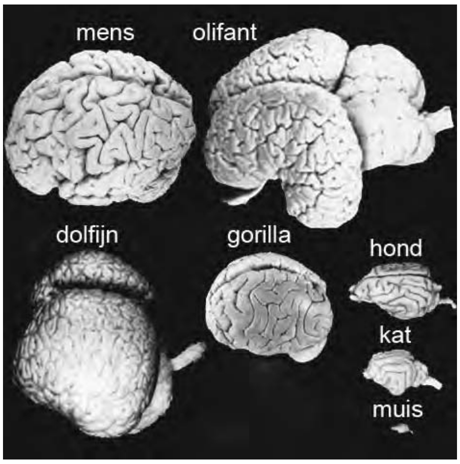
		achtertandwiel							
voortandwiel		11	14	17	20	22	24	26	28
	36	x							
	46								
	52								

Hersengewicht

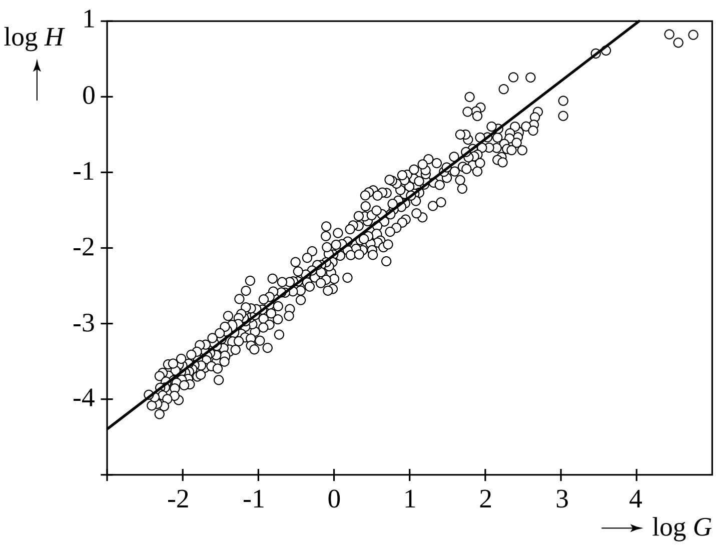
Niet alle dieren hebben even zware hersenen. Zwaardere dieren hebben meestal zwaardere hersenen.

Het gemiddelde lichaamsgewicht van volwassen dieren van een soort in kg, noemen we G. Het gemiddelde hersengewicht van volwassen dieren van die soort in kg, noemen we H. De grafiek in figuur 2 geeft het verband weer tussen de logaritme van G en de logaritme van H.
In figuur 2 zijn meetpunten te zien die horen bij 477 soorten zoogdieren. De meetpunten liggen min of meer op een rechte lijn. Deze rechte lijn is ook in figuur 2 getekend. Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



figuur 2



Het gemiddelde lichaamsgewicht van volwassen katten is 5 kg.

4p **4** Bepaal met behulp van de rechte lijn in de figuur op de uitwerkbijlage het gemiddelde hersengewicht van volwassen katten.

Een formule die bij de rechte lijn hoort is $\log H = 0,767 \cdot \log G - 2,097$.

Er zijn diersoorten waarvan de volwassen dieren een gemiddeld hersengewicht hebben dat 1% is van hun gemiddelde lichaamsgewicht.

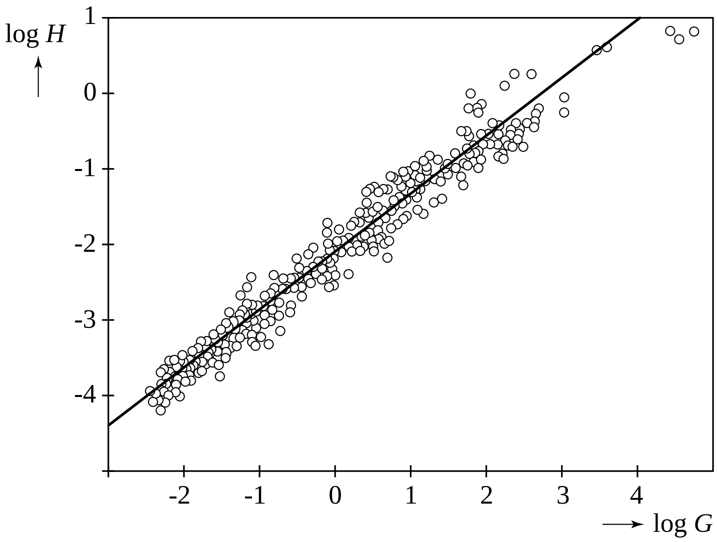
3p **5** Bereken met behulp van de gegeven formule dit gemiddelde lichaamsgewicht.

De bovenstaande formule is ook te schrijven als $H = a \cdot G^b$

5p **6** Bereken de waarden van a en b. Geef je antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

uitwerkbijlage

4

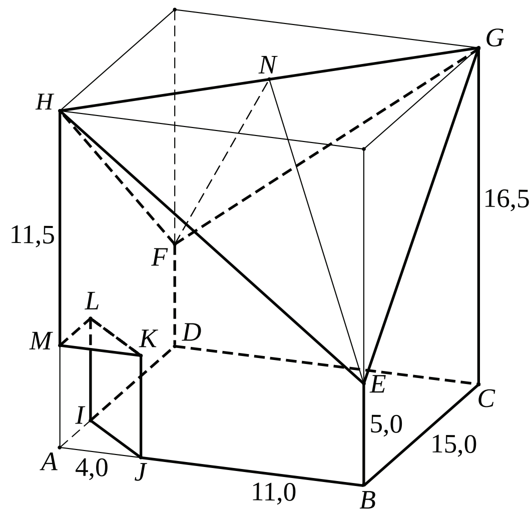


Klimhal

In Enschede staat een klimhal. Zie de foto.
De klimhal heeft de vorm van een balk met een vierkant grondvlak waarvan aan de bovenkant twee piramides zijn afgehaald. Aan de onderkant, bij de ingang, ontbreekt een prisma.
In figuur 1 is een model van de klimhal (zonder de ramen) in de balk getekend. EN en FN zijn hulplijnen, met N het midden van GH.

foto

figuur 1



De volgende gegevens zijn bekend:
- $AM = JK = IL = BE = DF = 5,0$ meter;
- $AB = BC = CD = AD = 15,0$ meter;
- $CD = AD = 15,0$ meter;
- $AH = CG = 16,5$ meter;
- $AJ = AI = KM = LM = 4,0$ meter.

6p **7** Teken op schaal 1 : 250 het aanzicht in kijkrichting BD van het model van de klimhal. Zet alle letters op de juiste plaats. Licht je werkwijze met berekeningen toe.

5p **8** Bereken met behulp van de gegevens over het model de inhoud van de klimhal.

De klimvereniging adverteert met een klimoppervlakte van 800 m^2.
Aan de binnenkant van de klimhal is een groot deel van de verticale en schuine vlakken ingericht als klimwand. Het vlak dat in het model de hoekpunten I, J, K en L heeft, wordt buiten beschouwing gelaten. Verder is gegeven dat $EN = FN \approx 15,6$ meter.

5p **9** Bereken met behulp van de gegevens over het model hoeveel procent van alle schuine en verticale vlakken, behalve vlak $IJKL$, is ingericht als klimwand.

Productfuncties

De functie f is gegeven door $f(x) = (x-1)\cdot\sqrt{x}$.

De functie f heeft een minimum.

6p **10** Bereken exact de waarde van x waarbij dit minimum wordt aangenomen.

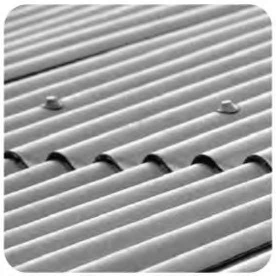
De functie f behoort tot de familie van functies f_a die gegeven zijn door $f_a(x) = (x-1)\cdot\sqrt{x-a}$.

4p **11** Bereken op algebraïsche wijze voor welke waarde van a het punt (5, 6) op de grafiek van f_a ligt.

Golfplaat

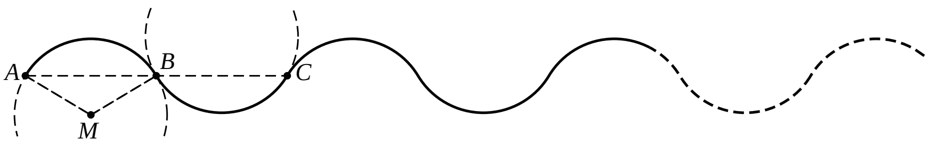
Golfplaat is een bouwmateriaal dat onder andere gebruikt wordt als dakbedekking voor schuren en fietsenstallingen.

foto



Als je tegen de zijkant van een golfplaat aankijkt, zie je een aaneenschakeling van gelijke cirkelbogen. Zie figuur 1. Een cirkelboog is een deel van een cirkel.

figuur 1



In figuur 1 vormen de cirkelbogen AB en BC samen één golf. De cirkel waarvan cirkelboog AB een deel is, heeft als middelpunt M.

Voor het zijaanzicht van de golfplaat die we in deze opgave bekijken, geldt het volgende:

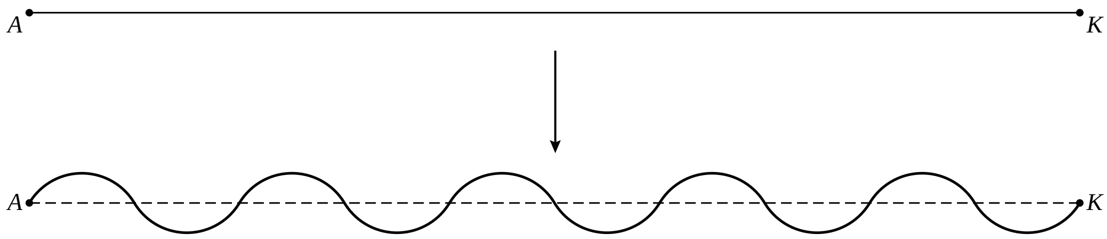
- Het zijaanzicht bestaat uit een aaneenschakeling van 5 golven.
- Elke cirkelboog van dit zijaanzicht is $\frac{1}{3}$ deel van een cirkel.
- De cirkels hebben een straal van 3 cm.

De totale lengte van alle cirkelbogen van het zijaanzicht van de golfplaat is ongeveer 62,8 cm.

3p **12** Toon dit met een berekening aan.

Bij de productie van een golfplaat wordt een vlakke plaat zodanig geperst dat er een golfprofiel ontstaat. De lengte van de golfplaat die zo ontstaat, is gelijk aan de lengte van de oorspronkelijke vlakke plaat. Het materiaal rekt dus uit als de golven in de plaat geperst worden. Zie figuur 2.

figuur 2

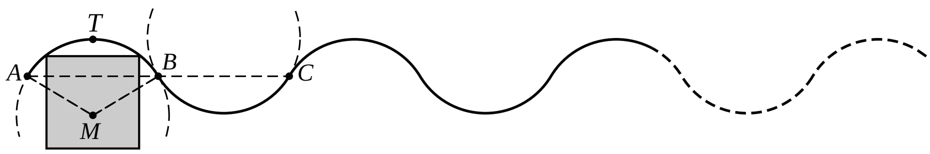


Als men de totale lengte van de 10 cirkelbogen (62,8 cm) vergelijkt met de lengte AK van de oorspronkelijke vlakke plaat, dan kan men uitrekenen hoeveel het materiaal is uitgerekt.

5p **13** Bereken hoeveel procent het materiaal is uitgerekt.

De golfplaat wordt op een balk bevestigd. Zie figuur 3. In deze figuur is de balk grijs gemaakt. De afmetingen van de dwarsdoorsnede van de balk zijn 4 cm bij 4 cm.

figuur 3



De schroeven worden bij T verticaal door de golfplaat in de balk geschroefd. T is het midden van cirkelboog AB. De schroeven mogen niet aan de onderkant van de balk uitsteken.

5p **14** Bereken in mm nauwkeurig de maximale lengte van de schroeven die gebruikt mogen worden.

Helling

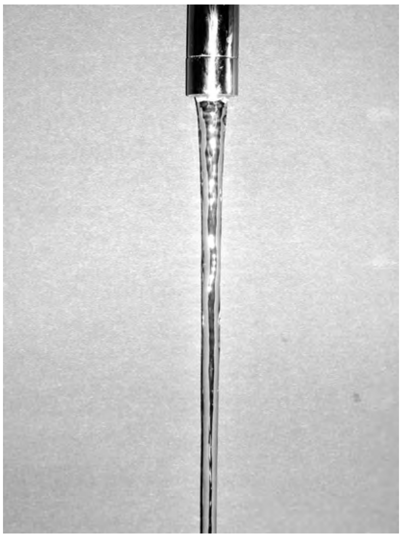
De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 + 1}$.

4p **15** Bereken met behulp van differentiëren de helling van de grafiek van f in het punt (2, 1).

Water en zwaartekracht

In deze opgave gaan we ervan uit dat de hoeveelheid water die per tijdseenheid uit een kraan stroomt constant is en dat het water uit de kraan recht naar beneden stroomt. Zie de foto.

foto



We kunnen de uitstroomsnelheid v_1 van het water bij het verlaten van de kraan uitrekenen met behulp van de formule:

$$v_1 = \frac{W}{A_1}$$

Hierin is v_1 de uitstroomsnelheid in cm/s, W is de hoeveelheid water die per tijdseenheid uit de kraan stroomt in cm^3/s en A_1 is de oppervlakte van de uitstroomopening van de kraan in cm^2.

Het duurt precies 2 minuten voordat een emmer met een inhoud van 10 liter (= 10 000 cm^3) volledig met water uit de kraan is gevuld. De cirkelvormige uitstroomopening van de kraan heeft een diameter van 1,6 cm.

3p **16** Bereken de uitstroomsnelheid. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm/s.

Het water onder in een waterstraal heeft een hogere snelheid dan het water dat net uit de kraanopening stroomt. Dit komt door de werking van de zwaartekracht.

Voor de stroomsnelheid van het water in een waterstraal geldt de volgende formule:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 19{,}62 \cdot l}$$

Hierin is v_1 weer de uitstroomsnelheid in cm/s en v_2 is de stroomsnelheid van het water in cm/s op een afstand l in cm van de kraanopening.

We zijn geïnteresseerd in de stroomsnelheid van het water op een afstand van 40 cm van de kraanopening.
Er is een bepaalde uitstroomsnelheid waarbij de stroomsnelheid op deze afstand twee maal zo groot is als de uitstroomsnelheid.

4p **17** Bereken bij welke uitstroomsnelheid dit het geval is.

Op elke hoogte in de waterstraal is de hoeveelheid water die per seconde passeert gelijk. Er geldt dus:

(1) $v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$

Hierin is A_1 de oppervlakte van de cirkelvormige uitstroomopening van de kraan en A_2 is de oppervlakte van de cirkelvormige dwarsdoorsnede van de waterstraal.

De straal van de kraanopening noemen we r_1 en de straal van de dwarsdoorsnede van de waterstraal noemen we r_2. Voor de oppervlakten van de kraanopening en de dwarsdoorsnede van de waterstraal geldt dan

(2) $A_1 = \pi \cdot r_1^2$ en

(3) $A_2 = \pi \cdot r_2^2$.

Ook geldt nog steeds de formule:

(4) $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 19,62 \cdot l}$

Uit de bovenstaande vier formules kan voor de straal r_2 de volgende formule worden afgeleid:

$$r_2^2 = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + 19,62 \cdot l}} \cdot r_1^2$$

4p **18** Leid deze formule af.

Als je de foto goed bekijkt, zie je dat de waterstraal naar beneden toe steeds smaller wordt. Dat blijkt ook uit de formules hierboven (hoe groter l, hoe kleiner r_2).

Iemand wil een flesje met water vullen. De diameter van de cirkelvormige opening van het flesje is 1,6 cm. Hij vult het flesje onder een kraan waarvan de uitstroomopening een diameter van 2,0 cm heeft. Het water stroomt met een snelheid van 18 cm/s uit de kraan. Om geen water te verspillen, zal hij het flesje niet direct onder de opening van de kraan houden, maar een stuk lager.

3p **19** Bereken de minimale afstand tussen de opening van de kraan en de opening van het flesje waarbij geen water verspild wordt. Rond je antwoord af op een geheel aantal centimeters.