Diersoorten

Uit onderzoek is gebleken dat er een verband bestaat tussen de lengte van diersoorten en het aantal diersoorten met die lengte. Met de lengte van een diersoort wordt bedoeld de gemiddelde lengte van volwassen dieren van die soort. Het blijkt dat er weinig lange diersoorten zijn en veel korte diersoorten. Uit gegevens die de onderzoeker Dobson verzamelde, blijkt dat bij benadering de volgende formule geldt:

foto

$$S = \frac{700}{L^2}$$

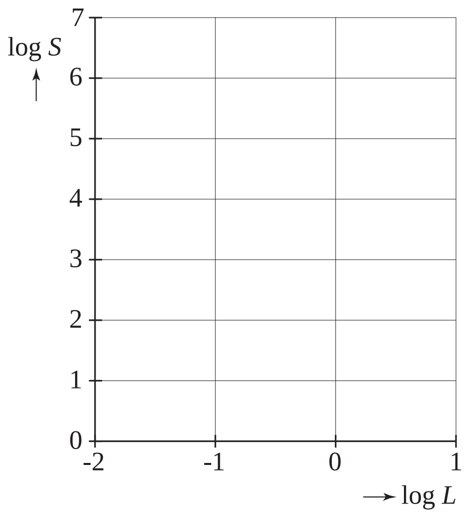
Hierin is L de lengte in meter en S het aantal diersoorten met die lengte. Deze formule geldt voor $0{,}01 \leq L \leq 10$.

Het aantal diersoorten van 10 cm lang is veel groter dan het aantal diersoorten van 50 cm lang.

3p **1** Bereken met behulp van de bovenstaande formule hoeveel maal zo groot.

De grafiek van S als functie van L is op het scherm van een grafische rekenmachine lastig in beeld te brengen vanwege de enorme verschillen in S-waarden.
Het is wél mogelijk om de grafiek van $\log S$ als functie van $\log L$ goed in beeld te krijgen. Als een assenstelsel wordt gebruikt waarin $\log S$ is uitgezet tegen $\log L$, wordt de grafiek een rechte lijn. In figuur 1 is een dergelijk assenstelsel getekend. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Met behulp van de bovenstaande formule kan voor een aantal waarden van L de bijbehorende waarde van S worden berekend. Daarna kunnen $\log L$ en $\log S$ worden berekend en kan het bijbehorende punt in het assenstelsel worden getekend.

5p **2** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek van $\log S$ als functie van $\log L$. Geef een toelichting.

De formule $S = \dfrac{700}{L^2}$ is met behulp van algebra om te werken tot de vorm
$\log S = p + q \cdot \log L$

4p **3** Bereken op deze manier de waarden van p en q.

Voor diersoorten met een lengte tussen 10 en 50 cm blijkt er ook een verband te bestaan tussen het gemiddelde gewicht van de volwassen dieren van een diersoort en het aantal diersoorten met dit gemiddelde gewicht. Bij benadering geldt:

$$D = \frac{8500}{G^{\frac{2}{3}}}$$

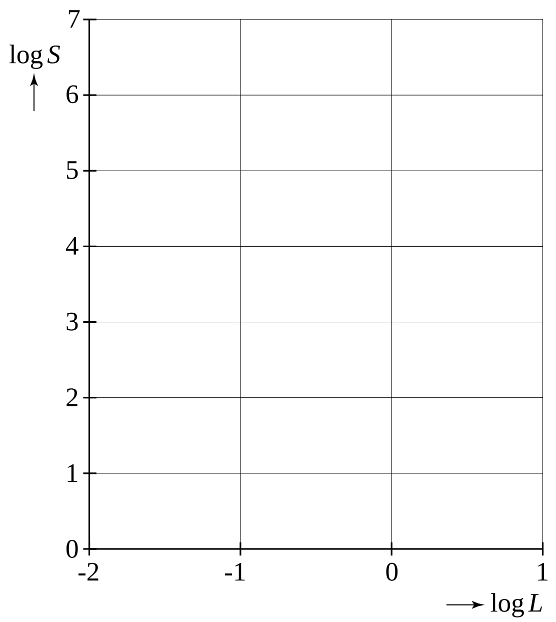
Hierin is G het gemiddelde gewicht in kilogram en D is het aantal diersoorten met dit gemiddelde gewicht.

Volwassen huiscavia's zijn gemiddeld 28 cm lang en hebben een gemiddeld gewicht van 1,1 kg. Iemand beweert dat er uit de gegeven formules volgt dat er 7000 diersoorten zouden kunnen zijn met dezelfde gemiddelde lengte en met hetzelfde gemiddelde gewicht als de huiscavia.

3p **4** Heeft deze persoon gelijk? Licht je antwoord met berekeningen toe.

uitwerkbijlage

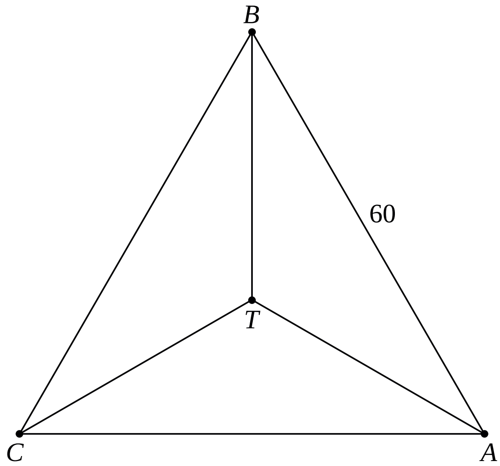
2



Tetraëder van Bottrop

Een regelmatige tetraëder is een viervlak waarvan de vier grensvlakken de vorm van een gelijkzijdige driehoek hebben. In figuur 1 is een bovenaanzicht van de regelmatige tetraëder $ABC.T$ te zien. Hierin is ABC het grondvlak en T de top. Er geldt $AB = 60$.

figuur 1



De lengte van CT in het bovenaanzicht van figuur 1 is ongeveer 35.

4p **5** Bereken exact de lengte van CT in het bovenaanzicht van figuur 1.

Bij de Duitse stad Bottrop staat een stalen uitkijktoren die is ontworpen door de architect Wolfgang Christ. Zie de foto.

foto

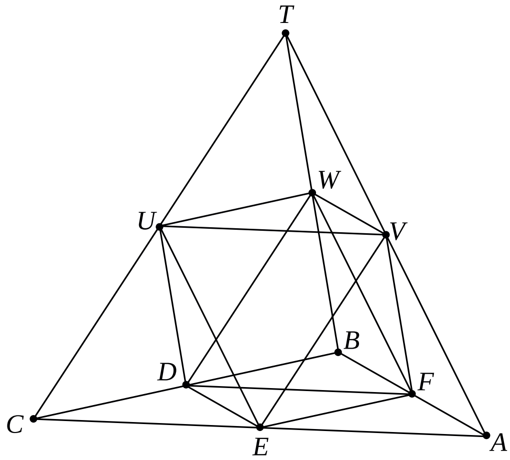
De hoofdconstructie bestaat uit zes even lange buizen van 60 meter en heeft de vorm van een regelmatige tetraëder. Het bovenaanzicht van de tetraëder van Bottrop waarin alleen de hoofdconstructie wordt getekend, heeft dezelfde vorm als het bovenaanzicht in figuur 1.

De vier betonnen pijlers waar de tetraëder van Bottrop op staat, hebben een hoogte van 9 meter.

4p **6** Bereken de totale hoogte van de uitkijktoren. Rond je antwoord af op een geheel aantal meters.

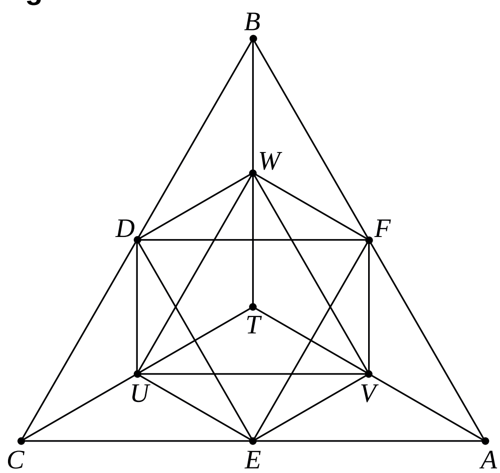
Bij de bouw van de uitkijktoren werden in elk van de vier grensvlakken van de grote tetraëder de middens van de zijden met elkaar verbonden. Hiervoor zijn in totaal 12 buizen van 30 meter gebruikt. Zie figuur 2.

figuur 2



In figuur 3 is van dit gedeelte van de tetraëder een bovenaanzicht getekend. Op de uitwerkbijlage is deze figuur vergroot weergegeven.

figuur 3

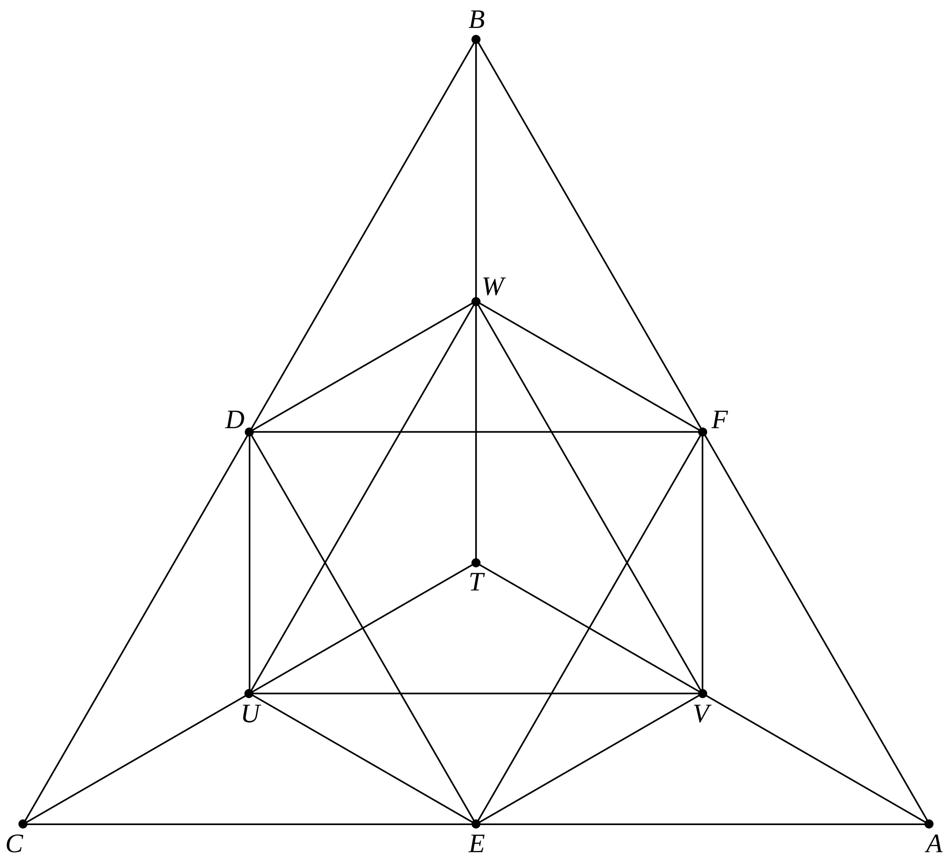


De hoofdconstructie van de uitkijktoren is tetraëder $ABC.T$. In figuur 2 zijn nog vier kleinere tetraëders te onderscheiden: $UVW.T$, $CED.U$, $BDF.W$ en $AFE.V$. Op de foto is te zien dat bij drie van deze kleinere tetraëders de middens van de zijden in de grensvlakken met elkaar verbonden zijn. Daarvoor zijn in elk van deze drie tetraëders 12 buizen van 15 meter gebruikt.

4p **7** Teken in het bovenaanzicht op de uitwerkbijlage de 12 buizen van 15 meter in tetraëder $CED.U$.

uitwerkbijlage

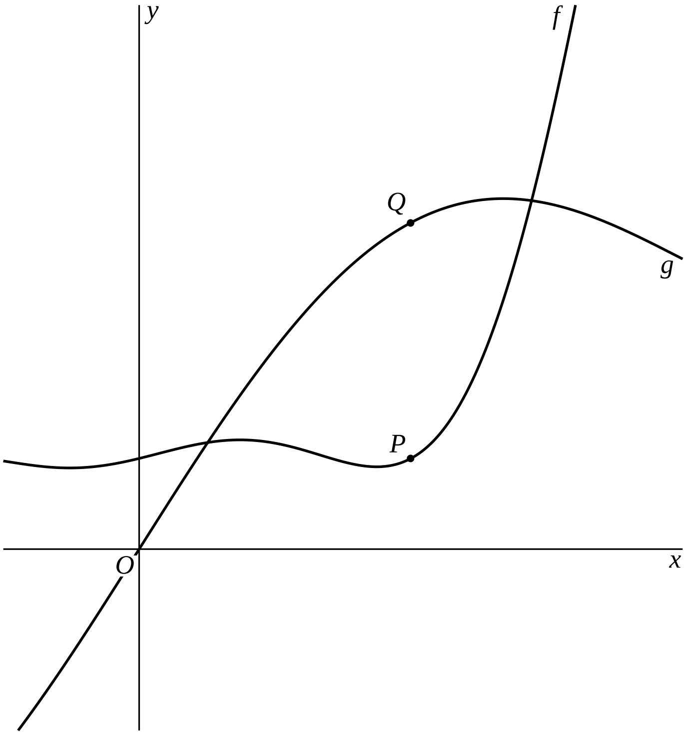
7



Raken

Op het domein [-1, 4] zijn de functies f en g gegeven door
$f(x)=(x^3-2x)\cdot\sin(x-2)+5$ en $g(x)=4x+10\sin(\frac{1}{4}\pi x)$.
In figuur 1 zijn de grafieken van f en g getekend.

figuur 1



Verder zijn gegeven punt P op de grafiek van f en punt Q op de grafiek van g. De x-coördinaat van P is gelijk aan de x-coördinaat van Q. Bovendien is gegeven dat de hellingen in punt P en punt Q gelijk zijn.

De grafiek van f wordt over een afstand a omhoog geschoven, waarbij de waarde van a zo gekozen wordt dat het verschoven punt P samenvalt met punt Q. Hierdoor zullen de verschoven grafiek van f en de grafiek van g elkaar raken in Q.

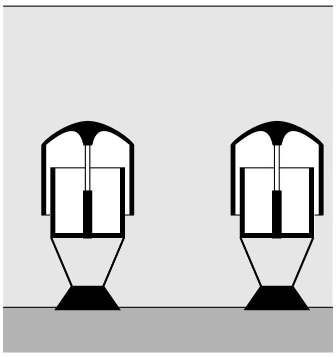
7p **8** Bereken de waarde van a met behulp van differentiëren.

Archimedes Wave Swing

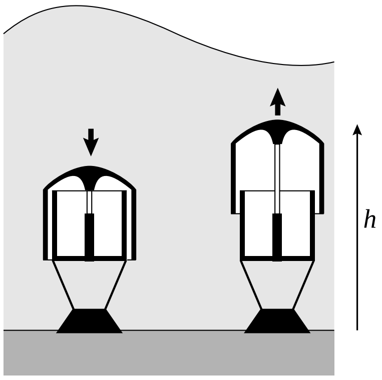
De Archimedes Wave Swing (afgekort AWS) is ontwikkeld om de golfbeweging van de zee te gebruiken om energie op te wekken.

Elke AWS bestaat uit twee halfopen delen. Het onderste deel is verankerd aan de zeebodem. Het bovenste deel, ook wel drijver genoemd, valt over het onderste heen. In figuur 1 zie je twee AWS'en onder een vlakke zeespiegel. In figuur 2 zie je dat de golven er voor zorgen dat de drijvers op en neer bewegen. Deze beweging van de drijver wordt gebruikt om energie op te wekken.

figuur 1



figuur 2



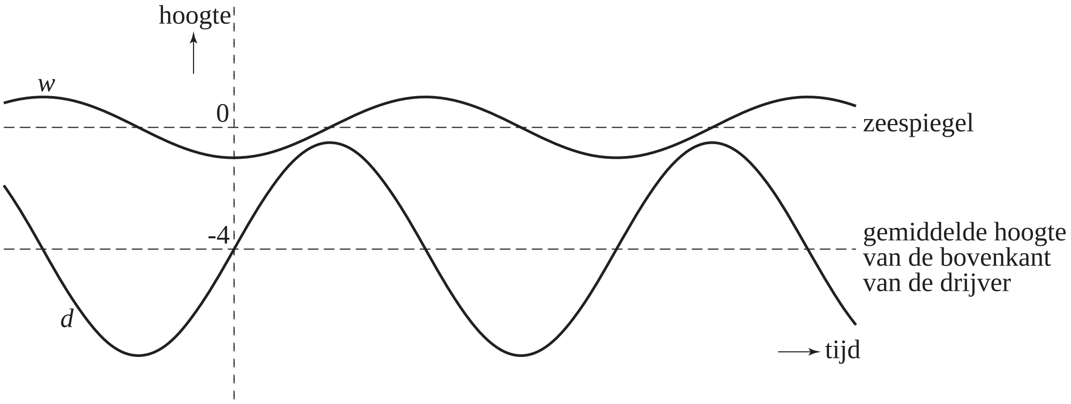
De minimale hoogte van de bovenkant van de drijver ten opzichte van de zeebodem is 30,0 meter. De maximale hoogte is 37,0 meter. De drijver maakt onder invloed van de golven een periodieke beweging met dezelfde periode als de periode van de golfbeweging.

We gaan voor de volgende vraag uit van een situatie waarbij de periode van de golfbeweging 12 seconden is en de hoogte van de bovenkant van de drijver van de AWS varieert van 30,0 meter tot en met 37,0 meter. De hoogte van de bovenkant van de drijver kan dan worden beschreven door een formule van de vorm $h = a + b\sin(c \cdot t)$. Hierin is h de hoogte ten opzichte van de zeebodem in meter en t de tijd in seconde.

3p **9** Bereken de waarden van a, b en c in deze formule. Licht je antwoord toe.

Van een bepaalde AWS bevindt de bovenkant van de drijver zich gemiddeld 4,0 meter onder de zeespiegel. De zeespiegel is de gemiddelde waterhoogte. Zie figuur 3. De hoogte d van de bovenkant van deze drijver ten opzichte van de zeespiegel wordt nu beschreven door: $d = -4,0 + 3,5\sin(0,5t)$, met d de hoogte in meter en t de tijd in seconde.
De waterhoogte ten opzichte van de zeespiegel hangt af van de amplitude van de golven. Hiervoor geldt de formule $w = -A \cdot \cos(0,5t)$. Hierin is w de waterhoogte in meter, A de amplitude van de golven ($A \geq 0,5$) in meter en t de tijd in seconde. In figuur 3 zijn grafieken van d en w getekend voor een bepaalde waarde van A.

figuur 3

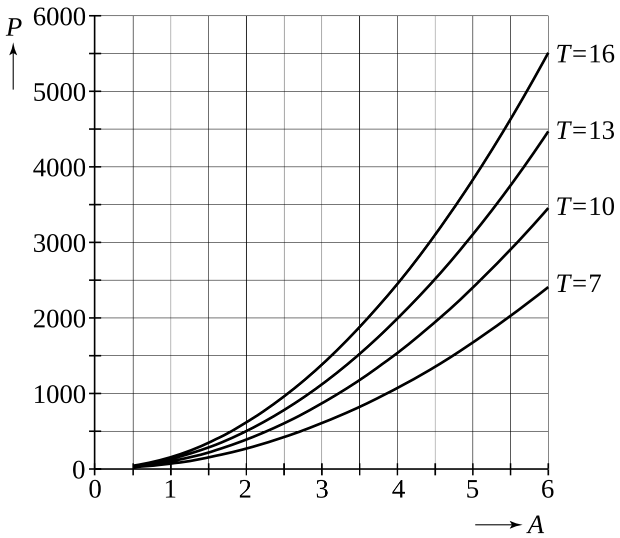


In de situatie van figuur 3 blijft de bovenkant van de drijver altijd onder water. Maar als de amplitude van de golfbeweging verder toeneemt, kan de drijver soms boven het water uitsteken.

5p **10** Onderzoek met de grafische rekenmachine vanaf welke amplitude van de golfbeweging de drijver af en toe boven water verschijnt. Rond je antwoord in meter af op één decimaal.

De AWS zet de energie van de golfbeweging om in elektrische energie. De hoeveelheid energie die per seconde wordt omgezet, heet het opgewekt vermogen. Bij vier verschillende perioden T (in seconde) zijn het opgewekte vermogen P (in kiloWatt) en de amplitude van de golven A (in meter) gemeten. De resultaten zijn te zien in figuur 4. Deze figuur is vergroot op de uitwerkbijlage opgenomen.

figuur 4



Iemand wil onderzoeken of er bij een periode van 16 seconden een kwadratisch verband bestaat tussen de amplitude en het vermogen. Hij stelt daarom de volgende formule op: $P = k \cdot A^2$. Vervolgens leest hij het punt (5, 3850) af. Hiermee kan hij de waarde van k berekenen. Ten slotte kan met de formule het vermogen bij $A = 6$ worden berekend.

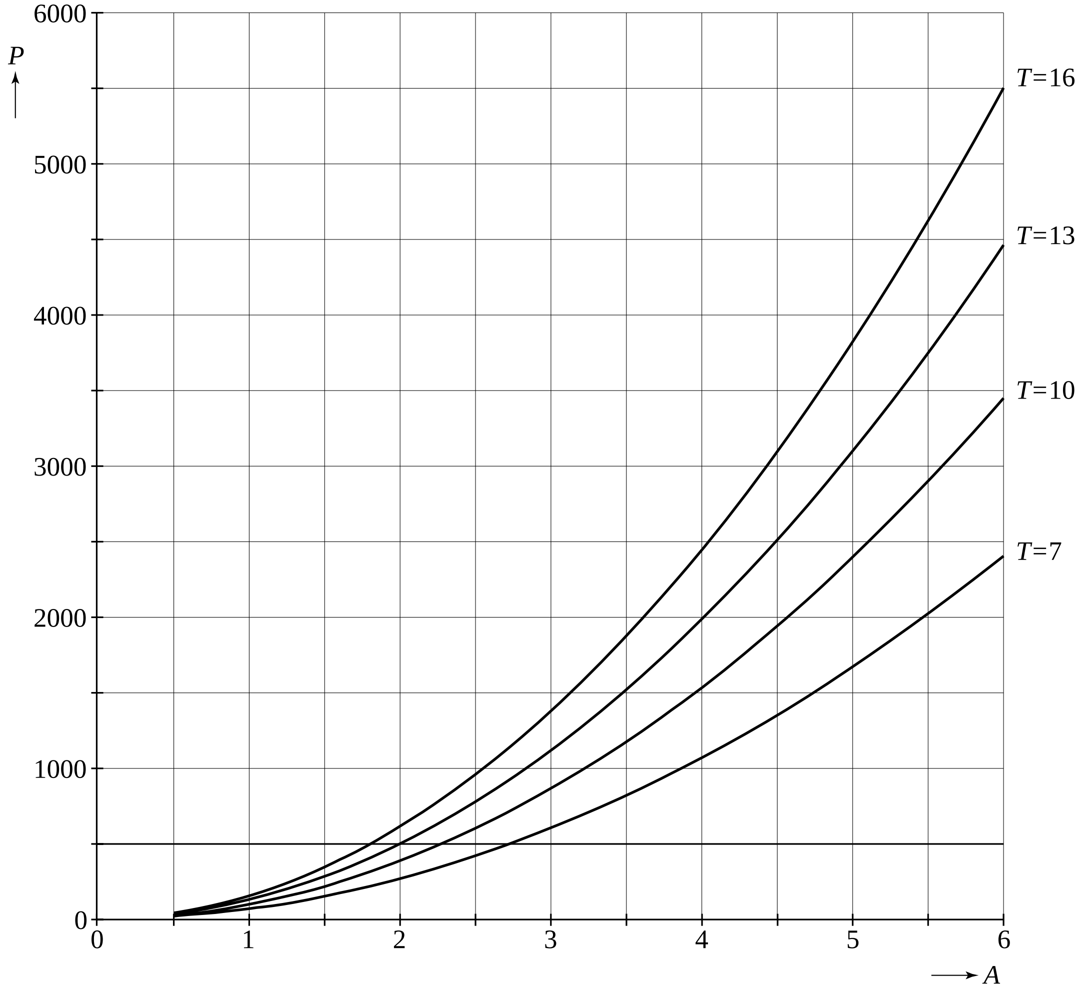
5p **11** Bereken het vermogen bij $A = 6$ op de hierboven beschreven manier, teken het bijbehorende punt in de grafiek op de uitwerkbijlage en beargumenteer of het zinvol is dat de persoon op basis van dit punt zijn onderzoek voortzet of dat hij moet concluderen dat er geen kwadratisch verband bestaat tussen de amplitude en het vermogen.

Iemand vermoedt dat bij een amplitude van 6 meter er een eenvoudig verband bestaat tussen de periode T en het vermogen P. Om dit verband zichtbaar te maken leest hij uit de vergroting van figuur 4 op de uitwerkbijlage bij $A = 6$ vier paren waarden van T en P af. Met behulp hiervan tekent hij vier punten in een assenstelsel waarin de periode is uitgezet tegen het vermogen. Dit assenstelsel staat op de uitwerkbijlage.

5p **12** Teken op de hierboven beschreven manier vier punten in het assenstelsel op de uitwerkbijlage en bepaal daarmee of er waarschijnlijk sprake is van een exponentieel, een kwadratisch, een lineair, een omgekeerd evenredig of een rechtevenredig verband. Verbind de punten. Welke van de vijf genoemde verbanden maak je hiermee zichtbaar?

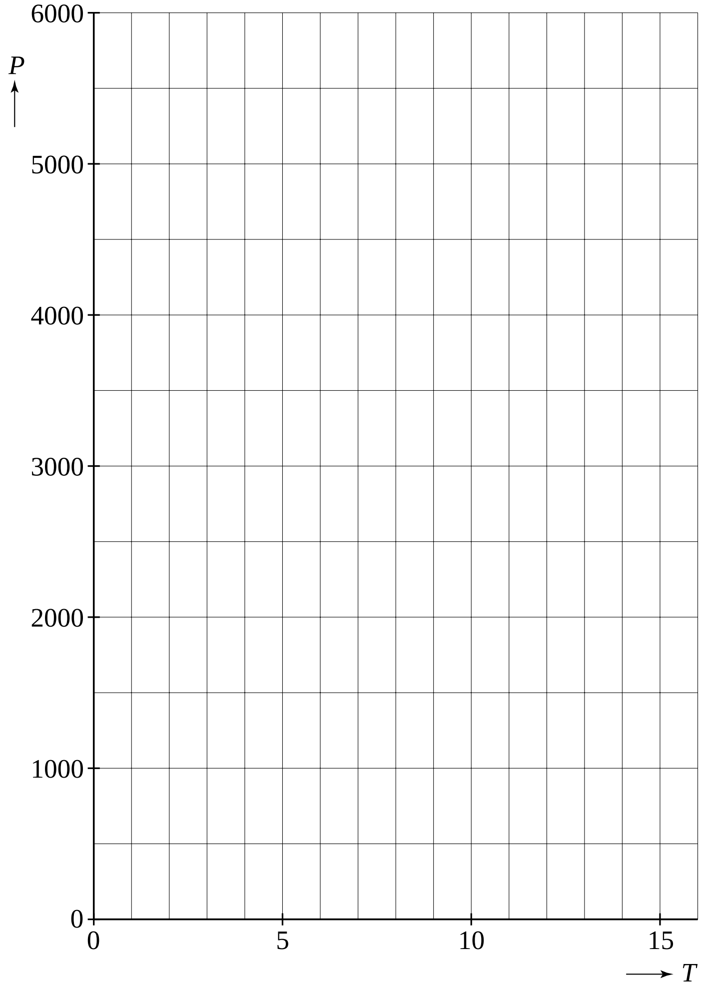
uitwerkbijlage

11 en 12



uitwerkbijlage

12



Snijpunt

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 2^{4x+1}$ en $g(x) = 4 \cdot 4^x$.

6p **13** Bereken op algebraïsche wijze de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g.

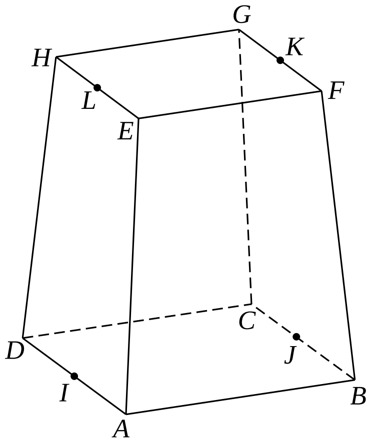
Bloempot

Een bedrijf in België maakt aluminium bloempotten. Zie de foto. Wanneer je de bloempot op zijn kop zet, zie je goed dat deze de vorm heeft van een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide. In figuur 1 is het meetkundige object getekend dat overeenkomt met de buitenkant van de bloempot. $ABCD$ en $EFGH$ zijn vierkanten, waarbij $AB = 25{,}0$ cm en $EF = 20{,}0$ cm.
De hoogte van de bloempot is 30,0 cm.

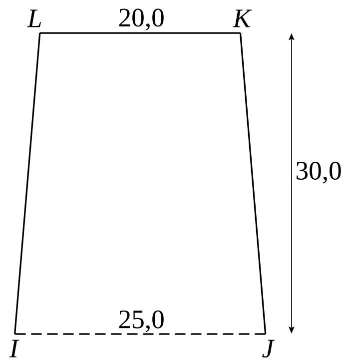
foto

In figuur 2 is de verticale doorsnede $IJKL$ getekend.

figuur 1



figuur 2

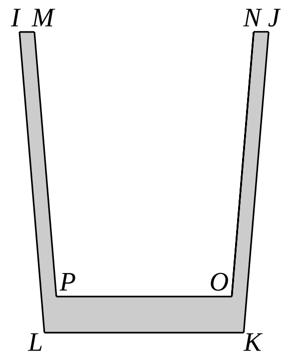


De inhoud van het meetkundige object in figuur 1 is ongeveer 15 liter.

5p **14** Bereken de inhoud van het meetkundige object in figuur 1. Rond je antwoord in liter af op één decimaal.

In figuur 3 is een verticale doorsnede van de bloempot weergegeven. De dikte van de wanden en de bodem is nu zichtbaar.
Verder is gegeven dat
- de binnenwanden evenwijdig zijn aan de buitenwanden
- de binnenkant $MPON$ van de bloempot een exacte verkleining is van de buitenkant $ILKJ$
- IJ = 25,0 cm
- MN = 22,0 cm
- PO = 17,6 cm
- LK = 20,0 cm

figuur 3



Iemand wil de bloempot vullen met potgrond. Voordat hij de potgrond gaat kopen, wil hij onderzoeken of een zak met 10 liter potgrond genoeg is om de bloempot helemaal te vullen. Om dit te onderzoeken, moet de inhoud van de bloempot berekend worden. Daarbij kan gebruik gemaakt worden van het feit dat de binnenkant van de bloempot een exacte verkleining is van de buitenkant.

5p **15** Onderzoek of je met 10 liter potgrond de bloempot helemaal kunt vullen.

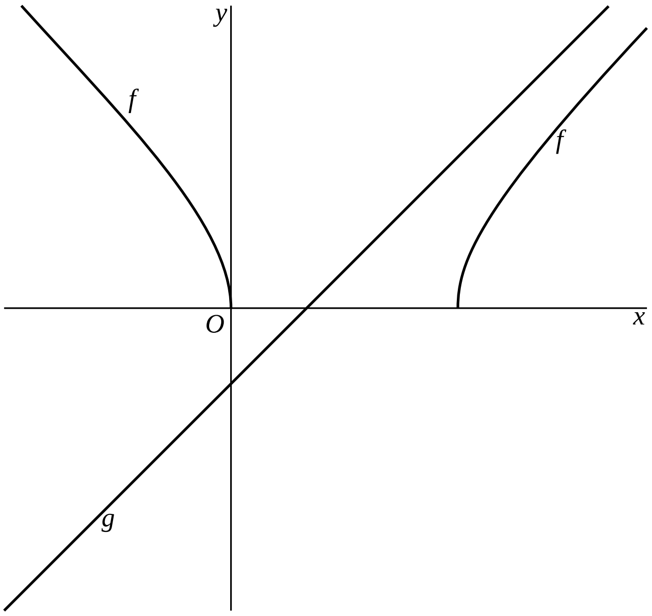
Wortelfunctie

De functie f is gegeven door $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$ voor $x \leq 0$ en voor $x \geq 6$.

4p **16** Bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van de helling van de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 7.

De functie g is gegeven door $g(x)=x-2$. In figuur 1 zijn de grafieken van f en g getekend.

figuur 1



5p **17** Toon op algebraïsche wijze aan dat de grafieken van f en g geen snijpunt hebben.