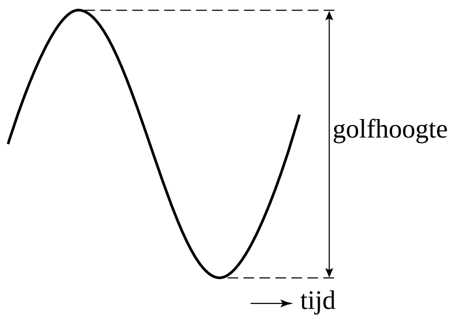
Golfhoogte

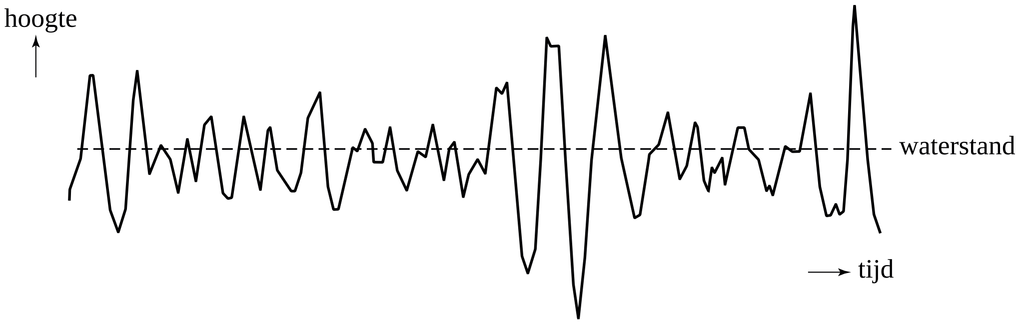
Bij de beoordeling van de veiligheid van de Nederlandse kust wordt onder andere de golfhoogte onderzocht. De golfhoogte is het hoogteverschil tussen een golftop en het daarop volgende golfdal boven een vast punt op de zeebodem. Zie figuur 1.

figuur 1



In figuur 2 is de hoogte van het wateroppervlak boven een vast punt in de Noordzee uitgezet tegen de tijd. De stippellijn geeft de gemiddelde waterhoogte in dit tijdsinterval aan. We noemen dit de waterstand.

figuur 2



In figuur 2 is te zien dat de golfhoogte niet voor elke golf gelijk is. Daarom wordt ook wel gekeken naar de gemiddelde golfhoogte. Er blijkt een verband te bestaan tussen de gemiddelde golfhoogte g in meter en de waterstand w in meter ten opzichte van NAP. Bij Hoek van Holland is de gemiddelde golfhoogte goed te benaderen met de volgende formule:

$g(w) = 4,82 + 0,60w - 0,0063 \cdot (7,0 - w)^{3,13}$, met g en w in meter en $w < 7,0$

Tijdens een storm komen gemiddelde golfhoogtes van 5,0 meter voor.

3p **1** Bereken de waterstand bij Hoek van Holland die hierbij hoort. Geef je antwoord in meter ten opzichte van NAP, afgerond op één decimaal.

Het blijkt dat de golfhoogte bij elke waterstand bij benadering normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 0,60 meter.

Bij Hoek van Holland wordt dijkbewaking ingezet wanneer de waterstand tot minstens 2,8 meter boven NAP is gestegen.

4p **2** Bereken hoeveel procent van de golven een golfhoogte heeft van meer dan 7,0 meter wanneer de waterstand 2,8 meter boven NAP is. Rond je antwoord af op hele procenten.

Bij een bepaalde waterstand bij Hoek van Holland heeft 25% van de golven een golfhoogte van meer dan 4,0 meter.

6p **3** Bereken bij deze waterstand hoeveel procent van de golven een golfhoogte heeft van meer dan 5,0 meter.

Een gokje wagen

Een viervlaksdobbelsteen is een dobbelsteen met de vorm van een regelmatig viervlak. Met zo'n dobbelsteen kun je 1, 2, 3 of 4 gooien. Op de foto zie je de situatie waarin er 3 is gegooid. In deze opgave gaan we uit van een zuivere viervlaksdobbelsteen.

foto

4p **4** Bereken de kans dat in vier worpen achter elkaar er vier maal een verschillend cijfer wordt gegooid.

De volgende vragen gaan over een spel met deze dobbelsteen.
De inleg is € 2,75. Een speler die het spel speelt, mag een aantal keren met de dobbelsteen gooien. De gegooide cijfers worden bij elkaar opgeteld. Als de speler stopt bij een totaal van 1, 2, 3 of 4, dan krijgt hij dit aantal in euro's uitgekeerd. Als de speler in totaal 5 of meer gegooid heeft, dan wordt er niets uitgekeerd. Zie tabel 1.

tabel 1

Totaal na één of meer worpen	***Uitkering***	***Winst voor de speler***
1	€ 1, -	- € 1,75
2	€ 2, -	- € 0,75
3	€ 3, -	€ 0,25
4	€ 4, -	€ 1,25
5 of meer	€ 0, -	- € 2,75

Iemand wil één keer het spel spelen. Hij hanteert bij zijn spel de volgende strategie. Wanneer hij een totaal van 4 (of meer) heeft bereikt, stopt hij. Zolang het totaal minder dan 4 is, gaat hij door met gooien.

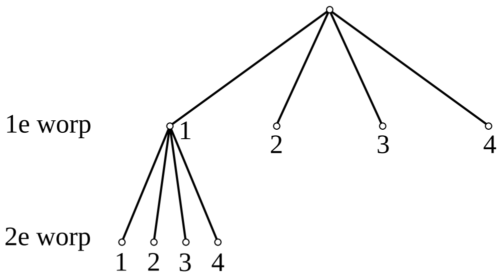
Het totaal van 4 kan op verschillende manieren worden bereikt. Dit kan in één worp maar ook in twee, drie of vier worpen.

7p **5** Bereken de kans dat hij een totaal van 4 bereikt met deze strategie.

Iemand anders speelt het spel volgens een andere strategie. Zijn strategie is als volgt:

- Als hij bij de eerste worp 1 gooit, gooit hij nog één keer
- Als hij 2, 3 of 4 gooit, stopt hij

figuur 1



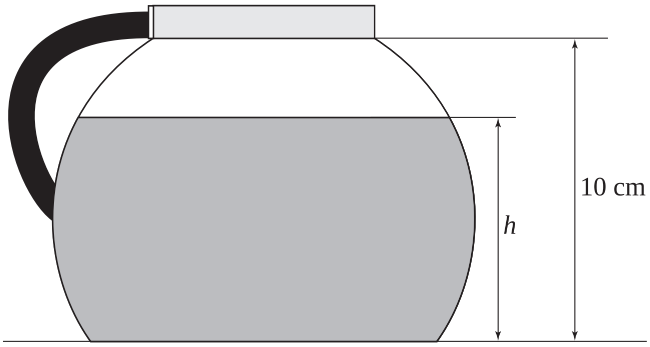
In figuur 1 is dit schematisch weergegeven. Hij speelt 80 spelletjes met deze strategie.

4p **6** Bereken hoeveel winst of verlies hij kan verwachten.

Koffiekan

Bij het zetten van koffie wordt soms een koffiezetapparaat gebruikt.
Deze opgave gaat over een koffiezetapparaat waarbij de koffiekan, zonder het handvat en de bovenrand, de vorm heeft van een aan twee kanten afgeknotte bol.
De hoogte h (in cm) van de vloeistofspiegel in de koffiekan wordt gemeten ten opzichte van de onderkant van de koffiekan. Zie figuur 1.

figuur 1



$V(h)$ is het volume (in cm^3) van de vloeistof (koffie) in de koffiekan als de hoogte van de vloeistofspiegel h cm is.
Er geldt: $V(h) = 33\pi h + 4\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$

In deze opgave gaan we ervan uit dat de hete koffie vanaf het begin met constante snelheid de koffiekan in stroomt. Na precies 8 minuten staat de vloeistofspiegel op 9,2 cm hoogte. Hieruit kun je afleiden dat er 2,5 cm^3 koffie per seconde in de koffiekan stroomt.

3p **7** Toon dit met een berekening aan.

3p **8** Bereken na hoeveel seconden de vloeistofspiegel in de koffiekan op 3,0 cm hoogte staat. Rond je antwoord af op een geheel getal.

In één kopje gaat 120 ml (120 cm^3) koffie. Op de koffiekan staan streepjes die horen bij het vloeistofniveau voor 2, 3, 4, ..., 10 kopjes.
In de figuur op de uitwerkbijlage zijn deze streepjes voor 2 en 10 kopjes al aangegeven. De schaal van deze figuur is 1 : 2.

4p **9** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het streepje dat hoort bij 6 kopjes. Licht je werkwijze toe.

Nadat er koffie is gezet, wordt het koffiezetapparaat uitgeschakeld. De koffie in de kan koelt vervolgens af. Bij het uitschakelen heeft de koffie een temperatuur van 80 °C. In tabel 1 is het temperatuurverloop van de koffie te zien. Je ziet dat de tijd t is gemeten in minuten, waarbij $t = 0$ het moment van uitschakelen is. De temperatuur T is gemeten in °C.

tabel 1

t (in minuten)	0	10	20	30	40	50	60
T (in °C)	80	59	50	44	40	37	35

De temperatuur in de keuken waar het koffiezetapparaat staat, is 23 °C.
Een formule die het temperatuurverloop van de koffie redelijk benadert, is van de vorm $T = 23 + b \cdot g^t$.
Je kunt de waarden van b en g berekenen door gebruik te maken van het eerste en het laatste meetpunt. Met de gegevens van het eerste meetpunt, $t = 0$ en $T = 80$, kun je de waarde van b berekenen. Daarna kun je met behulp van de gegevens van het laatste meetpunt, $t = 60$ en $T = 35$, de waarde van g berekenen.

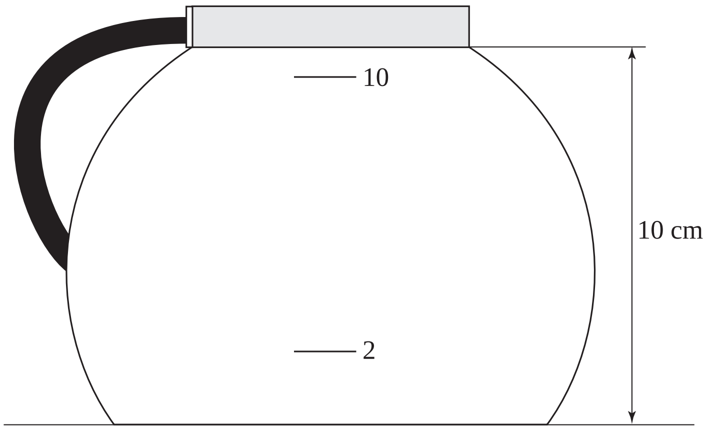
6p **10** Bereken op algebraïsche wijze de waarden van b en g. Rond daarna de waarde van g af op twee decimalen.

Een formule gebaseerd op alle meetgegevens uit de tabel is: $T = 23 + 49 \cdot 0{,}975^t$ met t in minuten en T in °C.
De snelheid (in °C per minuut) waarmee de koffie afkoelt op t = 5 is goed te benaderen met een differentiequotiënt op het interval [5; 5,001].

3p **11** Benader op deze manier de snelheid van afkoelen op t = 5 in °C per minuut. Rond je antwoord af op twee decimalen.

uitwerkbijlage

9



Eén tegen 100

Een bekend spel is 'Eén tegen 100'. Hierin moet één kandidaat het opnemen tegen 100 tegenspelers. In deze opgave wordt gewerkt met een vereenvoudigde versie van het spel.

figuur 1

Bij dit spel worden er vragen gesteld waarbij steeds **drie** mogelijke antwoorden worden aangeboden. Eén daarvan is het goede antwoord. Als de kandidaat dit goede antwoord kiest, gaat hij door naar de volgende vraag. De tegenspelers die het goede antwoord hebben gegeven, gaan ook door naar de volgende vraag. De rest valt af.
Als de kandidaat een fout antwoord geeft, is het spel afgelopen.

De eerste vraag is voor de kandidaat geen probleem. Van de 100 tegenspelers weten er 48 het goede antwoord. De overige 52 tegenspelers kiezen elk willekeurig één van de drie mogelijke antwoorden.

4p **12** Bereken de kans dat er bij het begin van de tweede vraag nog meer dan 65 tegenspelers over zijn.

Voordat de tweede vraag gesteld wordt, zijn er nog 70 tegenspelers over. Ook bij de tweede vraag weet de kandidaat weer het goede antwoord. Bij een deel van de tegenspelers is dit ook het geval. De rest kiest weer willekeurig één van de drie mogelijke antwoorden. Na vraag 2 blijken er nog 54 tegenspelers over te zijn.

4p **13** Bereken hoeveel van de 70 tegenspelers bij vraag 2 naar verwachting hebben gegokt.

Bij dit spel kan de kandidaat bij elke vraag geld verdienen. Na elk goed antwoord verdient hij een bedrag. Dit bedrag kan worden berekend met de volgende formule:

$$B = \frac{a}{t} \cdot 100\,000$$

Hierin is B het verdiende bedrag in euro's, a het aantal afvallers bij de vraag en t het totale aantal tegenspelers bij de vraag.

Na vraag 1 waren er nog 70 tegenspelers over. Na vraag 2 waren er nog 54 tegenspelers over. De kandidaat weet het goede antwoord op vraag 3. De kandidaat hoopt dat hij na vraag 3 al meer dan € 100 000 heeft verdiend.

6p **14** Bereken hoeveel tegenspelers er bij vraag 3 minimaal moeten afvallen om dit te bereiken.

Op een gegeven moment is er nog één tegenspeler over. De vragen die nu gesteld worden, zijn zo moeilijk dat zowel de kandidaat als zijn tegenspeler moeten gokken.

4p **15** Bereken de kans dat het spel nu na precies twee vragen is afgelopen met de kandidaat als winnaar.

Je kunt je afvragen waar een goede kandidaat meer aan heeft: slimme of domme tegenspelers. Wanneer alle tegenspelers de eerste vraag fout beantwoorden, heeft de kandidaat gewonnen maar is het spel ook afgelopen. De kandidaat heeft dan € 100 000 verdiend. Als alle tegenspelers het antwoord goed hebben, verdient de kandidaat helemaal niks. Beter is het als een gedeelte van de tegenspelers doorgaat naar de volgende vraag.

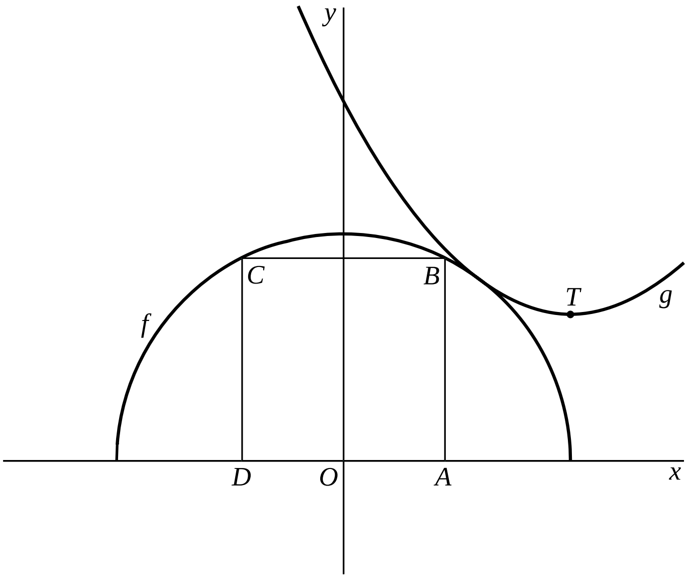
Neem aan dat het spel na de tweede vraag is afgelopen en de kandidaat heeft gewonnen.

3p **16** Bereken hoeveel geld de kandidaat maximaal kan hebben verdiend in deze situatie.

Halve cirkel en derdegraadsfunctie

De functies f en g zijn gegeven door $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ en $g(x)=-\frac{1}{30}x^3+x^2-1{,}9x+1{,}58$.
De grafieken van f en g lijken elkaar te raken. Zie figuur 1.

figuur 1



De grafieken van f en g raken elkaar echter niet. De vergelijking $f(x)=g(x)$ heeft twee oplossingen.

5p **17** Los op voor welke x geldt $f(x)<g(x)$. Rond de grenswaarden van x af op twee decimalen.

De grafiek van f is een halve cirkel. Van het vierkant $ABCD$ liggen de hoekpunten A en D op de x-as zodat $OA = OD$. De hoekpunten B en C liggen op de halve cirkel.
Om de oppervlakte van vierkant $ABCD$ uit te rekenen, moet eerst de lengte van een zijde worden bepaald. We stellen daartoe $OA = p$. Hieruit volgt $AD = 2p$. Met behulp van $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ vinden we nu $AB=\sqrt{1-p^2}$. Door AD gelijk te stellen aan AB kan de lengte van een zijde van het vierkant worden berekend.

5p **18** Bereken op algebraïsche wijze de exacte oppervlakte van het vierkant.

Het punt T in de figuur is een top van de grafiek van de functie g.

4p **19** Bereken op algebraïsche wijze de x-coördinaat van het punt T.