Uitsterven van soorten

De mens heeft in de loop van de eeuwen veel natuurgebieden sterk verkleind door kappen van bomen, door ontginning tot bouwgrond en door het bouwen van huizen. Veel soorten wilde dieren zijn hierdoor bijna verdwenen of uitgestorven. Als regel geldt: hoe kleiner het natuurgebied, des te kleiner het aantal diersoorten dat daar kan overleven.

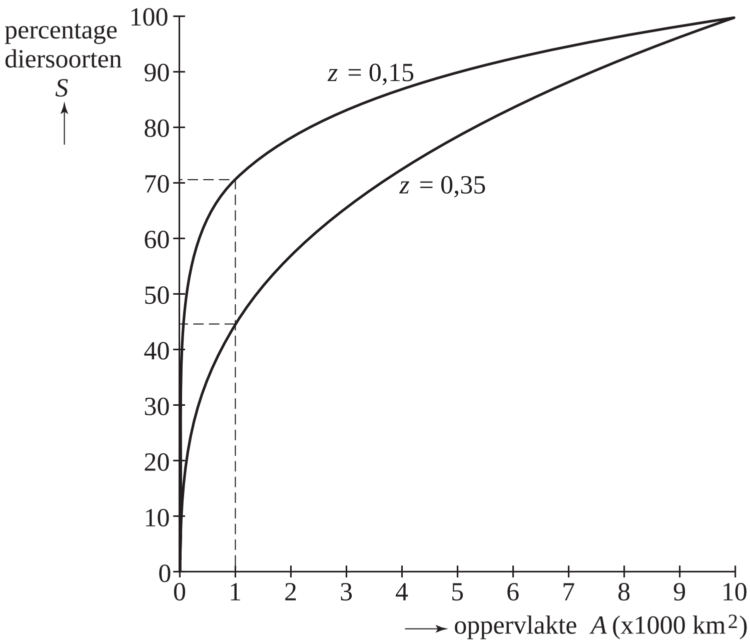
Deze opgave gaat over de mate waarin het aantal diersoorten verandert als een natuurgebied van 10 000 km^2 door de mens wordt verkleind. Het percentage diersoorten in een natuurgebied van 10 000 km^2 stellen we daarbij op 100%.

De formules die het verband beschrijven tussen het percentage diersoorten en de oppervlakte van het resterende natuurgebied zijn van de vorm:

$$S = 100 \cdot \left(\frac{A}{10\,000}\right)^{z}$$

Hierin is S het percentage diersoorten en A de oppervlakte van het resterende natuurgebied in km^2; z is een constante die bij een bepaald type natuurgebied hoort. Voor natuurgebieden op een eiland gelden waarden van z van ongeveer 0,35 en op het vasteland geldt dat z ongeveer gelijk is aan 0,15.

figuur 1



In figuur 1, waarin S is uitgezet tegen A, zijn voor deze twee waarden van z grafieken getekend.
In figuur 1 is voor een eiland (z = 0,35) het volgende af te lezen:
Als er door het kappen van bossen nog maar 1000 km^2 van een natuurgebied van 10 000 km^2 over is, dan is ongeveer 45% van het aantal diersoorten over.

3p **1** Toon door een berekening aan dat deze bewering juist is.

In een land wil men in een natuurgebied ter grootte van 10 000 km^2 een gedeelte tot landbouwgrond ontginnen.. De eis die men stelt is dat er minstens 90% van alle daar levende diersoorten kunnen blijven leven. Voor dit natuurgebied geldt $z = 0{,}20$.

4p **2** Bereken hoeveel km^2 grond voor ontginning gebruikt kan worden.

Een bepaald natuurgebied van 10 000 km^2 wordt ieder jaar 1% kleiner.

4p **3** Bereken na hoeveel jaar nog maar de helft van het oorspronkelijke natuurgebied over is.

Bier tappen

In een café wordt bier getapt in glazen met een inhoud van 25 cl. Het is de bedoeling dat er 20 cl bier (het vloeibare gedeelte) en 5 cl schuim in een glas komt. De hoeveelheid bier in een dergelijk bierglas in dit café is bij benadering normaal verdeeld.
Alle leden van het barpersoneel tappen gemiddeld 20 cl bier in een glas met een standaardafwijking van 0,6 cl.

In dit café is de kwaliteitsnorm: de hoeveelheid bier in een bierglas moet liggen tussen 19 en 21 cl.

4p **4** Bereken hoeveel procent van de glazen die het barpersoneel tapt, voldoet aan de kwaliteitsnorm.

6p **5** Bereken de kans dat van de tien glazen bier die het barpersoneel tapt er hoogstens drie zijn met minder dan 19,5 cl bier.

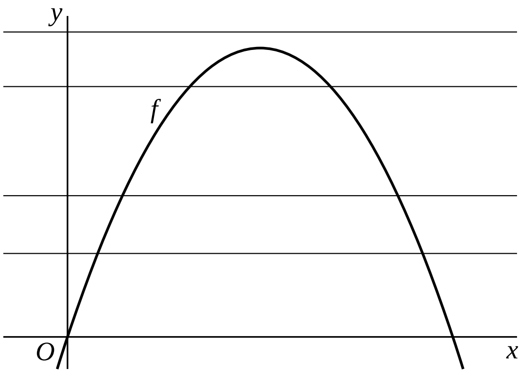
Regelmatig wordt er in het café 1 meter bier besteld. Dat zijn 13 glazen bier op een rijtje. We bekijken nu de totale hoeveelheid bier van de 13 glazen die het barpersoneel getapt heeft.
Ook de totale hoeveelheid bier is bij benadering normaal verdeeld, met een gemiddelde van 260 cl. De kans dat de totale hoeveelheid bier kleiner is dan 258 cl is 18%.

4p **6** Bereken de standaardafwijking van de totale hoeveelheid bier.

Horizontale lijnen

In figuur 1 zie je de grafiek van de functie f die gegeven is door $f(x) = 6x - x^2$ en enkele horizontale lijnen. Deze lijnen horen bij de familie van lijnen $y = p$ met $p \geq 0$.

figuur 1

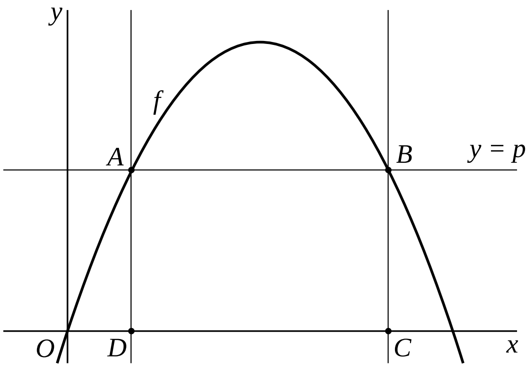


Een van de horizontale lijnen $y = p$ heeft slechts één punt gemeenschappelijk met de grafiek van f.

5p **7** Bereken op algebraïsche wijze de bijbehorende waarde van p.

In figuur 2 zie je dat de grafiek van f door een horizontale lijn $y = p$ gesneden wordt in de punten A en B. Door de punten A en B zie je ook twee verticale lijnen die de x-as snijden in D en C.

figuur 2



De x-coördinaat van A noemen we a, met $0 < a < 3$.
Voor de oppervlakte S van rechthoek $DCBA$ geldt dan de formule $S = (6 - 2a)(6a - a^2)$.
Er is één horizontale lijn $y = p$ waarbij de oppervlakte van rechthoek $DCBA$ maximaal is.

6p **8** Bereken exact de waarde van a in deze situatie.

Triominos

Het spel Triominos bestaat uit driehoekige stenen. Zie foto 1. Op elke steen staan drie cijfers, één cijfer bij elke hoek. Dit cijfer kan zijn een 0, 1, 2, 3, 4 of 5. Voor de stenen met drie verschillende cijfers geldt dat met de klok meedraaiend de cijfers in grootte oplopen als je met het kleinste cijfer begint. Zie de steen met de cijfers 2, 4 en 5 in foto 1.
Alle stenen zijn verschillend. Alle mogelijke combinaties van cijfers komen voor.

foto 1

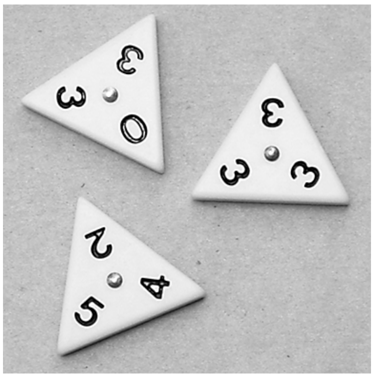


foto 2

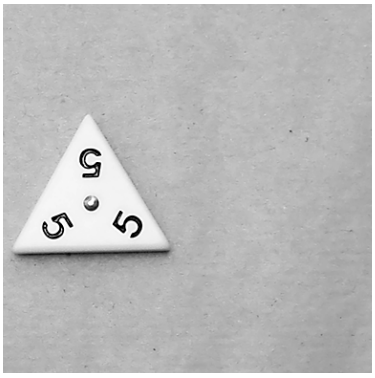
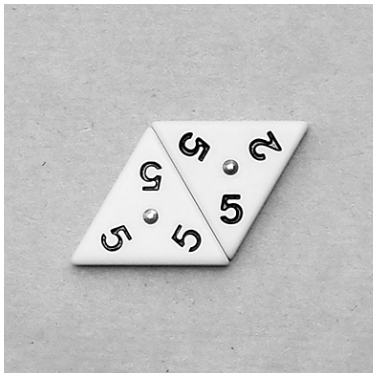


foto 3



In foto 2 zie je een voorbeeld van een steen: de steen 5-5-5.
Doel van het spel is zoveel mogelijk stenen passend aan te leggen. Dit betekent dat de cijfers op de twee hoeken die tegen elkaar aan komen te liggen, hetzelfde zijn. In foto 3 zie je hoe aan de steen 5-5-5 de steen 2-5-5 aangelegd kan worden.

Behalve de steen 2-5-5 zijn er ook andere stenen die je op deze plaats aan de steen 5-5-5 zou kunnen aanleggen.

3p **9** Schrijf op welke stenen dit zijn.

Het spel bestaat uit 56 verschillende stenen.
Je kunt de stenen in drie soorten verdelen (zie foto 1):

- stenen met drie dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 3-3-3
- stenen met precies twee dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 0-3-3
- stenen met drie verschillende cijfers, bijvoorbeeld 2-4-5

In tabel 1 zie je het begin van een overzicht van de aantallen stenen van elke soort. De laatste kolom van de tabel is nog niet helemaal ingevuld.

tabel 1

soort stenen	**aantal**
stenen met drie dezelfde cijfers	6
stenen met precies twee dezelfde cijfers	..
stenen met drie verschillende cijfers	..

4p **10** Bereken de ontbrekende getallen in de tabel zonder gebruik te maken van het gegeven dat het spel uit 56 stenen bestaat.

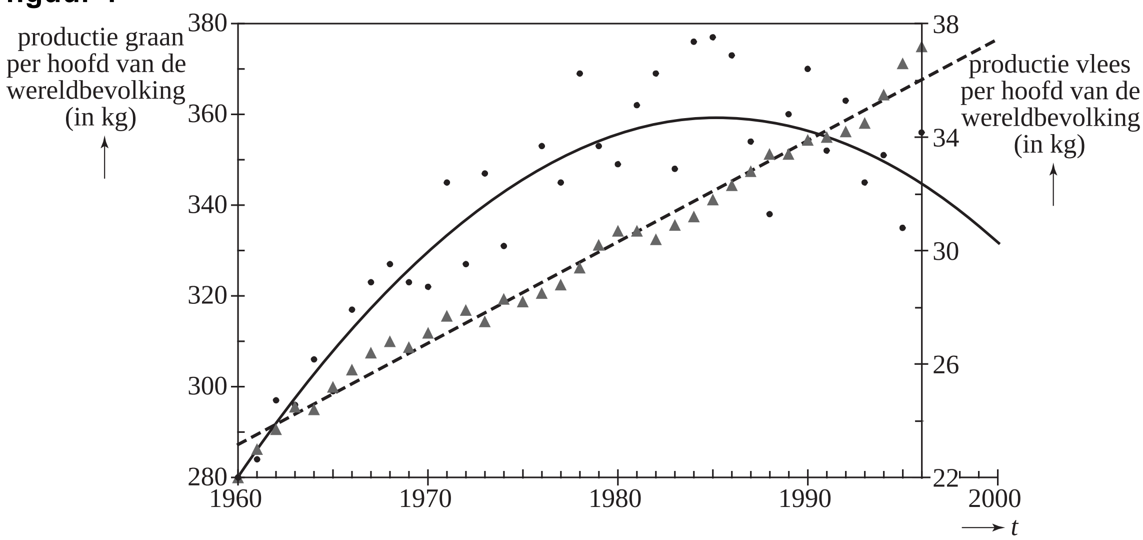
Bij het begin van het spel worden alle stenen zo op tafel gelegd dat de cijfers niet te zien zijn. Een steen met drie dezelfde cijfers erop heet een **trio**.
Iedere speler moet 7 stenen pakken. De speler die begint, pakt 7 stenen uit de 56 stenen die op tafel liggen.

4p **11** Bereken de kans dat precies twee van deze zeven stenen **trio's** zijn.

Steeds meer vlees

In figuur 1 wordt voor de periode 1960 - 1996 zowel de graanproductie als de vleesproductie per hoofd van de wereldbevolking weergegeven. Hiervoor worden twee verticale assen gebruikt.
De ronde stippen in de grafiek geven de jaarlijkse graanproductie G per hoofd van de wereldbevolking in kg aan. Het verloop ervan wordt benaderd door een parabool.
De driehoekjes geven de jaarlijkse vleesproductie V per hoofd van de wereldbevolking in kg aan. Het verloop ervan wordt benaderd door een rechte lijn (stippellijn).

figuur 1



Volgens de benadering met de rechte lijn in figuur 1 was V in 1960 gelijk aan 23,2 kg en in 1996 gelijk aan 36,0 kg. In 1960 werd in Nederland per hoofd van de bevolking 45,3 kg vlees geconsumeerd. Met de gegeven benadering van V is te berekenen wanneer er voor de wereldbevolking per hoofd gemiddeld evenveel vlees geproduceerd zal worden als de Nederlanders in 1960 gebruikten.

5p **12** Bereken in welk jaar de wereldvleesproductie volgens de gegeven lineaire benadering 45,3 kg per hoofd van de wereldbevolking zal bedragen.

De parabool in figuur 1 kan worden beschreven met de formule $G = -0{,}125t^2 + 6{,}33t + 279$. Hierin is G de wereldgraanproductie per jaar in kg per hoofd van de wereldbevolking en t de tijd in jaren met $t = 0$ in het jaar 1960.

Volgens de formule heeft G een maximum. Zoals in figuur 1 is te zien, is dit maximum niet gelijk aan het werkelijke maximum van de jaarlijkse graanproductie per hoofd van de bevolking.

5p **13** Bereken met behulp van differentiëren de maximale waarde van G volgens de formule en bepaal met behulp van figuur 1 het verschil tussen dit berekende maximum en de hoogste werkelijke jaarlijkse graanproductie per jaar per hoofd van de bevolking.

Voor de periode 1990 - 2050 gebruiken we nu een andere schatting van de voedselsituatie, die uitgaat van een iets andere formule voor de vleesproductie V in kg per hoofd van de wereldbevolking. Deze formule wordt gegeven door: $V^* = 0,25t + 25$. De tijd t in jaren wordt gerekend vanaf het jaar 1960.

Volgens deze formule neemt de vleesproductie steeds verder toe. Dat is alleen mogelijk als men op aarde meer graan gaat gebruiken om aan het vee te voeren, waardoor er minder graan beschikbaar is voor voeding van de mens. Om 1 kg vlees te kunnen produceren is ongeveer 4 kg graan nodig.

5p **14** Toon met de gegeven formules voor G en V^* aan dat er in het jaar 2000 per hoofd van de wereldbevolking ongeveer 192 kg graan over was voor voeding van de mens.

We gaan ervan uit dat er jaarlijks per hoofd van de wereldbevolking ongeveer 150 kg graan voor voeding van de mens nodig is.

5p **15** Bereken met behulp van de bovenstaande formules voor G en V^* vanaf welk jaar er door de toenemende vleesproductie te weinig graan over zal zijn voor voeding van de mens.

De leugendetector

We geven het niet graag toe, maar liegen doen we allemaal, onder andere om aardig gevonden te worden. Recent onderzoek heeft uitgewezen dat als twee mensen voor het eerst met elkaar in gesprek raken er in 60% van die gesprekken leugens verteld worden. Op grond hiervan nemen we aan dat de kans dat er bij zo'n gesprek gelogen wordt, gelijk is aan 0,60.

Iemand komt op een feest waar hij niemand kent. Op een gegeven moment heeft deze persoon met vijf verschillende mensen een gesprek gevoerd.

3p **16** Bereken de kans dat van deze vijf gesprekken er drie zijn waarbij gelogen werd.

Leugendetectors worden gebruikt om schuldigen van misdrijven aan te wijzen. Het idee achter de leugendetector is dat het lichaam reageert als iemand liegt. De leugendetector registreert deze reactie.
Bij een bepaald soort leugendetector wordt met behulp van een infraroodcamera de gezichtstemperatuur gemeten. Liegende verdachten vertonen vaak een verhoogde temperatuur rond de ogen en op grond daarvan kan ontdekt worden dat zij liegen.
Er is echter ook een kans dat een schuldige persoon niet ontdekt wordt door de leugendetector. De Amerikaanse onderzoeker Pavlidis heeft hiernaar onderzoek verricht.
In tabel 1 zijn enkele resultaten van zijn onderzoeken te zien.

tabel 1

	Uitslag van de leugendetector	
	schuldig	onschuldig
De persoon is schuldig	75%	25%

Vier schuldige personen worden onderzocht met de leugendetector.

4p **17** Bereken de kans dat minstens twee van hen niet als schuldig ontdekt worden.

Een ander nadeel van de leugendetector is dat een onschuldige, maar bijvoorbeeld zenuwachtige persoon, als dader aangewezen kan worden. Bij de methode met de infraroodcamera is de kans dat een onschuldig iemand toch als schuldige wordt aangewezen gelijk aan 0,08.
Tabel 1 kan daarom uitgebreid worden: zie tabel 2.

tabel 2

	Uitslag van de leugendetector	
	schuldig	onschuldig
De persoon is schuldig	75%	25%
De persoon is onschuldig	8%	92%

Veronderstel dat bij het onderzoek van een bepaalde misdaad 55 mensen worden ondervraagd met behulp van deze leugendetector. Ga ervan uit dat drie van deze 55 personen schuldig zijn en dat de andere 52 personen onschuldig zijn.

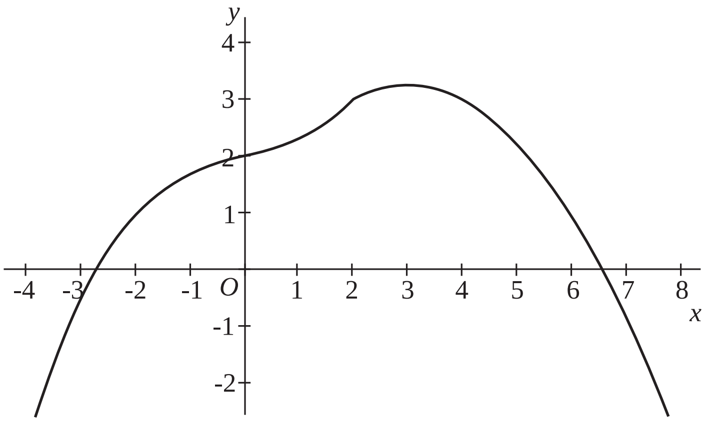
3p **18** Bereken hoeveel van deze 55 personen naar verwachting door deze leugendetector schuldig worden bevonden.

Combi-functie

De functie f heeft een voorschrift dat een combinatie is van twee functievoorschriften:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{4}x + 2 & \text{als} \quad x \leq 2 \\ 1 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 & \text{als} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

figuur 1



De grafiek van f bestaat dus ook uit twee delen. Deze twee delen sluiten in het punt (2, 3) weliswaar precies op elkaar aan, maar de hellingen van de twee grafiekdelen in dit punt zijn verschillend. Zie figuur 1.

4p **19** Bereken met behulp van differentiëren hoe groot die hellingen zijn.

De lijn k met vergelijking $y = \frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B.

3p **20** Bereken de lengte van het lijnstuk AB. Rond je antwoord af op twee decimalen.