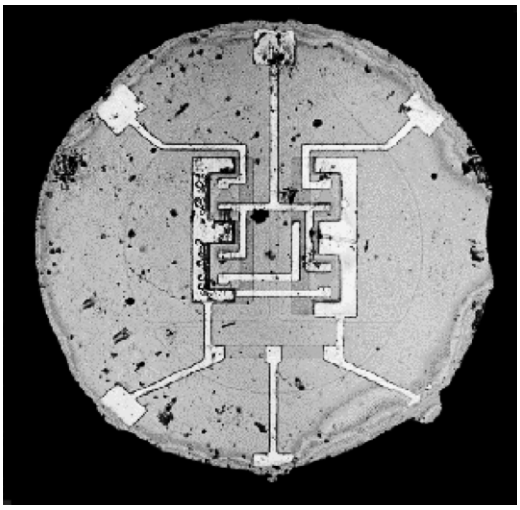
De wet van Moore

Eén van de belangrijkste onderdelen van de computer is de chip. Een chip is een elektronische schakeling die uit vele duizenden transistors bestaat. Toch is een chip niet groter dan een paar vierkante millimeter.

foto



In 1961 maakte men de eerste experimentele chip, bestaande uit 4 transistors. Deze chip zie je sterk vergroot in de foto hierboven. Gordon Moore was een van de mensen die bij het ontwerp van de chip betrokken waren. In 1965 voorspelde hij dat het aantal transistors per chip exponentieel zou gaan groeien. Deze voorspelling werd bekend als de wet van Moore.

Tot nu toe is gebleken dat er per twee jaar ongeveer een verdubbeling van het aantal transistors op één chip optreedt. De formule voor de wet van Moore die hierbij hoort, is:

$$A = 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$$

Hierin is A het aantal transistors op één chip en t het aantal jaren vanaf 1961.

3p **1** Bereken uit hoeveel transistors één chip in 1975 volgens deze formule bestond.

Naarmate het aantal transistors per chip groter wordt, is er steeds minder ruimte per transistor beschikbaar. Neem aan dat een bepaalde chip in 2004 een grootte had van 8 mm^2 en dat alle transistors een even grote oppervlakte op de chip in beslag namen.

3p **2** Bereken met behulp van de formule voor de wet van Moore hoeveel vierkante millimeter er maximaal beschikbaar was voor een transistor op deze chip.
Rond je antwoord in vierkante millimeter af op tien decimalen.

Het steeds meer transistors op 1 mm^2 plaatsen heet miniaturisering. Volgens de huidige wetenschappers kan deze miniaturisering niet onbeperkt doorgaan. Er kunnen niet meer dan 10^7 transistors op één vierkante millimeter geplaatst worden. Vanaf het moment dat die dichtheid bereikt wordt, zal de wet van Moore niet meer geldig zijn.
Neem aan dat in de toekomst de chips een grootte van 8 mm^2 hebben.

5p **3** Bereken vanaf welk jaar de wet van Moore niet meer geldig zal zijn volgens de huidige wetenschappers.

In 1968 was Moore een van de oprichters van het bedrijf Intel dat vooral bekend werd door een speciaal soort chip: de processor. De eerste Intel-processor werd gemaakt in 1971. Hij bestond uit ongeveer 2250 transistors.
Men neemt aan dat het aantal transistors van één processor ook elke twee jaar verdubbelt. De formule die hierbij hoort, is:

$$P = 2250 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$$

Hierin is P het aantal transistors van de processor en t het aantal jaren vanaf 1971.

Veronderstel dat, tegen de verwachting van de huidige wetenschappers in, de formules voor A (het aantal transistors per chip) en P (het aantal transistors per processor) onbeperkt blijven gelden.

6p **4** Bereken het aantal jaren verschil tussen de momenten waarop A en P de grens van een miljard (10^9) overschrijden.

Lichaamslengtes van mannen en vrouwen

Lange mensen hebben vaak problemen om kleding, schoenen en meubilair in de juiste maat te vinden. Om iets te doen aan problemen van lange mensen is in 1958 de Club van Lange Mensen opgericht. Iedere vrouw van 1,80 meter of langer en iedere man van 1,90 meter of langer kan lid van deze club worden.

De lengte van de Nederlandse mannen en vrouwen kan worden benaderd met een normale verdeling. In 2004 gold voor mannen een gemiddelde van 181 cm en een standaardafwijking van 7,5 cm. Voor vrouwen was het gemiddelde 169 cm en de standaardafwijking 6,7 cm.
Iemand beweert dat het percentage van alle Nederlandse mannen dat in 2004 lid kon worden van de Club van Lange Mensen groter is dan het percentage Nederlandse vrouwen dat lid kon worden van deze club.

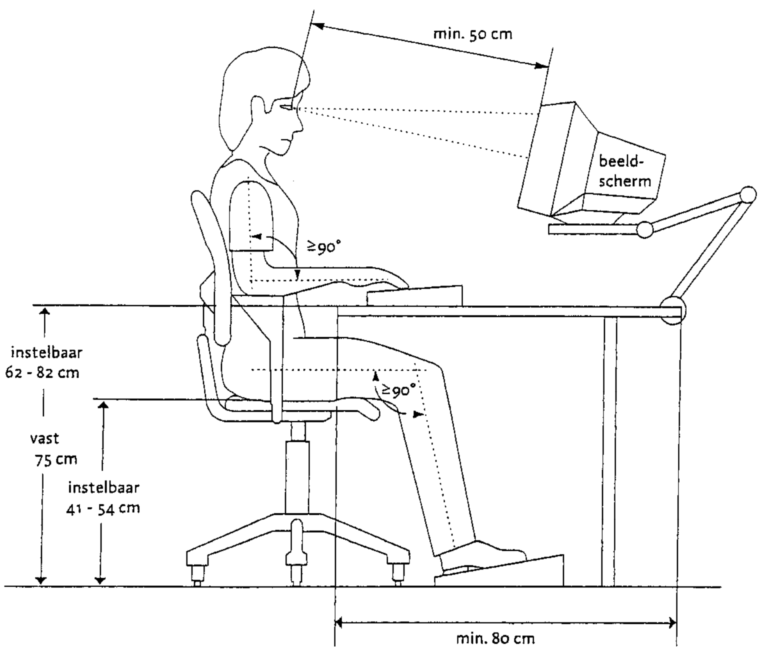
5p **5** Onderzoek met een berekening of deze bewering klopt.

Om klachten te voorkomen bij het werken met een beeldscherm, moet de werkplek per individu correct ingericht zijn. Tabel 1 geeft een richtlijn voor het instellen van de juiste hoogte van stoel en bureaublad.

tabel 1

Lichaamslengte (cm)	200	195	190	185	180	175	170	165	160	155	150
Bureau: hoogte werkvlak (cm)	82	80	78	76	74	72	70	68	66	64	62
Stoel: hoogte zitting (cm)	54	53	51	50	49	47	46	44	43	42	41

Hieronder is in een schets een en ander zichtbaar gemaakt.



Het bureaublad kan instelbaar zijn of vast. Een vast bureaublad is meestal 75 cm hoog. Hierbij is vooral rekening gehouden met de gemiddelde lengte van de Nederlandse man.
Ga er bij de volgende vraag van uit dat er nog redelijk gewerkt kan worden aan een bureaublad dat 5 cm hoger of lager is dan de richtlijn in tabel 1.

6p **6** Voor hoeveel procent van de Nederlandse vrouwen in 2004 was een bureaublad op 75 cm hoogte echt te hoog?

In de loop van de afgelopen jaren is de gemiddelde lengte van de Nederlanders voortdurend toegenomen. Ook in 1989 was de lengte normaal verdeeld, maar de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw was toen 166 cm, terwijl in dat jaar 89,8% van hen korter was dan 175 cm.

4p **7** Bereken de standaardafwijking van deze normale verdeling. Geef het antwoord in cm, afgerond op één decimaal.

In 2004 werd de lengte van 500 willekeurig gekozen Nederlandse vrouwen tussen de 20 en 40 jaar gemeten. De lengte werd telkens afgerond op hele cm. In tabel 2 is van de resultaten een klassenindeling gemaakt.

tabel 2

Klasse nummer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	Tot 152,5 cm	Vanaf 152,5 tot 157,5 cm	Vanaf 157,5 tot 162,5 cm	Vanaf 162,5 tot 167,5 cm	Vanaf 167,5 tot 172,5 cm	Vanaf 172,5 tot 177,5 cm	Vanaf 177,5 tot 182,5 cm	Vanaf 182,5 tot 187,5 cm	Vanaf 187,5 cm
Aantal vrouwen	4	16	56	104	155	102	51	11	1
Percentage vrouwen	0,8	3,2	11,2	20,8	31,0	20,4	10,2	2,2	0,2

Uit deze groep van 500 vrouwen wordt een willekeurig viertal gekozen.

4p **8** Bereken de kans dat twee van de vier uit klasse 5 afkomstig zijn.

Mobiele telefoon

Een mobiele telefoon werkt op een batterij. Zo'n telefoon kan vrij lang aanstaan als je niet belt. De maximale tijd dat de mobiele telefoon aan kan staan zonder gebruikt te worden, heet de stand-by-tijd. Als je wel belt, verbruikt de telefoon meer energie. De batterij is dan sneller leeg.

figuur

Bij een telefoon op stand-by-stand met een moderne batterij wordt het spanningsverloop benaderd door de formule $V = 3{,}31 + \dfrac{21}{t-148}$.
Hierin is V de spanning van de batterij in Volt en t de tijd in uur.
Op tijdstip t = 0 is de batterij vol.

De telefoon staat vanaf het ogenblik waarop de batterij net helemaal is opgeladen stand-by totdat de spanning tot 0 is gedaald. In minuten nauwkeurig is deze stand-by-tijd gelijk aan 141 uur en 39 minuten.

3p **9** Laat dit met een berekening zien.

De spanning die de batterij levert, kun je aan de rechterkant van het scherm aflezen. Als de batterij vol is, staan alle blokjes (nummers 1 t/m 4) aan. Zie de figuur.
Bij een volle batterij bedraagt de spanning ongeveer 3,2 Volt.
Het aantal zichtbare blokjes wordt bepaald door het percentage van de maximale spanning. Als het percentage minder dan 75% bedraagt, kan er niet meer getelefoneerd worden en zijn alle blokjes uit. Zie onderstaande tabel.

tabel

blokjes die zichtbaar zijn	**percentage van de maximale spanning**
1, 2, 3, 4	100 – 97
2, 3, 4	97 – 94
3, 4	94 – 88
4	88 – 75
geen	75 – 0

Iemand laadt de batterij helemaal op. Vervolgens legt hij de telefoon in de stand-by-stand weg. De telefoon wordt niet gebruikt. Na verloop van tijd gaat blokje nummer 1 uit. Een tijd nadat blokje nummer 1 is uitgegaan, gaat blokje nummer 2 uit. Juist op dat moment pakt hij de telefoon, ziet blokje nummer 2 uitgaan en denkt dat de telefoon op de helft van zijn stand-by-tijd is. Er zijn dan immers nog twee blokjes (nummers 3 en 4) van de vier zichtbaar.

5p **10** Onderzoek met behulp van de gegeven formule of de telefoon op het moment dat blokje nummer 2 uitgaat, op de helft van zijn stand-by-tijd is.

Bij een ouderwetse batterij neemt de spanning als de telefoon stand-by staat lineair met de tijd af volgens de formule $V = -0,01t + 3,2$.
In deze formule is V de spanning van de batterij in Volt en t de tijd in uur.

We kijken nu naar het spanningsverloop van de ouderwetse en dat van de moderne batterij als de telefoon stand-by staat.
Op tijdstip $t = 0$ zijn beide batterijen helemaal vol. Bij een spanning van 2,4 (Volt) of lager kan er niet meer getelefoneerd worden, omdat de spanning dan te laag is. Bij de moderne batterij gebeurt dat na 124,9 uur. Bij de ouderwetse batterij zal dat op een ander moment gebeuren.

3p **11** Bereken het tijdsverschil tussen de beide momenten waarna men de telefoon niet meer kan gebruiken. Rond het antwoord af op hele uren.

Pakjesspel

Een spel om met een groep mensen te spelen is het *pakjesspel*.

Bij dit spel heeft elke persoon van tevoren thuis drie pakjes gemaakt. Eén pakje bevat een cadeautje van ongeveer € 2,-. De andere twee pakjes zijn nep en bevatten iets zonder waarde. Dat kan bijvoorbeeld een kapotte pen of een leeg rolletje plakband zijn.
Aan de buitenkant van het pakje is niet te zien of de inhoud echt of nep is.
Bij het begin van het spel worden alle pakjes op de vloer op een stapel gelegd en alle personen gaan er in een kring omheen zitten.

Het spel bestaat uit twee rondes. In de eerste ronde wordt er om de beurt met één dobbelsteen gegooid.
Er gelden de volgende regels:

Aantal gegooide ogen	**Actie voor de persoon**
1 of 6	Neem één pakje van de stapel.
2	Neem twee pakjes van de stapel (of één pakje als er nog maar één pakje over is).
3	Neem één pakje van een andere persoon (indien mogelijk).
4	Geef één pakje van je eigen stapeltje weg aan een andere persoon (indien mogelijk).
5	Wijs een ander aan, die één reeds verkregen pakje aan iemand anders moet weggeven (indien mogelijk).

Indien een actie voor een persoon niet mogelijk is, is de volgende persoon aan de beurt.
De eerste ronde is pas afgelopen als alle pakjes van de stapel zijn weggenomen.
In deze eerste ronde worden de pakjes nog niet uitgepakt.

Een groep van 20 personen met 60 pakjes begint aan de eerste ronde.

3p **12** Bereken de kans dat de eerste drie personen die met de dobbelsteen gooien, allemaal twee pakjes van de stapel moeten nemen.

Veronderstel nu dat de eerste vier personen die met de dobbelsteen gooien, samen precies 4 pakjes van de stapel hebben genomen. Er zijn verschillende manieren waarop dit gebeurd zou kunnen zijn. Enkele voorbeelden hiervan zijn:

- De eerste persoon heeft niets van de stapel mogen pakken. (0)
- De volgende persoon heeft twee pakjes mogen pakken. (2)
- De laatste twee hebben elk één pakje van de stapel genomen. (1)

Kortweg: 0, 2, 1, 1.
Een andere manier met dezelfde aantallen pakjes is bijvoorbeeld: 1, 0, 1, 2.
Er bestaan nog meer manieren, bijvoorbeeld 2, 2, 0, 0.

4p **13** Leg uit op hoeveel verschillende manieren vier personen samen precies 4 pakjes van de stapel konden nemen.

Iemand gooit in de eerste ronde van dit spel vier keer met de dobbelsteen.

5p **14** Bereken de kans dat deze persoon bij deze vier keer gooien één keer één pakje van de stapel moet nemen en drie keer één pakje aan een ander zou moeten geven.

Nu begint de tweede ronde waarin de pakjes worden opengemaakt.
Om de beurt wordt er nu door de 20 personen met twee dobbelstenen gegooid.
Er gelden de volgende regels:

Uitkomst van de worp	**Actie voor de persoon**
Totaal 7 ogen	Geef, als je meer dan één ongeopend pakje hebt, er eentje weg. De ander maakt het open.
Twee keer hetzelfde aantal ogen	Neem één ongeopend pakje van een ander die meer dan één zo'n pakje heeft, en maak het open.
Twee verschillende aantallen ogen (geen 7 in totaal)	Maak één pakje van je eigen stapel open.

De eerste persoon gooit met de beide dobbelstenen.

3p **15** Bereken de kans dat hij één pakje van een ander mag openen en dat dit pakje nep is.

Alle 20 personen hebben één keer gegooid met de beide dobbelstenen en hebben nog minstens één ongeopend pakje over.

5p **16** Bereken de kans dat meer dan de helft van de groep bij de volgende beurt één pakje van zijn eigen stapel mag openmaken. Rond je antwoord af op drie decimalen.

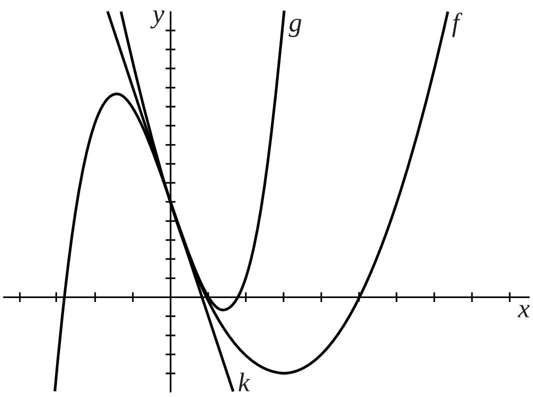
Machtsfuncties en rechte lijn

In deze opgave gaat het over functies die de som zijn van een machtsfunctie met een functievoorschrift van de vorm x^p (met $p > 1$) en de eerstegraadsfunctie k met het voorschrift $k(x) = -6x + 5$.
Zo zijn voor $p = 2$ en $p = 3$ de functies f en g gegeven door:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$
$$g(x) = x^3 - 6x + 5$$

In onderstaande figuur zijn de grafieken van f en g, alsmede de lijn k getekend.

figuur



Zowel de lijn k als de grafieken van f en g gaan door het punt $M(0, 5)$.

5p **17** Onderzoek met behulp van differentiëren of de hellingen van deze drie grafieken in dit punt gelijk zijn.

De grafiek van g snijdt de x-as in drie punten.
Het functievoorschrift van g is ook te schrijven als $g(x) = (x-1)(x^2 + x - 5)$.

4p **18** Bereken langs algebraïsche weg de exacte x-coördinaten van de drie snijpunten van de grafiek van g met de x-as.

De grafiek van g heeft twee toppen A en B.

5p **19** Onderzoek of het punt $M(0, 5)$ exact het midden van lijnstuk AB is.

De functie h is gegeven door $h(x) = x^p - 6x + 5$, waarin $p > 1$.
Voor $p = 2$ en $p = 3$ ontstaan de functies f en g.

Er is een waarde van p waarvoor geldt dat de grafiek van h de x-as snijdt in het punt (2, 0).

4p **20** Bereken exact deze waarde van p.