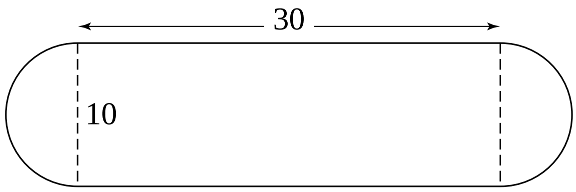
Kaas

Op foto 1 zie je drie stukken kaas. Het zijn delen van een hele, ronde kaas. Het grootste stuk is precies de helft van een hele kaas. Deze halve kaas heeft een vlakke zijkant. De vorm van de vlakke zijkant bestaat bij benadering uit een rechthoek van 30 cm bij 10 cm en twee halve cirkels met een diameter van 10 cm. Zie figuur 1.

foto 1

figuur 1

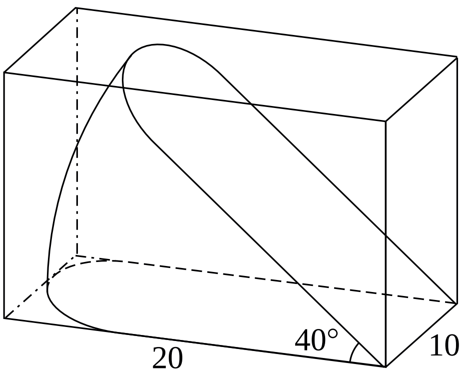


3p **1** Bereken de oppervlakte van de vlakke zijkant. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm^2.

Als je verticaal door het midden van de kaas snijdt, kun je stukken kaas maken zoals die ook op foto 1 te zien zijn. Bij een van de stukken kaas op foto 1 maken de snijvlakken een hoek van 40° met elkaar.

Zo'n stuk wordt met een snijvlak op de bodem van een balkvormig doosje gelegd. De binnenmaten van het grondvlak van het doosje zijn 20 cm bij 10 cm. Zie figuur 2.

figuur 2



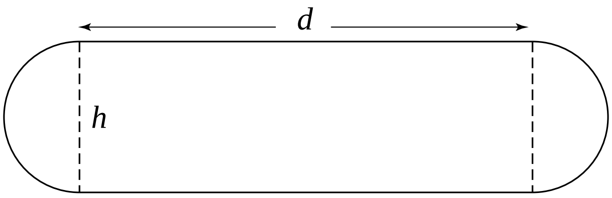
4p **2** Bereken hoe hoog de binnenkant van dit doosje minimaal moet zijn om dit stuk kaas er in te laten passen. Geef je antwoord in een geheel aantal centimeters.

Het volume van hele kazen die de vorm hebben van de kaas op foto 1, kan worden berekend met behulp van de volgende formule:

$$V = \tfrac{1}{6}\pi \cdot h^3 + \tfrac{1}{8}\pi^2 \cdot d \cdot h^2 + \tfrac{1}{4}\pi \cdot d^2 \cdot h$$

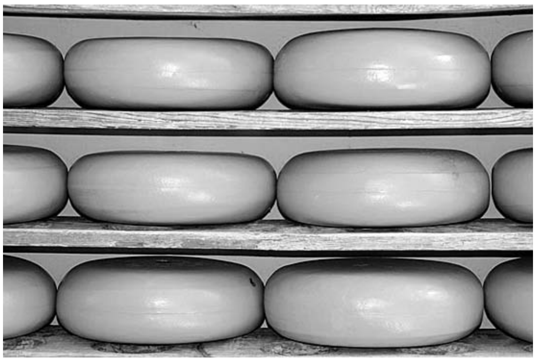
Hierin is V het volume in cm^3, h is de hoogte van de kaas in cm en d is de zogeheten binnendiameter van de kaas in cm. Zie figuur 3.

figuur 3



Iemand wil kazen maken met deze vorm. Het volume van een hele kaas moet 5000 cm^3 zijn en de hoogte moet 8 cm zijn. De kaas wordt gerijpt in een kamer van 3,50 m lang. Over de hele lengte van de kamer zijn planken tegen de muur aan gemaakt waarop de kazen naast elkaar kunnen liggen. Zie foto 2.

foto 2



6p **3** Bereken hoeveel van deze kazen er maximaal naast elkaar op een plank kunnen liggen als ze worden neergelegd zoals op foto 2.

Als de binnendiameter 0 wordt, ontstaat een bolvormige kaas. De inhoud van deze bolvormige kaas kun je ook uitrekenen met bovenstaande formule van V.

4p **4** Vul $d = 0$ in de formule van V in en werk de formule die hierbij ontstaat om tot de bekende formule voor de inhoud van een bol met straal r.

Atomium

Een bekend gebouw in Brussel is het Atomium. Zie de foto.

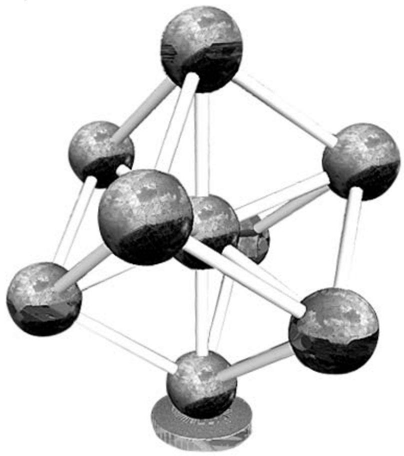
De constructie van het Atomium bestaat uit 9 bollen die door buizen verbonden zijn. Van deze 9 bollen liggen er 8 op de hoekpunten van een kubus. De negende bol ligt in het midden van deze kubus op het snijpunt van de lichaamsdiagonalen. De kubus steunt op een van de hoekpunten zo dat het middelpunt van de kubus recht boven het steunpunt ligt.

De bollen van het Atomium hebben een diameter van 18 meter.

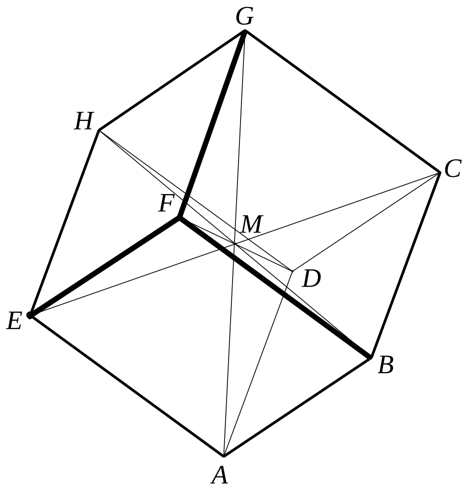
foto

In figuur 1 is een model van het atomium te zien. Als de bollen van het Atomium als punten worden beschouwd en de buizen als lijnen, dan ziet het Atomium er schematisch uit zoals in figuur 2.

figuur 1



figuur 2



Van 2003 tot 2005 heeft men gewerkt aan de renovatie van het Atomium. Hierbij is de bekleding van aluminium platen aan de buitenkant van de bollen vervangen door platen van roestvrij staal.

Er zijn plaatsen waar geen roestvrij staal aangebracht hoefde te worden. Dat zijn:
- de plaatsen waar een buis aan een bol vastzit. De oppervlakte van één zo’n aanhechting is 7 m^2.
- de ramen, de trapaanhechtingen en het steunpunt van de onderste bol, met een gezamenlijke oppervlakte van 750 m^2.

4p **5** Bereken de totale oppervlakte van de roestvrijstalen bekleding van de bollen.

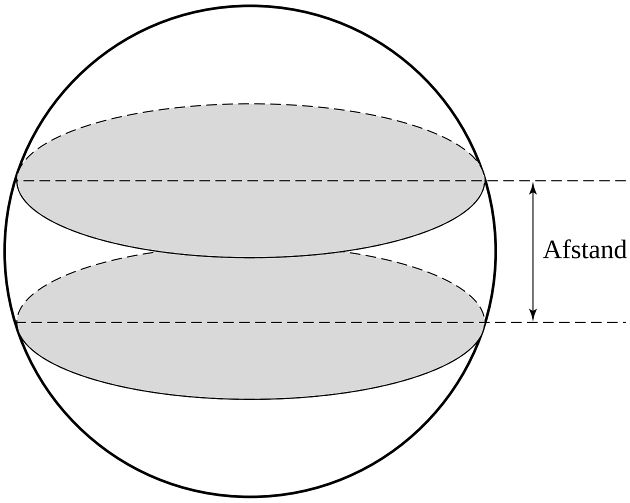
Door de stand van de kubus liggen de punten F, H en C van het schematische model van figuur 2 op dezelfde hoogte. Ook de punten B, E en D liggen even hoog.

Op de uitwerkbijlage is, op schaal, een begin gemaakt met het bovenaanzicht van het model in figuur 2.

4p **6** Maak dit bovenaanzicht verder af. Zet de namen van alle punten erbij.

In enkele bollen van het Atomium zijn twee verdiepingen aangebracht. De oppervlakten van de vloeren van de beide verdiepingen zijn even groot. Zie figuur 3. De straal van de bol is 9 meter.

figuur 3



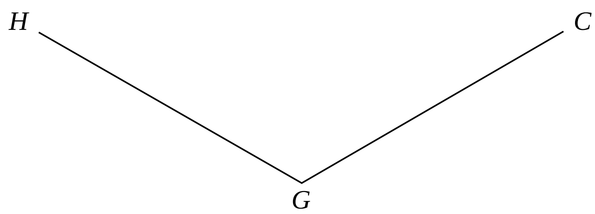
De oppervlakte van de vloer van een verdieping is 240 m^2.

5p **7** Bereken de afstand tussen de twee verdiepingen.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

6



Product van twee sinusoïden

De functie f is gegeven door $f(x) = 2\sin x \cdot (1 + \sin x)$ met domein $[0, 1\frac{1}{3}\pi]$.

De afgeleide van deze functie is te schrijven als $f'(x) = 2\cos x \cdot (1 + 2\sin x)$

4p **8** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

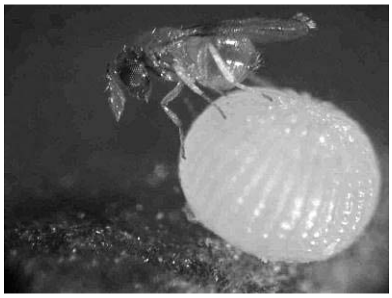
Op het interval $[0, 1\frac{1}{3}\pi]$ heeft de functie f één minimum en één maximum.

6p **9** Bereken exact dit minimum en dit maximum.

Sluipwespen

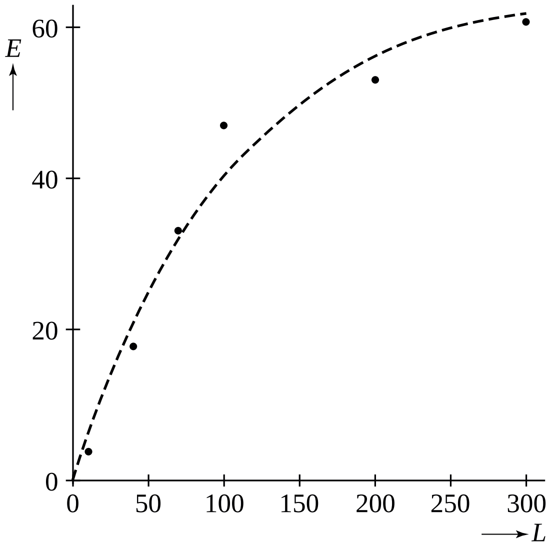
Larven kunnen grote schade toebrengen aan gewassen. Larven kunnen milieuvriendelijk bestreden worden met sluipwespen. Een sluipwesp legt een eitje in de larve waardoor de larve uiteindelijk dood gaat. Een onderzoeker wilde weten hoeveel larven één sluipwesp maximaal per dag kan bestrijden.

foto



Om dit te onderzoeken werd één sluipwesp in een grote afgesloten ruimte met larven gezet. Na één dag werd geteld hoeveel larven er in totaal in de ruimte waren. Dit aantal noemen we L. Ook werd geteld hoeveel larven er een eitje bevatten. Dit aantal wordt E genoemd. Het experiment werd zes maal uitgevoerd. De resultaten (stippen) zijn te zien in figuur 1.

figuur 1



Het verband tussen E en L kan redelijk worden benaderd door de formule $E = 64 \cdot (1 - 0,6^{0,02L})$

In figuur 1 is de grafiek van E gestippeld. Uit de figuur valt af te lezen dat bij $L = 100$ het aantal larven met eitjes volgens de formule nogal afwijkt van het gemeten aantal larven met eitjes.

3p **10** Bereken bij $L = 100$ het verschil tussen het aantal larven met eitjes volgens de formule, afgerond op een geheel aantal larven, en het gemeten aantal larven met eitjes.

De formule is een hulpmiddel om te schatten hoeveel larven maximaal per dag door één sluipwesp kunnen worden bestreden. Volgens de formule kan het aantal larven met eitjes E niet boven een bepaalde grenswaarde uitkomen.

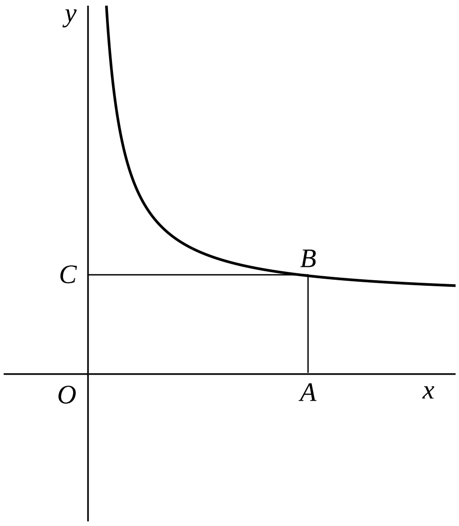
4p **11** Beredeneer hoe groot deze grenswaarde is, door in de formule het aantal larven L te laten toenemen tot zeer grote waarden.

Gebroken functie met rechthoek

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ met $x > 0$.

Op de grafiek van f wordt een punt B gekozen. Daarna worden punt A op de x-as en punt C op de y-as zodanig gekozen dat vierhoek $OABC$ een rechthoek is. Zie figuur 1.

figuur 1



Van een punt B is gegeven dat de y-coördinaat $\frac{4}{3}$ is.

3p **12** Bereken exact de omtrek van rechthoek $OABC$ in deze situatie.

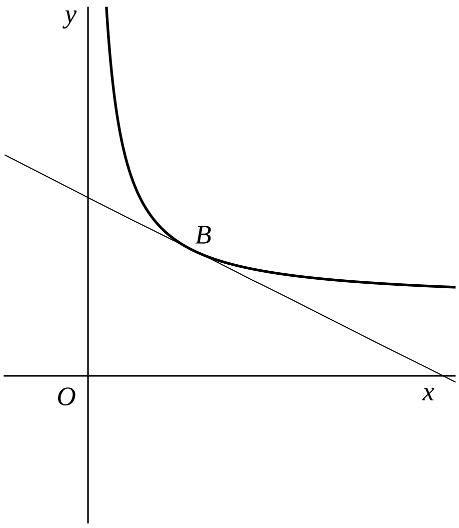
Voor elk punt $B(b, \frac{1}{b} + 1)$ op de grafiek van f is de oppervlakte van rechthoek $OABC$ groter dan 1.

3p **13** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

De raaklijn aan de grafiek van f in een punt B heeft een richtingscoëfficiënt van $-\frac{1}{2}$.

Zie figuur 2.

figuur 2



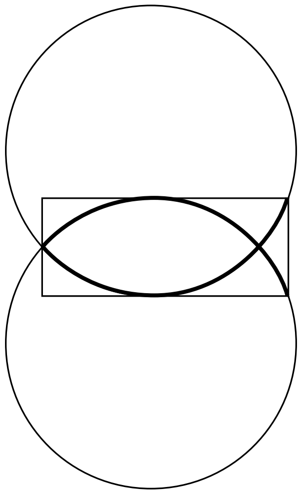
4p **14** Bereken exact de x-coördinaat van punt B in deze situatie.

Bumpersticker

In het verkeer zie je regelmatig auto's met bumperstickers. Een veel voorkomende sticker is er een in de vorm van een visje zoals te zien is op de foto. Dit visje is opgebouwd uit twee even grote cirkelbogen die in een gemeenschappelijk punt beginnen en elkaar in een tweede punt snijden. Zie figuur 1. Ook is in deze figuur te zien dat het visje precies wordt omsloten door een rechthoek.

foto

figuur 1

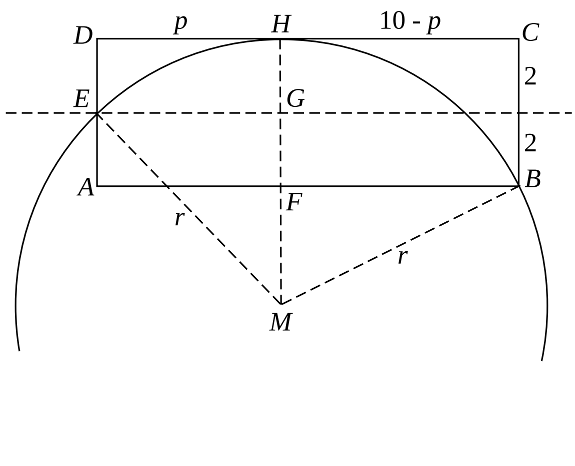


In deze opgave wordt nagegaan hoe een visje getekend kan worden dat in een rechthoek past met een breedte van 10 cm en een hoogte van 4 cm. Om het visje te kunnen tekenen, is het nodig te weten wat de straal is van de bijbehorende cirkelbogen. Ook moet de positie van de middelpunten van de cirkelbogen ten opzichte van de rechthoek bekend zijn.

In figuur 2 zijn de rechthoek en een deel van de onderste cirkel getekend.

Er geldt het volgende:
- $AB = CD = 10$ cm
- $AD = BC = 4$ cm
- E is het midden van AD
- G is het midden van FH
- $DH = EG = AF = p$ cm
- De straal van de cirkelboog is r cm.

figuur 2



Met behulp van de stelling van Pythagoras in driehoek MGE kan een vergelijking worden opgesteld. Deze vergelijking kan vervolgens worden omgewerkt tot

I $\quad r = \frac{1}{4}p^2 + 1$

6p **15** Stel de gevraagde vergelijking op en werk deze om tot $r = \frac{1}{4}p^2 + 1$.

Op soortgelijke manier kan met behulp van de stelling van Pythagoras in driehoek MBF een vergelijking worden opgesteld. Deze vergelijking kan vervolgens worden omgewerkt tot

II $\quad p^2 - 20p + 116 - 8r = 0$

De in vergelijking I gegeven uitdrukking voor r kan in vergelijking II worden gesubstitueerd. Hierdoor ontstaat een vergelijking die kan worden omgewerkt tot

III $\quad p^2 + 20p - 108 = 0$

3p **16** Voer de hierboven beschreven substitutie uit en werk de daarbij verkregen vergelijking om tot $p^2 + 20p - 108 = 0$.

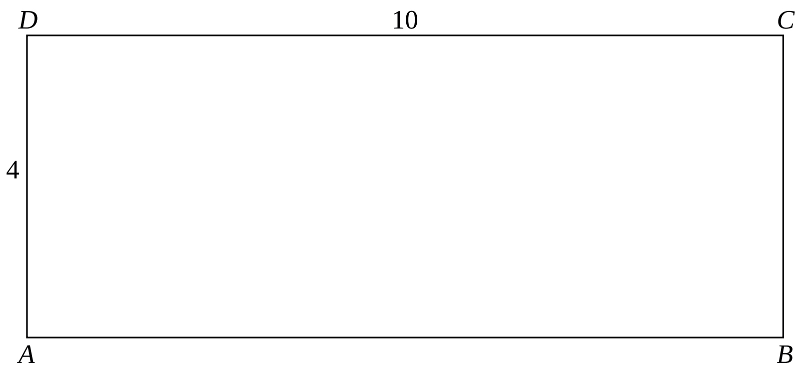
Op de uitwerkbijlage is een rechthoek van 10 cm bij 4 cm getekend. Om daarin een visje te kunnen tekenen, heb je de waarden van p en r nodig. Deze kunnen worden berekend door eerst vergelijking III op te lossen en daarna de gevonden waarde van p in vergelijking I in te vullen.

6p **17** Bereken de waarden van p en r en teken daarmee een visje in de rechthoek op de uitwerkbijlage. Geef duidelijk uitleg over je werkwijze.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ________________________________ Kandidaatnummer ______________

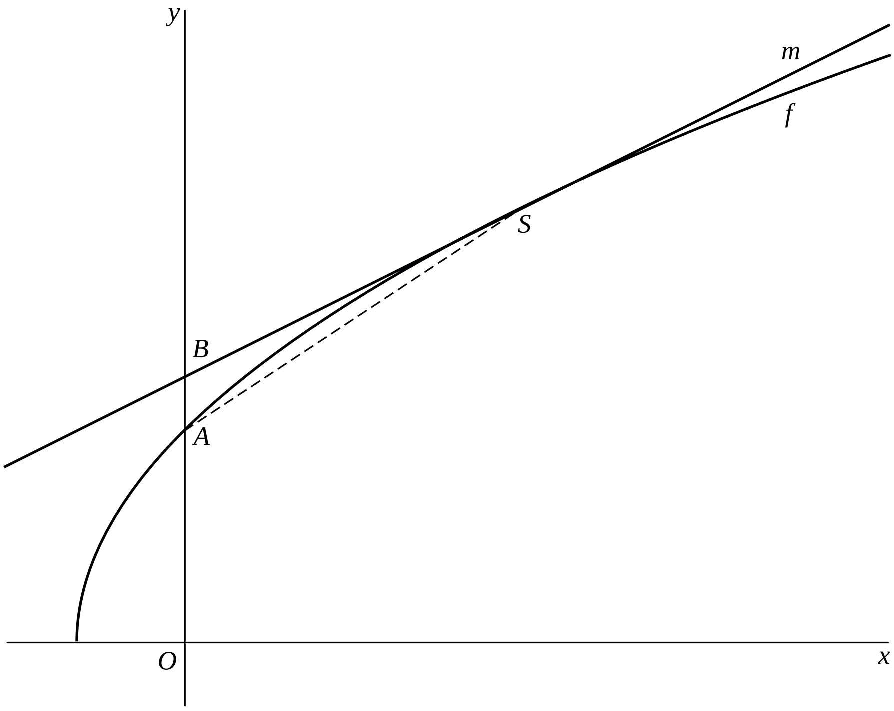
17



Wortelfunctie en raaklijn

De functie f is gegeven door $f(x) = 4\sqrt{9+3x}$. Lijn m is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $S(9, 24)$. Zie figuur 1.

figuur 1



De richtingscoëfficiënt van lijn m is 1.

4p **18** Toon dit door middel van differentiëren aan.

De grafiek van f snijdt de y-as in punt A. De lijn m snijdt de y-as in punt B. Zie figuur 1.

5p **19** Bereken exact de oppervlakte van driehoek ASB.