Opgave 1 Veldkrekels

Onderstaande tekst is ontleend aan het Brabants Dagblad van 28 mei 1997.
„De veldkrekel is een toonkunstenaar. Moeiteloos sjirpt hij een hoge C. Het tempo van de roepzang is afhankelijk van het weer. Bij fris weer laat de veldkrekel gemiddeld één sjirp per seconde horen, bij warm weer wel gemiddeld vijf, met alle variaties daartussen. Sterker, de veldkrekel kan eigenlijk wel als een thermometer gebruikt worden.
De onderzoeker M. Duijm heeft daar eens een berekening voor uitgedokterd. Het rekenvoorschrift luidt: neem het gemiddelde aantal sjirpen per vijf seconden, tel er zeven bij op, en je weet de temperatuur in graden Celsius.
Midas Dekkers evenwel hanteert een rekenvoorschrift waarbij je moet uitgaan van het gemiddeld aantal sjirpen per minuut. Je trekt er veertig van af, deelt de uitkomst door zeven en telt er tien bij op.”

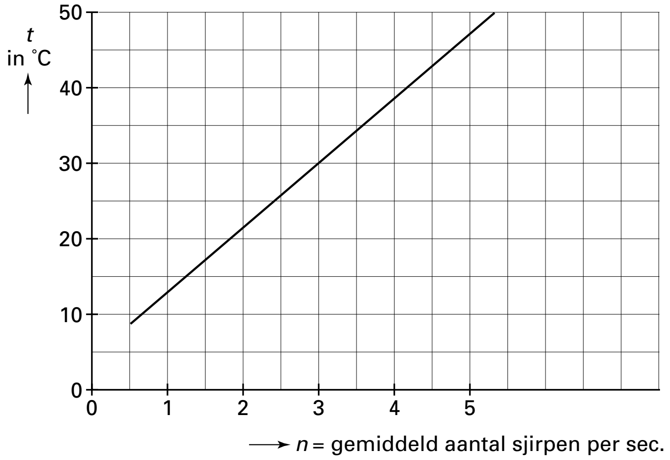
Stel dat een krekel op een zeker moment gemiddeld 2,4 sjirpen per seconde maakt. Als we met de twee rekenvoorschriften de temperatuur op dat moment berekenen, vinden we twee heel verschillende uitkomsten.

3p **1** □ Hoeveel graden verschillen die uitkomsten? Licht je antwoord toe.

3p **2** □ Stel voor M. Duijm de formule op die de temperatuur *t* (in °C) uitdrukt in het gemiddeld aantal sjirpen *n* per seconde.

In figuur 1 is een grafiek van het rekenvoorschrift van Midas Dekkers getekend. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 1

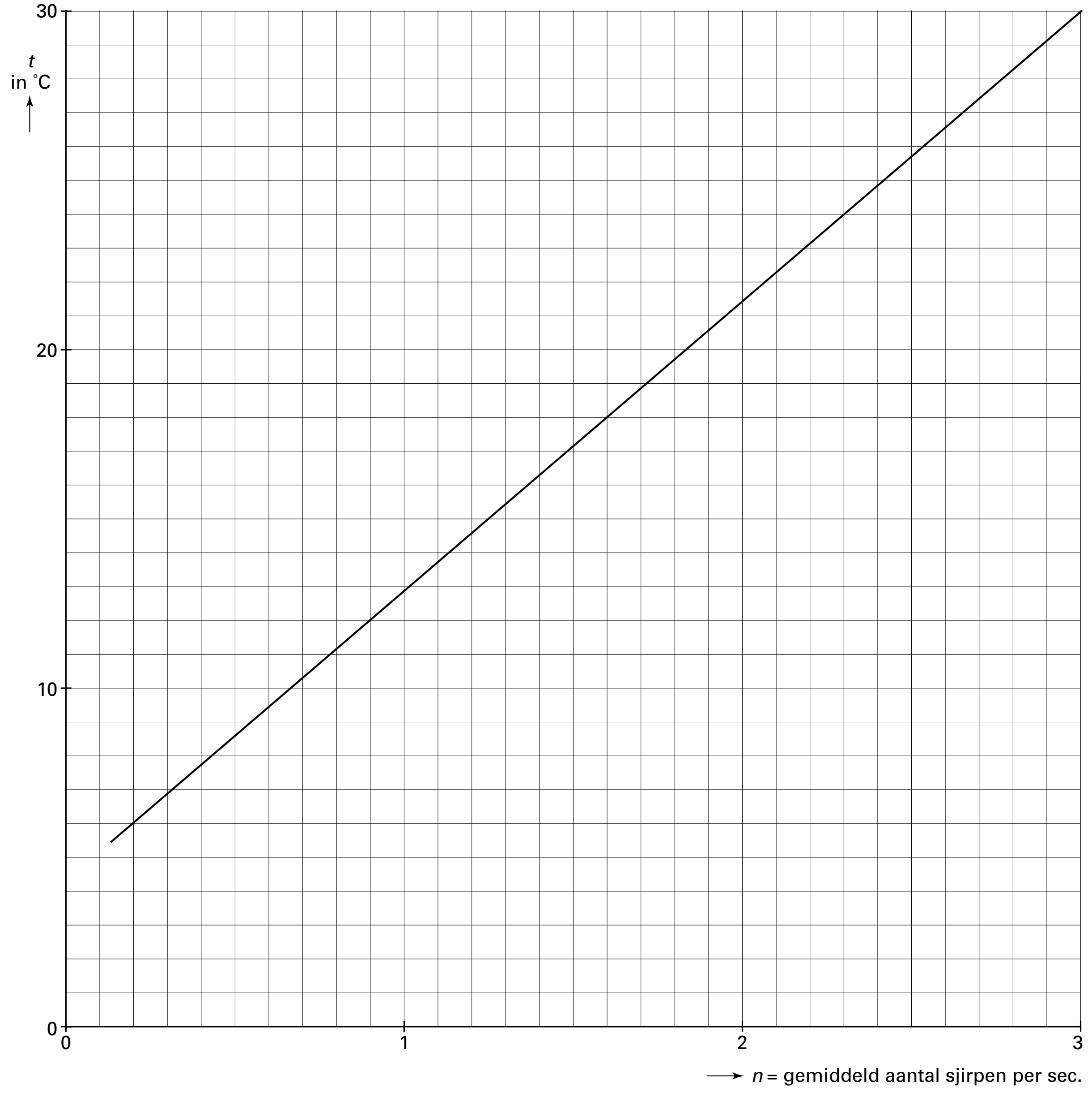


Voor het verschil dat bij vraag 1 gevonden is, is een eenvoudige verklaring: niet alle krekels sjirpen hetzelfde. Het rekenvoorschrift van Duijm geldt voor de veldkrekel, terwijl Dekkers het heeft over de sneeuwboomkrekel. Bij alle soorten krekels sjirpen de mannetjes om wijfjes te lokken. De wijfjes herkennen hun eigen soort aan de sjirpsnelheid, dus aan het aantal sjirpen per seconde.

4p **3** □ Bij welke temperatuur kan het veldkrekelvrouwtje geen verschil horen tussen een veldkrekelmannetje en een sneeuwboomkrekelmannetje? Licht je antwoord toe. Je kunt daarbij de figuur op de bijlage gebruiken.

Bijlage bij vraag 3

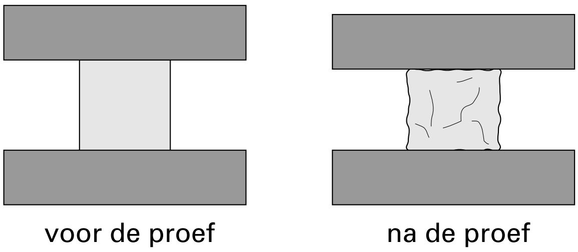
Vraag 3



Opgave 2 Beton

Bij het bouwen van wegen, bruggen en gebouwen worden grote hoeveelheden beton gebruikt. Om de stevigheid van dat beton te keuren, voert men drukproeven uit. Daartoe maakt men uit een partij beton een aantal kubussen. Deze kubussen worden een voor een onder een pers gezet. De druk op de kubus wordt geleidelijk opgevoerd, net zo lang tot de kubus begint te vervormen. Zie figuur 2. De grootste druk voordat het vervormen begint, noemt men de *druksterkte*. Deze wordt uitgedrukt in Newton per vierkante millimeter (N/mm^2). Een druksterkte van ten minste 25 N/mm^2 noemt men *voldoend groot*.

figuur 2



Een aannemer gebruikt beton waarvan de kubussen een gemiddelde druksterkte hebben van 28 N/mm^2. Er wordt aangenomen dat deze druksterkte normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 2,6 N/mm^2.

5p **4** ☐ Bereken welk percentage van zijn kubussen een voldoend grote druksterkte zal hebben.

Het is gewenst dat minstens 95% van de kubussen een voldoend grote druksterkte heeft. Anders zou het risico van afkeuren te groot zijn. Door het productieproces zorgvuldiger uit te voeren blijft de druksterkte normaal verdeeld met gemiddelde 28 N/mm^2, maar wordt de standaardafwijking kleiner.
Nu blijkt dat 95% van de kubussen een voldoend grote druksterkte heeft.

5p **5** ☐ Bereken de nieuwe standaardafwijking van de druksterkte.

De betonkeurders gebruiken verschillende wijzen van keuren. Zo kent men de methode ’*serie van 6*’ en ook de methode ’*serie van 12*’.
Bij ’serie van 6’ wordt een zestal willekeurige kubussen gekozen. De partij beton wordt alleen goedgekeurd als alle zes kubussen een druksterkte hebben van ten minste 25 N/mm^2.
Bij ’serie van 12’ kiest men 12 willekeurige kubussen. De partij wordt goedgekeurd als er ten hoogste één kubus een druksterkte van minder dan 25 N/mm^2 heeft.

Voor een keuring zijn 12 kubussen gekozen. Men gebruikt de methode ’serie van 12’ en constateert de volgende meetwaarden (in N/mm^2):

27, 27, 32, 24, 32, 28, 28, 29, 28, 24, 29, 32

Uiteraard wordt deze partij beton op grond van ’serie van 12’ afgekeurd.

5p **6** ☐ Bereken de kans dat men de partij beton op grond van ’serie van 6’ wel goedgekeurd zou hebben, als de zes kubussen willekeurig uit deze 12 waren gekozen.

Aannemers zijn niet erg gelukkig met deze testmethodes. Zij beweren dat beide keuringsmethodes niet even streng zijn en pleiten voor een andere aanpak.
Voor een bepaald type beton geldt dat 95% van alle kubussen die vervaardigd kunnen worden, een druksterkte heeft van ten minste 25 N/mm^2. Een willekeurig gekozen kubus heeft dus een kans van 95% dat de druksterkte groot genoeg is.

5p **7** ☐ Bij welke keuringsmethode (’serie van 6’ of ’serie van 12’) is de kans het grootst dat een partij van dit type beton wordt goedgekeurd? Licht je antwoord toe.

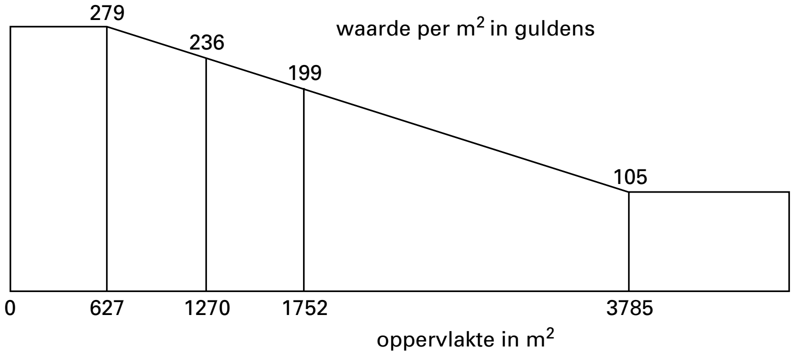
Opgave 3 Erfpacht

Huiseigenaren bezitten meestal het huis én de grond waarop het staat. Soms echter is de eigenaar van de grond een ander dan de eigenaar van het huis. De huiseigenaar huurt dan de grond van de grondeigenaar. Dit wordt *erfpacht* genoemd: het erf wordt gepacht, gehuurd dus.

De huurprijs van een stuk grond wordt meestal voor een groot aantal jaren vastgesteld. Aan het einde van zo'n periode moet een nieuwe huurprijs worden bepaald. De nieuwe huurprijs wordt gebaseerd op de taxatiewaarde van het stuk grond. De taxatiewaarde is de waarde waarop het stuk grond getaxeerd ofwel geschat wordt. Hoe hoger de taxatiewaarde, hoe hoger de huur.

Een grondeigenaar, die vele stukken grond in erfpacht verhuurt, heeft vier van zijn stukken grond laten taxeren. De oppervlaktes van deze stukken bedroegen 627 m^2, 1270 m^2, 1752 m^2 en 3785 m^2.
Aan de hand van de taxatiewaarde van een stuk grond kan de waarde per m^2 worden uitgerekend. In figuur 3 staan die bedragen voor de vier getaxeerde stukken grond. De taxatiewaarde van een stuk grond is altijd een bedrag in gehele duizendtallen.

figuur 3



2p **8** ☐ Hoe groot is de taxatiewaarde van het stuk grond van 1270 m^2? Licht je antwoord toe.

De grondeigenaar berekent met behulp van figuur 3 de waarde per m^2 van elk van zijn overige stukken grond als volgt:

- Een stuk grond met een oppervlakte kleiner of gelijk aan 627 m^2 heeft een waarde van *ƒ* 279,– per m^2.
- De waarde per m^2 van een stuk grond met een oppervlakte tussen 627 m^2 en 1270 m^2 wordt berekend door middel van lineaire interpolatie in figuur 3. De waarde per m^2 wordt *naar beneden* afgerond op een geheel aantal guldens.
  Deze berekeningswijze wordt ook gebruikt bij stukken grond met een oppervlakte tussen 1270 m^2 en 1752 m^2 en tussen 1752 m^2 en 3785 m^2.
- Een stuk grond met een oppervlakte groter of gelijk aan 3785 m^2 heeft een waarde van *ƒ* 105,– per m^2.

Aan de hand van de zo berekende waarde per m^2 wordt de taxatiewaarde van het stuk grond bepaald en afgerond op gehele duizendtallen.

In figuur 3 is het verband tussen oppervlakte en waarde per m^2 als een rechte lijn tussen de punten (627, 279) en (3785, 105) weergegeven.

5p **9** ☐ Is dit verband, uitgaande van de vier gegeven oppervlaktes en hun bijbehorende waarde per m^2, inderdaad correct weer te geven als een rechte lijn? Licht je antwoord met berekeningen toe.

Twee buren huren allebei een stuk grond van deze grondeigenaar. De oppervlaktes van deze stukken grond zijn vrijwel gelijk: 1180 m^2 en 1181 m^2. Ze verwachten dat de taxatiewaarde van het grootste stuk grond hetzelfde is als die van het kleinste stuk, of iets hoger. Maar als ze de berekende taxatiewaarden van beide stukken grond vergelijken, ontdekken ze iets merkwaardigs.

8p **10** □ Leg met behulp van berekeningen uit wat er merkwaardig is aan deze twee taxatiewaarden.

Bij het volgende houden we geen rekening meer met het afronden van de waarde per m^2 en de gewoonte om de taxatiewaarde voor het stuk grond op gehele duizendtallen af te ronden.
Voor de stukken met een oppervlakte van 1752 m^2 tot 3785 m^2 kan men de taxatiewaarde met behulp van de volgende formule bepalen:

$$W = -0{,}046 \cdot Opp^2 + 280 \cdot Opp$$

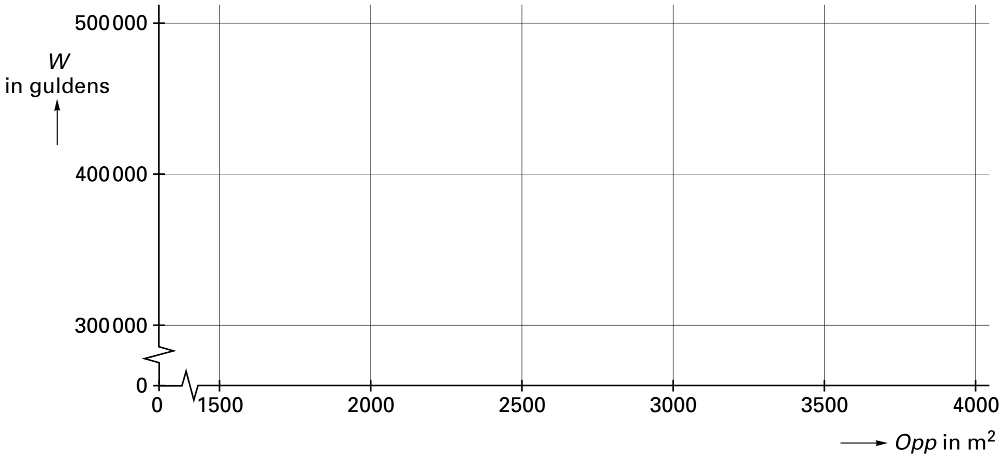
Hierbij is Opp de oppervlakte in m^2 van het betreffende stuk grond en W de taxatiewaarde ervan in guldens.

Een huiseigenaar die een stuk grond met een oppervlakte van 3043 m^2 in erfpacht heeft van deze grondeigenaar, is het absoluut niet eens met de wijze van taxatie van de grond. Hij start een juridische procedure en probeert de vreemde manier van taxeren aan te tonen door de grafiek van bovenstaande formule te tekenen.

6p **11** □ Teken die grafiek in de figuur op de bijlage en leg uit hoe de huiseigenaar hiermee zijn standpunt kan verduidelijken.

Bijlage bij vraag 11

Vraag 11

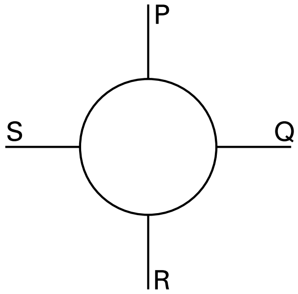


Opgave 4 Aanpassing rotonde

Bij en op rotondes vinden vaak verkeerstellingen plaats om de doorstroming van het verkeer te meten. Zo zien we in matrix A de doorstroming tijdens de ochtendspits op een rotonde waar een viertal wegen P, Q, R en S op uitkomt. Zie figuur 4. De getallen in de matrix geven steeds aan welk deel van de motorvoertuigen dat vanaf de ene weg de rotonde op komt er bij de andere weg weer af gaat. Zo betekent het getal 0,32 in de tweede rij bijvoorbeeld dat 32% van de voertuigen die vanaf R de rotonde op rijden, de rotonde bij Q verlaat.

figuur 4

$$A = \text{naar} \quad \begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R \\ S \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} P & Q & R & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}12 & 0{,}44 & 0{,}43 \\ 0{,}42 & 0 & 0{,}32 & 0{,}26 \\ 0{,}37 & 0{,}84 & 0 & 0{,}31 \\ 0{,}21 & 0{,}04 & 0{,}24 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



4p **12** □ Leg uit waarom wel voor elke kolom van A moet gelden dat de som van de getallen gelijk is aan 1, maar dat dit voor de rijen niet zo hoeft te zijn.

In tabel 1 staan nog wat gegevens over deze rotonde tijdens de ochtendspits.

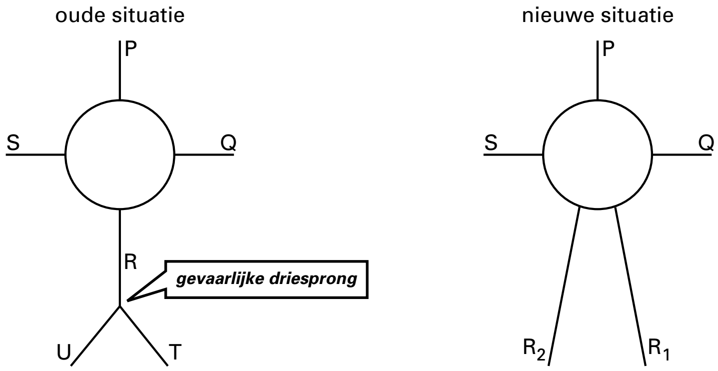
tabel 1

aankomst op rotonde vanaf	aantal voertuigen
P	512
Q	309
R	791
S	231
	totaal 1843

4p **13** □ Bereken de verschillende aantallen motorvoertuigen die bij P, Q, R en S de rotonde weer verlaten.

De gemeente wil de verkeerssituatie bij de rotonde veranderen. Vlakbij de rotonde is namelijk een gevaarlijke driesprong van weg R met de wegen U en T. Deze gevaarlijke situatie wordt opgeheven door weg R te vervangen door twee nieuwe wegen R_1 en R_2. Dan komen er op de rotonde niet vier, maar vijf wegen uit. In figuur 5 zijn de oude en de nieuwe situatie in beeld gebracht.

figuur 5



Matrix *B* beschrijft de doorstroming op de gevaarlijke driesprong. Matrix *B* is op dezelfde manier opgebouwd als matrix *A*.

matrix *B*

$$B = \text{naar} \begin{array}{c} \\ R \\ T \\ U \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} R & T & U \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0{,}63 & 0{,}84 \\ 0{,}59 & 0 & 0{,}16 \\ 0{,}41 & 0{,}37 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Men neemt aan dat de verkeersstroom die uit *T* (oude situatie) via *R* op de rotonde terechtkomt zich verdeelt over de richtingen *P*, *Q* en *S* volgens de verhoudingen van matrix *A*. Zo gaat bijvoorbeeld van het verkeer dat vanaf *T* via *R* de rotonde op rijdt ook 32% naar *Q*. Voor de verkeersstroom uit *U* wordt dezelfde veronderstelling gemaakt.

3p **14** □ Toon aan dat ongeveer 28% van de voertuigen uit *T* de rotonde bij *P* verlaat.

De afdeling Verkeer van de gemeente stelt voor de nieuwe situatie een doorstromingsmatrix *C* op. Men gebruikt daarbij de gegevens uit matrix *A* en uit matrix *B*. Hieronder zie je deze matrix *C* gedeeltelijk ingevuld.

matrix *C*

$$C = \text{naar} \begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R_1 \\ R_2 \\ S \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccccc} P & Q & R_1 & R_2 & S \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0{,}12 & 0{,}28 & & 0{,}43 \\ 0{,}42 & 0 & & & 0{,}26 \\ 0{,}22 & 0{,}50 & & & 0{,}18 \\ 0{,}15 & 0{,}34 & & & 0{,}13 \\ 0{,}21 & 0{,}04 & & & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

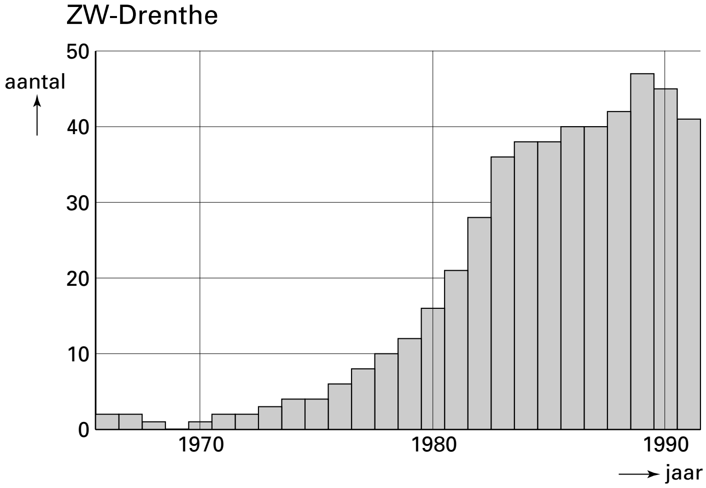
In de kolom van R_1 staat alleen het getal 0,28, maar de vier getallen eronder ontbreken.

4p **15** □ Bereken deze vier ontbrekende getallen.

Opgave 5 Haviken

Tot in het begin van deze eeuw werd er ijverig jacht gemaakt op de havik. Rond de jaren veertig zag de havik kans zich uit te breiden. Als gevolg van het toenemende gebruik van insecticiden en ontsmettingsmiddelen bereikte het aantal haviken aan het eind van de jaren zestig een dieptepunt. Het verbod op enkele van deze middelen zorgde ervoor dat vanaf het begin van de jaren zeventig het aantal haviken weer toenam. In figuur 6 zien we de aantallen haviken zoals die vanaf 1966 in Zuidwest-Drenthe vastgesteld werden.

figuur 6



In figuur 6 is te zien dat gedurende de periode 1970-1982 het aantal haviken steeds sneller toeneemt.
Men kan het aantal haviken gedurende deze periode vrij goed met exponentiële groei beschrijven.

5p **16** □ Stel een formule op die deze exponentiële groei beschrijft tussen de jaren 1970 en 1982. Neem hierbij de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1970.

Vogelonderzoekers hebben een groep van 34 haviken gedurende 17 jaar gevolgd. In tabel 2 zie je de resultaten.
De telling begon in de lente waarin deze 34 haviken zijn geboren. In de kolom „in leven” staat het aantal exemplaren dat in het begin van dat levensjaar in leven was. In de kolom „sterfte” staat het aantal haviken dat in de loop van dat levensjaar is gestorven.

tabel 2

jaar	in leven	sterfte
0-1	34	14
1-2	20	8
2-3	12	5
3-4	7	2
4-5	5	1
5-6	4	1
6-7	3	0
7-8	3	0
8-9	3	0

jaar	in leven	sterfte
9-10	3	0
10-11	3	0
11-12	3	1
12-13	2	0
13-14	2	1
14-15	1	0
15-16	1	0
16-17	1	1

Uit de tabel blijkt dat een groot deel van de pasgeboren haviken het eerste levensjaar niet overleefde.

4p **17** ☐ Onderzoek of er onder de eerste tien levensjaren een jaar was waarin een nog groter deel van de haviken overleed.

Veronderstel dat de sterfte binnen een jaar gelijkelijk over dat jaar verdeeld is. Dan kan van deze 34 haviken worden berekend hoe lang ze gemiddeld leefden.

4p **18** ☐ Bereken hoe lang de haviken gemiddeld hebben geleefd. Geef je antwoord in maanden nauwkeurig.

De onderzoekers hoopten dat deze groep haviken, ondanks het vrij kleine aantal, min of meer representatief zou zijn voor alle haviken in Nederland. In dat geval konden ze op basis van hun waarnemingen algemene uitspraken doen over haviken.

2p **19** ☐ Leg uit waarom deze groep nooit werkelijk representatief kan zijn. Gebruik hierbij gegevens uit tabel 2.

Bij iedere populatie kan men zich afvragen of deze in zijn bestaan bedreigd wordt. Dit voortbestaan hangt af van geboorte- en sterftecijfers. Om de populatie op peil te houden, is er elk jaar een minimaal aantal jonge vogels nodig.
De Duitse bioloog Mebs heeft de volgende formule ontworpen:

$$f = \frac{2m}{(1-q)(1-m)}$$

waarbij

f = het *minimale* aantal jongen *per havikenpaar* dat gemiddeld per jaar nodig is om de populatie op peil te houden;
q = het sterftecijfer van de eerstejaarsvogels;
m = het sterftecijfer van de oudere vogels.

Uit recent onderzoek blijkt dat in Nederland al een aantal jaren 41,2% van de haviken in hun eerste levensjaar sterft. Dus $q = 0{,}412$. Het sterftecijfer van de oudere vogels bleek de laatste jaren 0,286 te zijn en het gemiddeld aantal jongen per havikenpaar 0,94 per jaar.

3p **20** ☐ Blijft de Nederlandse populatie haviken op peil? Licht je antwoord toe.

De sterfte onder oudere haviken kan veranderen, onder andere door wijzigingen in het jachtbeleid. Stel dat per jaar nog steeds 41,2% van de eerstejaarshaviken sterft en het gemiddeld aantal jongen per ouderpaar 0,94 blijft.

6p **21** ☐ Bereken hoeveel procent van de oudere haviken dan elk jaar maximaal mag sterven om de havikenstand op peil te houden.