

Opgave 1 Oud papier

Om verantwoord met het milieu om te gaan, wordt er tegenwoordig veel oud papier opgespaard en ingeleverd. Vaak kunnen basisscholen daar een aardig centje mee verdienen.

foto



In een bepaalde gemeente zijn drie basisscholen (scholen I, II en III) die oud papier inzamelen. In deze gemeente wordt slechts vier maal per jaar (op 1 maart, 1 juni, 1 september en 1 december) het oud papier aan een papierfabriek verkocht. In onderstaande matrix M staat vermeld hoeveel kg papier elke school op deze vier momenten in het jaar 1995 verkocht.

matrix		1 maart	1 juni	1 september	1 december
	school I	2020	2537	4435	3015
$M =$	school II	3128	4635	4015	5328
	school III	5414	3977	2309	3481

De papierprijs is erg veranderlijk. Zo werd op 1 maart 1995 f 0,10 per kg betaald en op 1 september f 0,20. In matrix N vind je de kilograprijs voor elk van de vier verkoopmomenten.

matrix		kilograprijs in guldens
	1 maart 1995	0,10
$N =$	1 juni 1995	0,17
	1 september 1995	0,20
	1 december 1995	0,09

- 4p 1 Bereken voor elke school apart hoeveel gulden het ingezamelde oud papier in 1995 opbracht.

Hier volgen twee beweringen:

- Op het moment dat de kilograprijs het laagst was, was de totale hoeveelheid opgehaald papier het grootst.
- De school die in 1995 het meeste papier bijeenbracht, verdiende er ook het meeste geld mee.

- 5p 2 Ga van elke bewering na of deze waar is of niet waar. Licht je antwoorden toe.

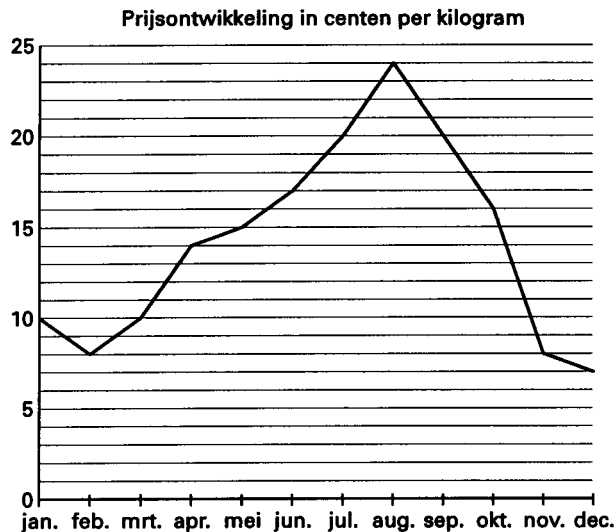
Eindexamen wiskunde A havo 1998-I

Omdat gemeentebesturen blij zijn met scholen die oud papier inzamelen, krijgen deze scholen een zogenaamde *prijsgarantie*. Deze prijsgarantie zorgde er in 1995 voor dat scholen altijd minstens $f\ 0,09$ per kilogram oud papier ontvingen, ook al wilde de papierfabriek er minder voor betalen. De gemeente betaalde dan het verschil bij. Zo betaalde de papierfabriek in december 1995 eigenlijk geen $f\ 0,09$ maar slechts $f\ 0,07$ per kilogram. Als gevolg van de prijsgarantie kreeg school II over 1995 dus $5328 \times (0,09 - 0,07) = f\ 106,56$ van de gemeente bijbetaald.

In figuur 1 vind je de ontwikkeling van de prijs die door de papierindustrie voor een kilogram oud papier betaald werd gedurende het jaar 1995. Deze oudpapierprijs werd één keer per maand vastgesteld bij het begin van de maand.

Dat jaar werd er in Nederland door scholen en andere organisaties die deze gemeentelijke prijsgarantie krijgen ongeveer 1,2 miljard kilogram oud papier verkocht. We gaan er van uit dat de hoeveelheid verkocht oud papier elk van de 12 maanden gelijk was.

figuur 1



- 5p 3 Bereken het totale bedrag dat in 1995 in Nederland door de gemeentes is bijbetaald in het kader van de prijsgarantie.

Een andere methode om het inzamelen van oud papier te subsidiëren is de volgende: De gemeente stelt voor de kilogramprijs een streefwaarde vast, bijvoorbeeld 11 cent. Is de werkelijke prijs lager dan de streefwaarde dan betaalt de gemeente aan de organisatie de helft bij van het verschil tussen deze twee waarden. Dus als de papierprijs op een gegeven moment 4 cent per kilogram is, dan betaalt de gemeente $0,5 \times (f\ 0,11 - f\ 0,04) = f\ 0,035$ per kilogram oud papier bij.

- 5p 4 Onderzoek of deze methode voor de gemeentes in 1995 voordeliger zou zijn geweest. Ga uit van de streefwaarde van $f\ 0,11$ per kilogram oud papier.

Opgave 2 Auto's: afstanden en kosten

Afstanden

Bijna elke grote autofabrikant maakt tegenwoordig wel een zogenaamde Spacewagon of Multi Purpose Vehicle (MPV). Dit type auto is een stuk groter dan de 'gewone' personenauto. Onlangs zijn verschillende van deze MPV's getest. Er werd getest op vier onderdelen. Hierbij gaf men voor ieder onderdeel punten op de gebruikelijke schaal van 1 tot en met 10. Zie voor de resultaten figuur 2.

figuur 2

CHRYSLER VOYAGER		MITSUBISHI SPACE GEAR		PEUGEOT 806		VOLKSWAGEN SHARAN	
Verbruik	6	Verbruik	5	Verbruik	7	Verbruik	7
Weggedrag	8,5	Weggedrag	6	Weggedrag	9	Weggedrag	8,5
Comfort	8	Comfort	6	Comfort	8	Comfort	7
Binnenruimte	8	Binnenruimte	8,5	Binnenruimte	9	Binnenruimte	9

Op grond van de gegevens in figuur 2 kunnen we de auto's met elkaar vergelijken. Tussen twee auto's definiëren we een *afstand* door eerst per onderdeel van de test het puntenverschil (niet-negatief!) tussen beide auto's te nemen en daarna al deze verschillen op te tellen.

- 6p 5 Maak een 4×4 afstandenmatrix voor deze vier auto's.

Bij het onderzoek werden nog veel meer auto's op bovenstaande vier onderdelen beoordeeld. Al deze auto's werden daarna met elkaar vergeleken door steeds de afstand tussen twee auto's te berekenen.

Uit het onderzoek bleek dat een groot prijsverschil tussen twee auto's altijd overeenkwam met een grote afstand tussen deze auto's. Maar het omgekeerde gold niet altijd. In het verslag van het onderzoek wordt opgemerkt: „Een grote afstand tussen twee auto's betekende niet altijd een groot prijsverschil.”

Deze opmerking is te verklaren zonder verder iets te weten van de verschillende auto's die met elkaar vergeleken worden. Bij zo'n verklaring hoeft alleen gelet te worden op de wijze waarop de afstand tussen twee auto's berekend wordt.

- 3p 6 Geef zo'n verklaring.

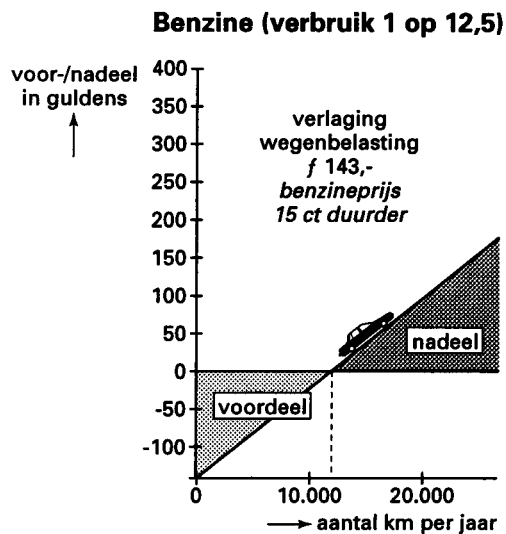
Kosten

Om het autogebruik te verminderen stelde de Nederlandse regering in augustus 1996 een aantal financiële maatregelen voor. Er werd voorgesteld de prijzen van de verschillende brandstoffen te verhogen. Daar stond tegenover dat de jaarlijkse wegenbelasting verlaagd werd.

Naar aanleiding van deze voorstellen maakte een journalist van het Brabants Dagblad een plaatje (zie figuur 3). Daarin werden de maatregelen verwerkt voor auto's die op benzine rijden. We zien dat de wegenbelasting voor benzineauto's met f 143,- verlaagd wordt en dat de benzine 15 cent per liter duurder wordt.

In het vervolg van deze opgave gaan we uit van een verbruik van 1 op 12,5 bij een benzineauto. Dat wil zeggen dat een automobilist op 1 liter benzine 12,5 km kan rijden.

figuur 3



Zoals je in het plaatje kunt zien, zullen er automobilisten zijn die, bij een ongewijzigd aantal kilometers per jaar, voordeel hebben van deze maatregel. Andere automobilisten zullen echter duurder uit zijn als ze hun kilometeraantal per jaar niet aanpassen.

- 4p 7 Bereken hoe groot het jaarlijkse nadeel is voor een automobilist die zowel voor als na de invoering van de overheidsmaatregelen 40 000 kilometer per jaar rijdt.

In figuur 3 kun je het aantal kilometers per jaar waarbij een automobilist geen voordeel én geen nadeel heeft, niet precies aflezen. Je kunt het echter wel berekenen.

- 4p 8 Bereken dit aantal in kilometers nauwkeurig.

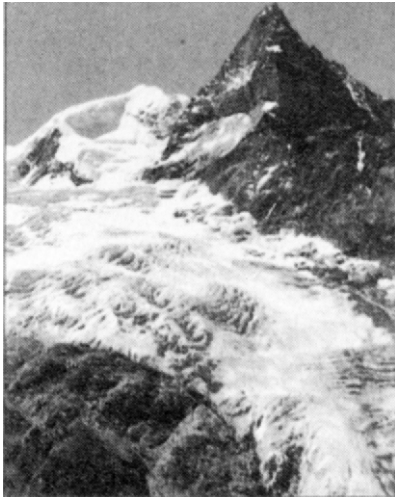
De voorstellen van de regering betroffen niet alleen benzineauto's. Voor dieselauto's werd voorgesteld de jaarlijkse wegenbelasting met f 114,- te verlagen. De prijs van een liter diesel zou met 6 cent verhoogd worden.

- 5p 9 Maak een grafiek als die in figuur 3 voor een dieselrijder die gemiddeld 1 op 16 rijdt. Licht je werkwijze toe.

Opgave 3 Korstmossen

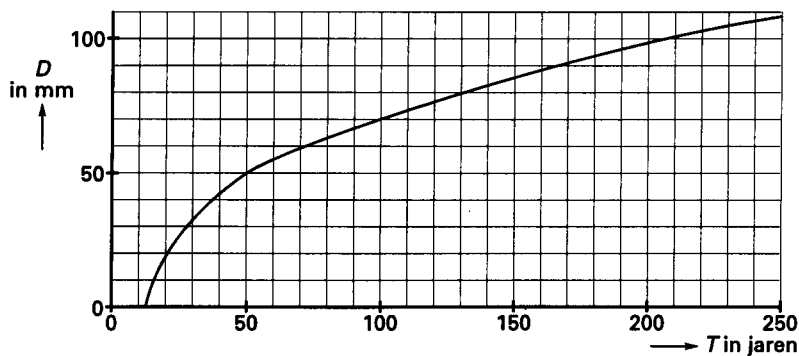
Door stijging van de gemiddelde temperatuur op aarde worden gletsjers steeds kleiner. Het ijs verdwijnt van plaatsen die eeuwenlang door de gletsjer waren bedekt. Waar het ijs verdwenen is, ontstaan vaak korstmossen. Met behulp van deze mossen is het mogelijk bij benadering het jaartal te bepalen waarop het ijs daar verdween.

foto



De mosgroei treedt min of meer cirkelvormig op en er is een duidelijk verband tussen de diameter van het korstmos en de leeftijd. Hoe groter de diameter van het korstmos, hoe ouder het korstmos is en dus hoe langer het geleden is dat die plaats nog bedekt was door de gletsjer. Op grond van een aantal metingen is de grafiek van figuur 4 getekend. Deze grafiek staat ook op de bijlage. De grafiek geeft het verband weer tussen het aantal jaren T dat een plaats ijsvrij is en de diameter D van het korstmos op die plaats.

figuur 4



Een formule die dit verband bij benadering beschrijft, is:

$$D = 6,9\sqrt{T-12}$$

waarbij T = het aantal jaren dat de bodem vrij van ijs is
en D = de diameter van het korstmos in mm.

De grafiek van figuur 4 en de formule geven voor $T = 100$ verschillende diameters.

- 4p 10 Bereken hoeveel procent de diameter uit de formule afwijkt ten opzichte van de diameter uit de grafiek.

Eindexamen wiskunde A havo 1998-I

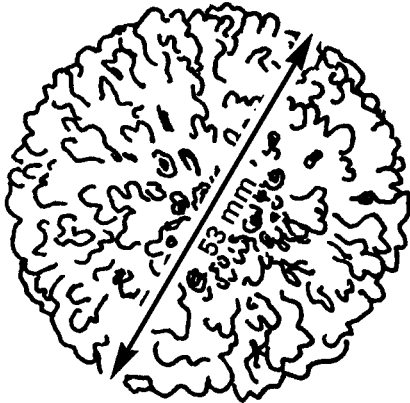
De formule $D = 6,9\sqrt{T-12}$ is eigenlijk onhandig, want in de praktijk meet men diameter D en wil men T weten. We gebruiken daarom liever de formule:

$$T = \left(\frac{D}{6,9}\right)^2 + 12$$

- 4p 11 Laat zien hoe vanuit de formule $D = 6,9\sqrt{T-12}$ deze formule kan worden gevonden.

Hieronder zie je een afbeelding van een korstmos op ware grootte.

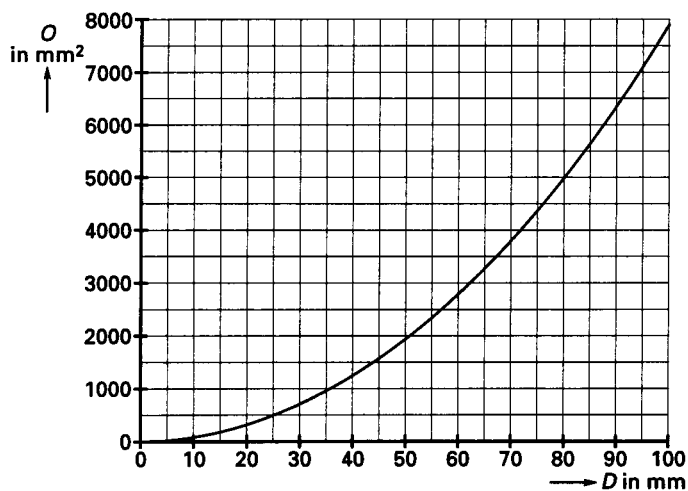
afbeelding



- 5p 12 Hoe lang zal het nog duren voor de diameter van dit korstmos verdubbeld is? Licht je werkwijze toe.

Omdat het korstmos in cirkelvorm groeit, is het vrij eenvoudig een grafiek te maken van het verband tussen de diameter D en de oppervlakte O van het korstmos. Zie figuur 5. Deze grafiek staat ook op de bijlage.

figuur 5



De formule bij deze grafiek is $O = 0,79D^2$

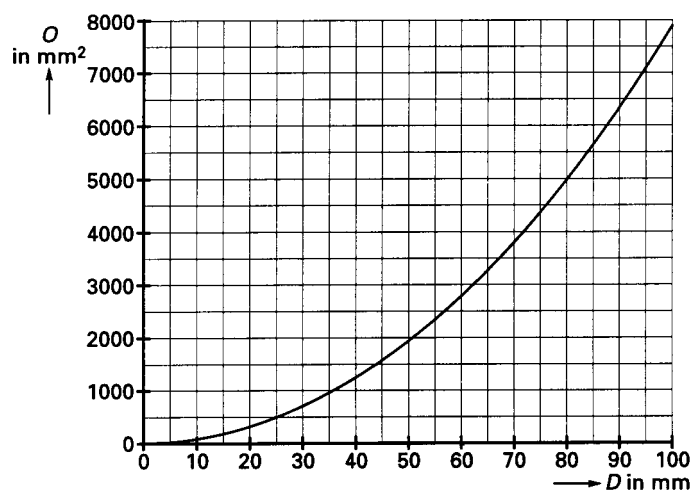
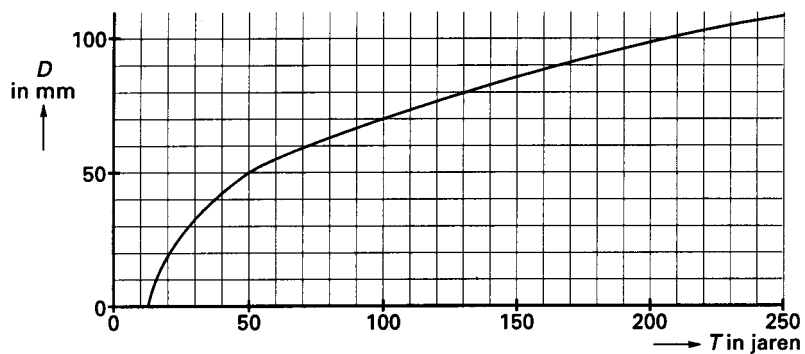
waarbij O = oppervlakte in mm^2
en D = diameter in mm.

We kijken naar het verband tussen O en T (T is het aantal jaren dat de bodem vrij van ijs is). Dat verband is lineair. We schrijven de formule in de vorm $O = aT + b$.

- 6p 13 Bereken a en b door gebruik te maken van de grafieken op de bijlage of de bijbehorende formules. Licht je werkwijze toe.

Bijlage bij opgave 3

Opgave 3



■ Opgave 4 Sesamstraat

Ernie heeft drie kaarten. Eén kaart is aan beide zijden rood, één kaart is aan beide zijden wit en de derde kaart is aan een kant rood en aan de andere kant wit.

Ernie stopt de kaarten in een hoge hoed en schudt. Zonder te kijken pakt hij er één uit en legt hem op tafel. De bovenkant van de kaart blijkt wit te zijn. Hij zegt tegen Bert: „Zullen we om een autootje wedden dat de onderkant ook wit is?”

Bert gaat op de weddenschap in. Hij denkt dat hij een even grote kans heeft om te winnen als Ernie omdat de kaart die op tafel ligt wit-wit of wit-rood moet zijn.

Bert verliest het spelletje. De kaart was aan de onderkant wit.

Maar Bert geeft niet zo snel op! Ze spelen een groot aantal spelletjes. Ernie beweert telkens dat de onderkant van de kaart dezelfde kleur heeft als de bovenkant. Bert beweert het tegendeel. En wat blijkt? Bert wint weliswaar wel eens een spelletje maar Ernie wint ongeveer twee keer zoveel spelletjes. Na verloop van tijd is Bert dan ook al zijn autootjes kwijt.

Het lijkt er op dat de kans dat Bert een spelletje wint $\frac{1}{3}$ is en de kans dat Ernie een spelletje wint $\frac{2}{3}$.

- 4p 14 Leg uit dat de kans dat Bert een spelletje wint, inderdaad $\frac{1}{3}$ is.

Nadat Bert begrepen heeft dat hij veel vaker verliest dan wint, moet Ernie een ander slachtoffer zoeken. Hij vindt Koekiemonster bereid. Ernie speelt op dezelfde manier tegen Koekiemonster als hij speelde tegen Bert. Steeds spelen ze een *serie* spelletjes waarbij ze beginnen met elk drie koekjes. De winnaar van een spelletje krijgt een koekje van de verliezer. Zodra een van de spelers geen koekjes meer heeft, is de serie afgelopen. Bij het spelverloop 'Ernie wint, Ernie wint, Koekiemonster wint, Ernie wint, Ernie wint' als voorbeeld, is de serie dus na 5 spelletjes afgelopen, omdat Koekiemonster door zijn koekjes heen is.

- 6p 15 Bereken de kans dat een serie al na drie spelletjes is afgelopen.

- 3p 16 Leg nauwkeurig uit waarom een serie nooit na precies vier spelletjes afgelopen kan zijn.

Ernie en Koekiemonster spelen dit spel dag in dag uit. In totaal spelen ze 193 series. Ze houden voortdurend bij wie er een serie wint en ook uit hoeveel spelletjes die serie bestaat. De resultaten daarvan staan in tabel 1. Zo zie je bijvoorbeeld dat 30 series na 7 spelletjes waren afgelopen. Koekiemonster won er daarvan 3 en Ernie 27. De langste serie duurde 33 spelletjes. Ernie won die serie uiteindelijk.

tabel 1

aantal spelletjes	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	29	33
Koekiemonster wint	7	9	3	3	1	1	0	0	0	0	1	0
Ernie wint	56	43	27	18	10	2	4	4	1	1	1	1
totaal	63	52	30	21	11	3	4	4	1	1	2	1

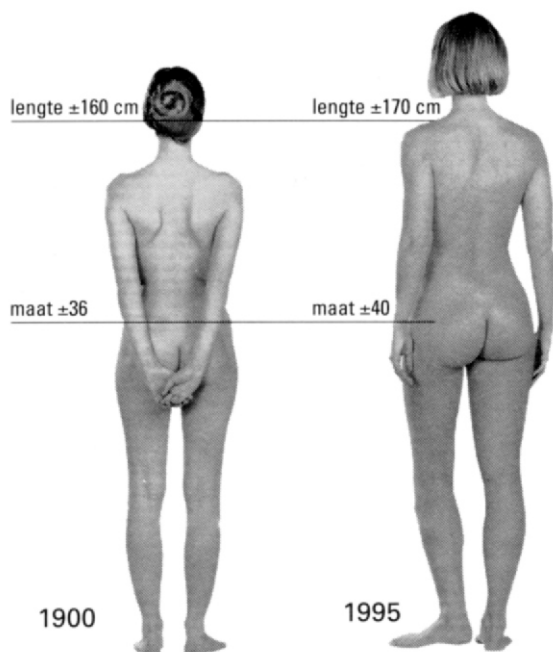
- 4p 17 Eén spelletje kost ongeveer 30 seconden. Gebruik de tabel om te berekenen hoeveel seconden een serie gemiddeld ongeveer duurt.

Opgave 5 Vrouwen worden steeds langer

In deze opgave bekijken we de lengte van Nederlandse vrouwen. In de loop van deze eeuw zijn de Nederlandse vrouwen steeds langer geworden. De confectie-industrie heeft deze ontwikkeling gevolgd. Dat heeft voor een bepaalde categorie vrouwen onprettige gevolgen gehad.

We nemen aan dat in elk jaar de lengte van vrouwen normaal verdeeld is.

foto



Bekend is dat in 1900 de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 160 cm was (zie foto) met een standaardafwijking van 5,7 cm.

- 5p 18 Bereken hoeveel procent van de vrouwen in dat jaar een lengte tussen 154 cm en 170 cm had.

De confectie-industrie richtte zich gedurende een lange periode op de vrouwen van 154 cm tot 170 cm. In 1960 vielen precies de 'middelste' 82% van de vrouwen in deze lengtematen. Dat wil zeggen dat 9% van de vrouwen kleiner was dan 154 cm en 9% groter was dan 170 cm.

De gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw was in 1960 dus toegenomen tot 162 cm. Ook de spreiding was iets groter geworden.

- 4p 19 Bereken de standaardafwijking van de lengte van de Nederlandse vrouw in 1960.

In 1995 is de gemiddelde lengte van de vrouwen in Nederland inmiddels 170 cm geworden met een standaardafwijking van 6,4 cm.

Hoewel de confectie-industrie zich in 1995 op een groter percentage richt, namelijk op de 'middelste' 90% van de vrouwen, doet zich toch een bijzonder verschijnsel voor. De vrouwen met een lengte van 154 cm tot 170 cm konden *in 1960* zonder problemen confectiekleding kopen. Onder deze vrouwen echter is er een categorie waarvan de lengte zo is dat ze *in 1995* niet meer zonder problemen confectiekleding kunnen kopen. De vrouwen uit deze categorie blijken in 1995 te klein voor confectiekleding.

- 4p 20 Welke lengten leidden in 1960 niet maar in 1995 wel tot problemen bij het kopen van confectiekleding? Licht je antwoord toe.