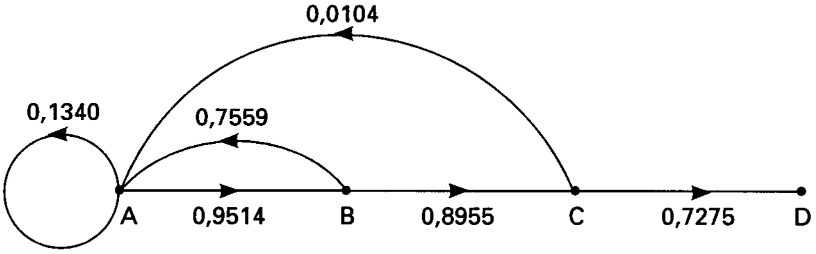
Opgave 1 Overleven

In een Amerikaans tijdschrift voor bevolkingsonderzoek stond een artikel over aantallen vrouwen in de Verenigde Staten. In dat artikel maakt men gebruik van een model waarbij vrouwen in vier leeftijdsgroepen verdeeld zijn, namelijk:
groep A: 0-19 jaar;
groep B: 20-39 jaar;
groep C: 40-59 jaar;
groep D: 60-79 jaar.
Vrouwen van 80 jaar en ouder worden buiten beschouwing gelaten.
Bij het model hoort de graaf van figuur 1.
In deze graaf staat bij de pijlen van A naar B, van B naar C en van C naar D welk gedeelte van de vrouwen van een bepaalde groep 20 jaar later nog in leven is en dan dus in de volgende groep zit.
Je kunt in deze graaf bijvoorbeeld aflezen dat 89,55% van de vrouwen in groep B 20 jaar later nog in leven is en dan dus in groep C zit. Zie de pijl van B naar C.
De getallen bij de pijlen vanuit de verschillende groepen naar A geven aan hoeveel dochters een vrouw gemiddeld krijgt gedurende de 20 jaar dat zij in een bepaalde groep zit. Zo is in figuur 1 bijvoorbeeld af te lezen, dat een vrouw gedurende de 20 jaar dat zij in groep B zit, gemiddeld 0,7559 dochters krijgt. Deze dochters komen natuurlijk in groep A, de groep van 0-19 jarigen. Zie de pijl van B naar A.

figuur 1



In dit model wordt dus gerekend met tijdseenheden van 20 jaar. Er wordt helemaal niet gelet op aantallen mannen/zonen. Bovendien wordt aangenomen dat de getallen in de graaf in de loop van de tijd niet veranderen.

Bij de graaf van figuur 1 kan een matrix opgesteld worden. Zie de bijlage.

4p 1 □ Vul de matrix op de bijlage verder in.

We bekijken een groep van 10000 pasgeboren vrouwen die dus allen in groep A zitten. We rekenen voor deze groep het model voor een aantal tijdseenheden door. De resultaten staan in tabel 1.

tabel 1

Aantallen vrouwen in de groepen A, B, C en D
(*t* is tijd in eenheden van 20 jaar)

t	A	B	C	D
0	10000			
1	1340	9514		
2	7371	1275	8520	
3	2040	7013	1142	6198
4	5586	1941	6280	831
5	2281	5315	1738	4569
6	4341	2170	4759	1264
7	2272	4130	1943	3462
8				
⋮				

4p **2** □ Bereken, uitgaande van de aantallen op $t = 7$, met behulp van de graaf of de matrix de aantallen in de groepen A, B, C en D op $t = 8$.

In dit model zijn ook de aantallen op $t = 25$ en $t = 35$ berekend. Zie tabel 2.

tabel 2

t	A	B	C	D
⋮				
25	720	761	716	585
⋮				
35	327	339	327	259

De procentuele verdeling van de vrouwen over de groepen A, B, C en D op $t = 25$ is: in A 26%, in B 27%, in C 26% en in D 21%.
Vanaf $t = 25$ blijkt deze procentuele verdeling nauwelijks te veranderen.

4p **3** □ Laat met een berekening zien dat op $t = 35$ de procentuele verdeling vrijwel gelijk is aan de procentuele verdeling op $t = 25$.

A_t is het aantal vrouwen in groep A op tijdstip t. Er geldt dus bijvoorbeeld: $A_{35} = 327$.
Vanaf $t = 35$ kan A_{t+1}, het aantal vrouwen in groep A op tijdstip $t + 1$, berekend worden door A_t te vermenigvuldigen met 0,923.
In formule:

$$A_{t+1} = 0{,}923 \cdot A_t$$

4p **4** □ Bereken, uitgaande van $A_{35} = 327$, hoe groot A_{50} is.

Bijlage bij de vragen 1 en 12

Vraag 1

matrix

van

naar

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} A & \quad B & \quad C & \quad D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}1340 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Opgave 2 Verplaatsingen

Mensen verplaatsen zich van de ene naar de andere plaats, vanwege werk, boodschappen, enzovoort. In 1984 heeft het Centraal Bureau voor de Statistiek onderzoek gedaan naar die verplaatsingen.
Daarbij werd zowel op de afstand als op de vervoerswijze gelet.
In tabel 3 staan resultaten van dat onderzoek. Hierin zijn de afstanden in klassen ingedeeld. In tabel 3 is bijvoorbeeld te zien dat van de 97 verplaatsingen in de categorie 'Autobestuurder' er 19 waren met een afstand tussen 1 en 2,5 km.

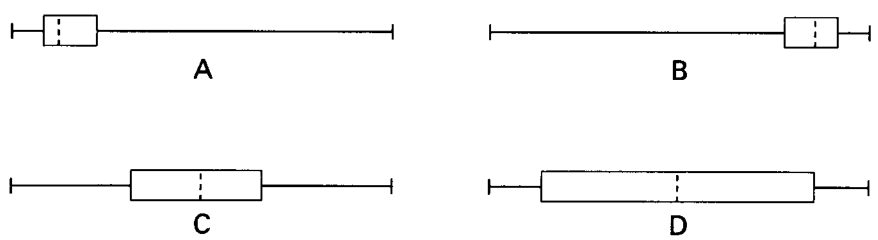
tabel 3 Verplaatsingen naar afstand en vervoerswijze

Afstand	Autobestuurder	Openbaar vervoer	Fietsen	Lopen
0 - 0,5 km	1	0	5	18
0,5 - 1 km	4	0	14	16
1 - 2,5 km	19	1	37	18
2,5 - 3,7 km	12	2	13	3
3,7 - 5 km	7	1	5	2
5 - 7,5 km	14	2	9	1
7,5 - 10 km	6	1	3	0
10 - 15 km	10	2	3	0
15 - 20 km	6	1	2	0
20 km of meer	18	6	0	0
Totaal	97	16	91	58

Stel dat in de categorieën 'Fietsen' en 'Lopen' van tabel 3 de waarnemingen binnen elke klasse gelijkmatig zijn verdeeld.

In figuur 2 zie je vier boxplots A, B, C en D.

figuur 2



4p **5** □ Welke van deze vier boxplots past het best bij de categorie 'Lopen'? Licht je antwoord toe.

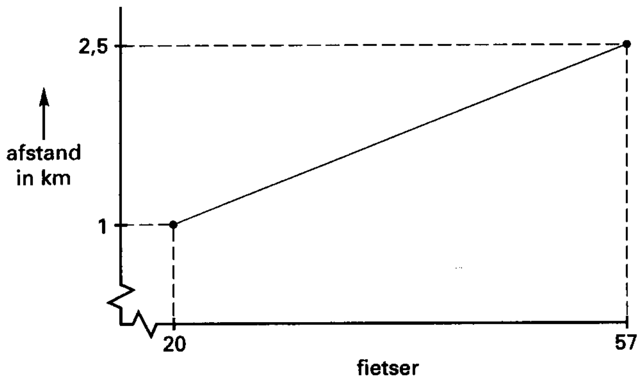
4p **6** □ Leg uit waarom de mediaan van de categorie 'Lopen' in de klasse 0,5 - 1 km ligt.

Bekijk nu de categorie 'Fietsen'.
De mediaan van deze categorie is de afstand die hoort bij fietser nummer 46.
Deze mediaan kan vrij nauwkeurig worden berekend.
In tabel 3 is af te lezen dat 5 + 14 = 19 fietsers minder dan 1 km hebben gereden en 5 + 14 + 37 = 56 fietsers minder dan 2,5 km. We nemen aan:

- bij fietser nummer 20 hoort de afstand 1 km;
- bij fietser nummer 57 hoort de afstand 2,5 km.

In figuur 3 zijn de fietsers en hun afstand in een grafiek weergegeven. Gemakshalve is niet voor elke fietser afzonderlijk een punt getekend, maar is een lijn getrokken.

figuur 3



5p 7 □ Bereken door lineair interpoleren de mediaan van de categorie 'Fietsen'.

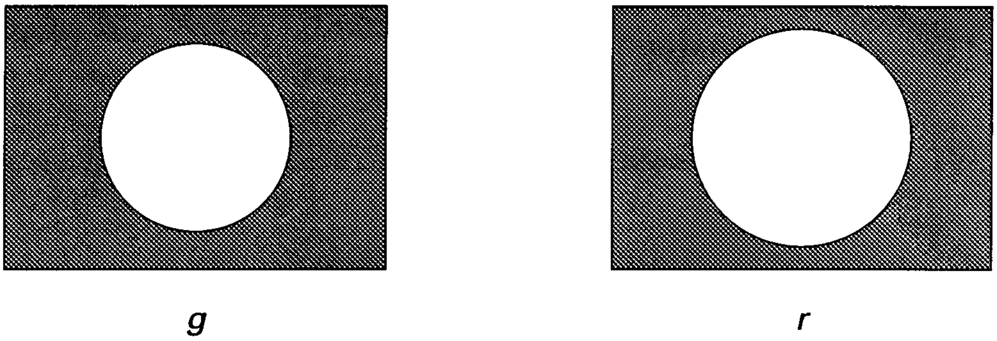
Als gegevens in klassen zijn ingedeeld, kan het gemiddelde niet precies worden berekend. Meestal gebruikt men de klassemiddens om een schatting van het gemiddelde te berekenen. Als in tabel 3 de waarnemingen gelijkmatig binnen hun klassen zijn verdeeld, zal de echte gemiddelde afstand vrijwel gelijk zijn aan die schatting. Liggen de waarnemingen echter voornamelijk links in hun klasse, dus aan het begin van elke klasse, dan zal de echte gemiddelde afstand kleiner zijn dan die schatting.

5p 8 □ Bereken de kleinste waarde van de echte gemiddelde afstand voor de categorie 'Autobestuurders' die mogelijk is. Licht je werkwijze toe.

Opgave 3 Verwarren van munten

Omdat guldens en rijksdaalders van hetzelfde materiaal zijn gemaakt en maar weinig in diameter verschillen, kunnen ze gemakkelijk met elkaar worden verward. Zie figuur 4.
In het volgende experiment speelt deze verwarring een rol.

figuur 4

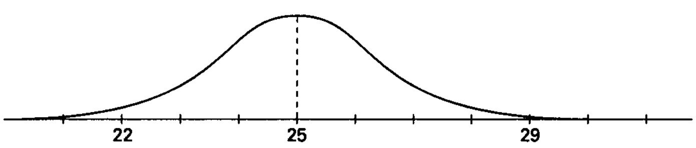


Proefpersonen krijgen op een beeldscherm een schijfje van 25 mm (de diameter van een gulden) of een schijfje van 29 mm (de diameter van een rijksdaalder) te zien. Na een aantal seconden verdwijnt het schijfje en moeten de proefpersonen zelf proberen op dat beeldscherm een even groot schijfje te maken. Iedere proefpersoon doet deze opdracht (het kijken naar een schijfje en het zelf maken van een schijfje) vijf keer achter elkaar.
Alle proefpersonen krijgen dus een rijtje van vijf schijfjes ter grootte van een gulden (g) of een rijksdaalder (r) te zien. Niet iedere proefpersoon krijgt hetzelfde rijtje.
Er wordt wel voor gezorgd dat in ieder rijtje minstens 2 guldens en minstens 2 rijksdaalders zitten. Het rijtje $r\ g\ r\ r\ g$ is dus mogelijk, maar het rijtje $g\ g\ g\ r\ g$ niet.

5p **9** □ Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk? Licht je antwoord toe.

De proefpersonen zullen niet altijd een schijfje maken dat even groot is als het schijfje dat op het beeldscherm getoond werd. Vaak is het gemaakte schijfje of kleiner of groter dan het getoonde schijfje. Als schijfje g wordt getoond, zijn de diameters van de gemaakte schijfjes vrijwel normaal verdeeld. Dat is ook het geval als schijfje r wordt getoond.
In figuur 5 zien we de normale verdeling die hoort bij schijfje g. Als schijfje g getoond wordt, dan is de gemiddelde diameter van de gemaakte schijfjes 25 mm. De bijbehorende standaardafwijking is 1,3 mm.

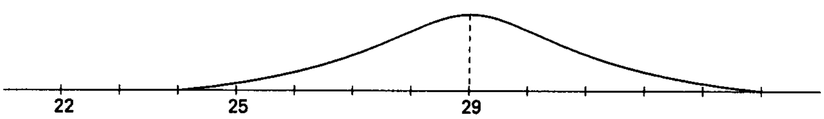
figuur 5



6p **10** □ Bereken hoeveel procent van de gemaakte schijfjes een diameter heeft, die minder dan 1 mm van het gemiddelde afwijkt.

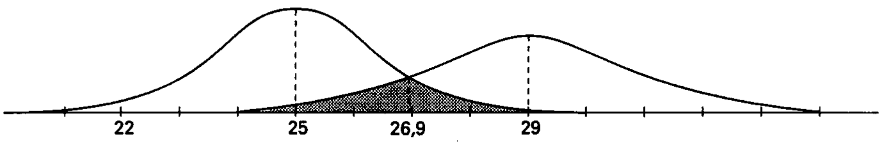
In figuur 6 is de normale verdeling afgebeeld die hoort bij schijfje r. De gemiddelde diameter van de gemaakte schijfjes is in dit geval 29 mm en de standaardafwijking is 1,8 mm.

figuur 6



Als de normale verdelingen uit figuur 5 en figuur 6 in één figuur worden getekend, overlappen ze elkaar gedeeltelijk. Deze overlap is gearceerd aangegeven in figuur 7.

figuur 7

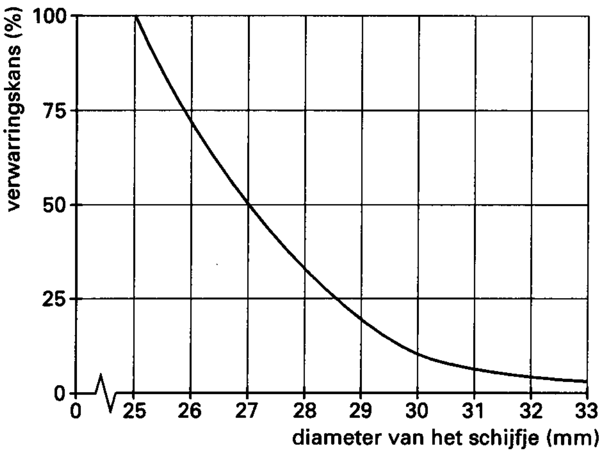


Zoals je ziet ligt het snijpunt van de twee krommen bij 26,9 mm. De oppervlakte van de overlap noemen de onderzoekers de *verwarringskans*.

7p **11** □ Bereken de verwarringskans.

Ook voor andere schijfjes met een diameter groter dan 25 mm is de verwarringskans ten opzichte van de gulden berekend. De resultaten hiervan zie je in figuur 8.

figuur 8



Uit figuur 8 is af te lezen: Hoe groter de diameter van een munt (schijfje), hoe kleiner de verwarringskans ten opzichte van de gulden. We willen de verwarringskans van de rijksdaalder (diameter = 29 mm) ten opzichte van de gulden halveren.

5p **12** □ Hoeveel mm zou de diameter van de rijksdaalder dan groter moeten worden? Licht je antwoord toe. Gebruik daarbij de figuur op de bijlage.

Om de verwarringskansen tussen munten van dezelfde vorm en kleur beperkt te houden, moeten de diameters van de munten een factor 1,3 of meer verschillen.

Dat geldt dus niet voor de gulden en de rijksdaalder, immers $\frac{29}{25} = 1{,}16$.

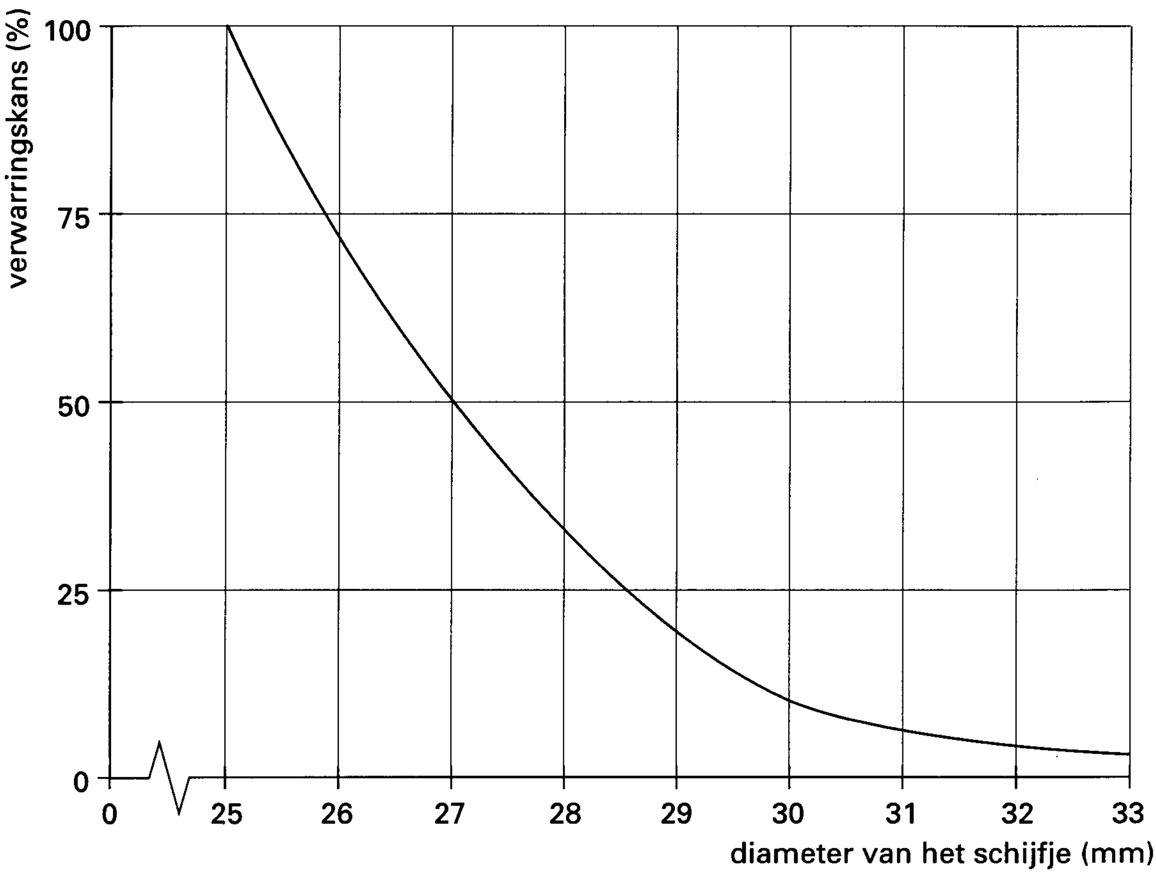
Een ontwerper krijgt de opdracht een nieuw muntstelsel te maken.
Hij moet zich daarbij houden aan de volgende vier eisen:

- de diameters van de munten mogen niet kleiner zijn dan 13 mm en niet groter dan 49 mm;
- de diameters van de munten in het nieuwe stelsel moeten een factor 1,3 (of meer) verschillen;
- het verschil in diameter tussen de munten in het nieuwe stelsel moet minstens 5 mm zijn;
- de diameter van elke munt moet een geheel aantal mm zijn.

4p **13** □ Ontwerp zelf een muntstelsel met *zoveel mogelijk* munten dat voldoet aan deze vier eisen. Geef daarbij de diameters van de verschillende munten.

Bijlage bij de vragen 1 en 12

Vraag 12



Opgave 4 Isoleren

Tijdens het stookseizoen verliest een huis warmte aan de omgeving.
We letten eerst op het warmteverlies via het dak van het huis.
Het ene dak isoleert beter dan het andere. Een maat voor dit isolatievermogen is de *warmteweerstand R*. Hoe groter de warmteweerstand R, des te kleiner is het warmteverlies.
Voor het warmteverlies V, uitgedrukt in kcal, via een dak geldt:

$$V = \frac{opp \cdot tijd \cdot \Delta Temp}{R}$$

waarbij *opp* = oppervlakte dak in m^2
tijd = tijd in uren
$\Delta Temp$ = temperatuurverschil in °C tussen 18 °C (stookgrens) en gemiddelde buitentemperatuur.

Een dak heeft een oppervlakte van 30 m^2.
De warmteweerstand R van dit dak is 0,5.
Het stookseizoen duurt 6000 uren.
Voor het gehele stookseizoen geldt dat de gemiddelde buitentemperatuur 12 °C is.
Verder is bekend dat 1 m^3 aardgas 6050 kcal levert.

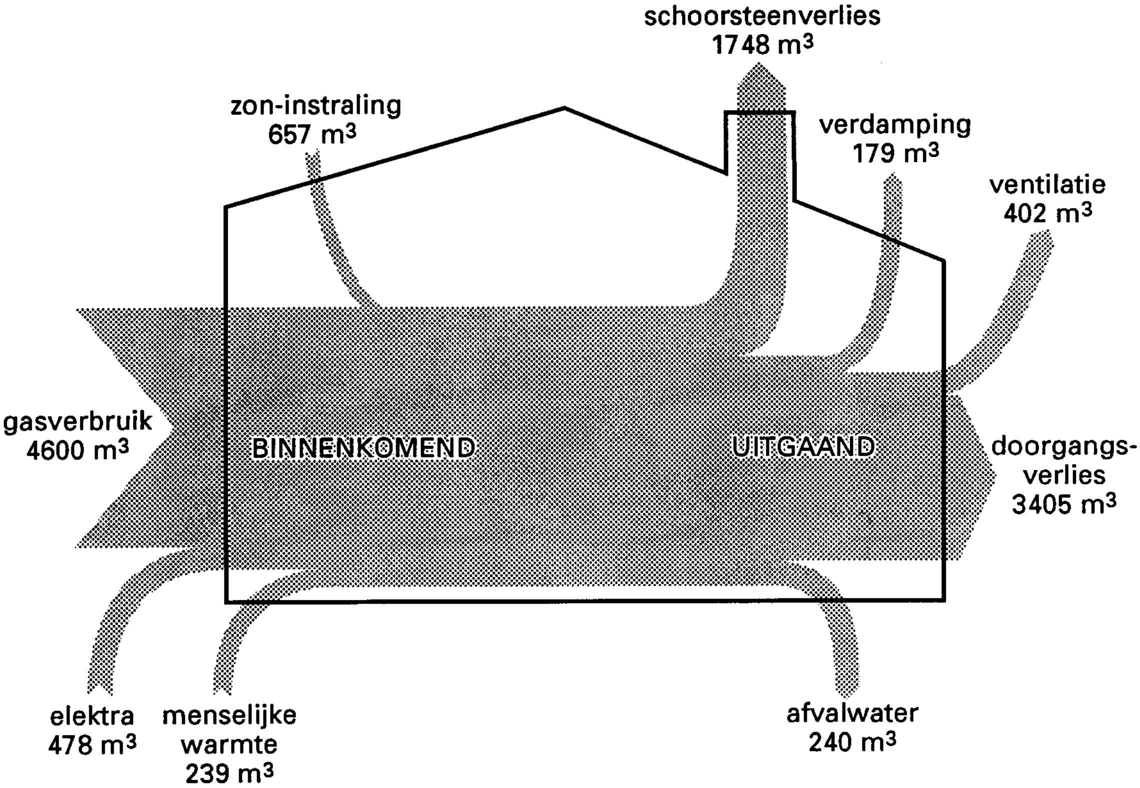
5p **14** □ Laat zien dat er door het warmteverlies via dit dak ongeveer 357 m^3 aardgas extra per stookseizoen verstookt moet worden.

Bij dit dak was R = 0,5. Om deze warmteweerstand R groter (dus het warmteverlies V kleiner) te maken, wordt dit dak met steenwoldekens geïsoleerd. De dikte van de steenwoldekens is bepalend voor de isolatie: iedere toegevoegde cm steenwoldekens zorgt er voor dat R met 0,25 toeneemt. Dankzij de steenwoldekens moet voor het warmteverlies V via het dak per stookseizoen nog maar 119 m^3 aardgas worden verstookt, dus slechts $\frac{1}{3}$ van de vroegere waarde.

5p **15** □ Bereken de dikte van de steenwoldekens.

In figuur 9 zie je de warmtebalans van een gemiddeld niet-geïsoleerd huis. Alle vormen van energie in deze warmtebalans zijn uitgedrukt in m^3 gas. In een warmtebalans is de hoeveelheid binnenkomende energie gelijk aan de hoeveelheid uitgaande energie. Alle getallen in figuur 9 zijn per jaar.

figuur 9



Het *doorgangsverlies* (zie figuur 9) is het verlies van warmte door muren, ramen, daken, vloeren, enzovoort.
Door betere isolatie kan dit doorgangsverlies met 55% verminderd worden. Daar staat tegenover dat de zon-instraling dan zal afnemen van 657 m^3 tot 600 m^3. Er ontstaat een nieuwe warmtebalans. Neem aan dat alle andere grootheden in figuur 9, op gasverbruik na, gelijk blijven.

5p **16** □ Met hoeveel m^3 zal het jaarlijks gasverbruik afnemen? Licht je antwoord toe.

Opgave 5 Jackpot

Bij de lotto worden iedere week willekeurig zes balletjes getrokken uit een glazen bol waarin 41 balletjes zitten. Deze balletjes zijn genummerd van 1 tot en met 41. De getallen op de zes balletjes worden daarna op volgorde (van klein naar groot) gezet en vormen de winnende zes getallen van de betreffende week. De volgorde waarin deze getallen uit de glazen bol gehaald zijn, speelt hierbij dus geen enkele rol.
Iedere deelnemer probeert deze zes getallen te voorspellen door het aankruisen van zes getallen in een kolom (met daarin de getallen 1 tot en met 41) op het lottoformulier.
Als de winnende zes getallen door één of meer deelnemers worden voorspeld, wordt de hoofdprijs uitgekeerd. We zeggen dan dat de *jackpot* valt.
Enige tijd geleden verscheen er een artikel in de krant over de jackpot. Hieronder volgt een citaat uit dat artikel:

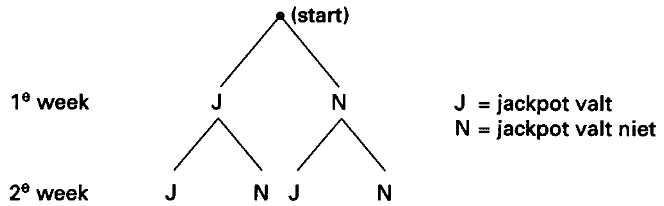
tekst

"Acht weken lang is de combinatie van zes getallen, goed voor de jackpot van de lotto, niet voorspeld. ... Als 500 000 mensen meedoen en er gemiddeld $4\frac{1}{2}$ kolom per deelnemer ingevuld wordt, dan is er 40% kans dat de jackpot in de eerstkomende week valt. De kans dat de jackpot in de eerste en/of de tweede week valt, is 64%. In de daaropvolgende weken stijgt de kans op het vallen van de jackpot tot respectievelijk 78%, 87%, 92% en 96%. De kans dat de jackpot gedurende deze zes weken niet valt, is 4%..."

In deze opgave controleren we een aantal zaken uit dit kranteartikel.
Neem aan dat de kans dat de jackpot in een bepaalde week valt, inderdaad 40% is.

We kijken twee weken vooruit. In figuur 10 zijn de verschillende mogelijkheden weergegeven.

figuur 10



5p 17 □ Laat zien, uitgaande van bovengenoemde 40%, dat de kans dat de jackpot in de eerste twee weken 1 of 2 keer valt, gelijk is aan 64%.

Vervolgens kijken we 6 weken vooruit.

5p 18 □ Bereken, weer uitgaande van bovengenoemde 40%, de kans dat de jackpot in de komende 6 weken één of meer keer valt.

Als de jackpot op een gegeven moment 8 weken achter elkaar niet is gevallen, denken sommige mensen dat de kans dat de jackpot valt groter wordt. Volgens het kranteartikel is hun redenering:

tekst

"De kans dat de jackpot 10 weken achter elkaar niet valt, is praktisch nul. Er zijn nu al acht weken voorbij waarin de jackpot niet gevallen is, dus zal de jackpot bijna zeker in één van de twee komende weken vallen."

4p 19 □ Ben je het eens met deze redenering in het artikel? Licht je antwoord toe.