

■ Opgave 1 Verwarming

De woningen in een flatgebouw worden centraal verwarmd. Jaarlijks moeten de bewoners de verwarmingskosten gezamenlijk betalen. In verband hiermee wordt met metertjes op de radiatoren per woning geregistreerd hoeveel warmte-eenheden zijn verbruikt. Bij de jaarlijkse afrekening let men ook op het vloeroppervlak van elke woning; de woningen zijn niet allemaal even groot.

In een zeker jaar zijn de kosten:

Totale energiekosten TE (kosten van het gas) f 37760,-

Overige kosten OV (onderhoud en afschrijving) f 3810,-

In alle woningen samen zijn 2360 warmte-eenheden verbruikt.

Het vloeroppervlak van alle woningen samen is 5936 m^2 .

De kosten worden op een speciale manier aan de bewoners doorberekend:

- 70% van de totale energiekosten wordt verdeeld over de verbruikte warmte-eenheden;
- de rest van de totale energiekosten en de overige kosten worden verdeeld op basis van het vloeroppervlak van de woningen.

- 5 p 1 Toon aan dat de kosten per verbruikte warmte-eenheid f 11,20 en de kosten per m^2 vloeroppervlak f 2,55 bedragen.

Een bewoner met een flat waarin W warmte-eenheden verbruikt worden en waarvan de vloeroppervlakte $V \text{ m}^2$ is, zal zijn verwarmingskosten K met behulp van de volgende formule kunnen berekenen:

$$K = 11,20W + 2,55V \quad (\text{formule 1}).$$

Er komt een voorstel van de flatbewoners om dat jaar niet 70% van de totale energiekosten TE over de verbruikte warmte-eenheden te verdelen maar 90%. De overige 10% van de totale energiekosten zullen dan, samen met de overige kosten OV, naar vloeroppervlak verdeeld worden. Formule 1 zal dan aangepast moeten worden.

- 5 p 2 Maak een bijbehorende, nieuwe formule. Licht je werkwijze toe.

De formule van vraag 2 noemen we formule 2. Formule 2 betekent niet voor iedere bewoner een verandering in de verwarmingskosten K .

Als de formules 1 en 2 dezelfde uitkomst geven, bestaat tussen V en W het volgende verband: $V = 2,52W$

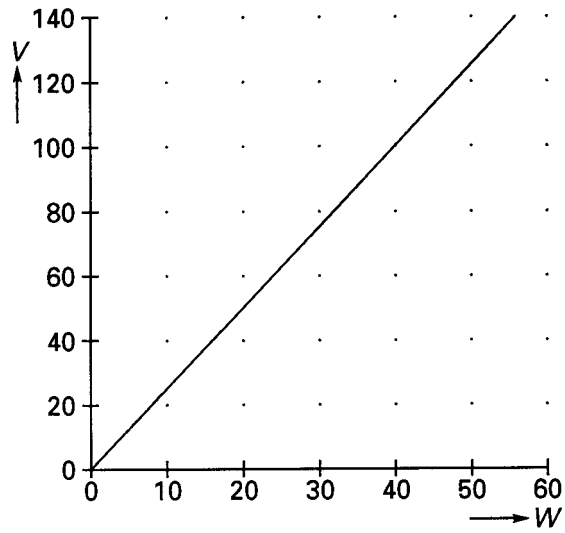
- 4 p 3 Toon dit aan.

In de figuur op de bijlage is de grafiek van $V = 2,52W$ getekend.

De woningen variëren in vloeroppervlakte van 90 m^2 tot 115 m^2 . De hoeveelheden verbruikte warmte-eenheden lopen van 30 tot 55. We kijken naar de situaties waarin met de nieuwe formule 2 lagere verwarmingskosten moeten worden betaald dan met formule 1.

- 5 p 4 Arceer in de figuur op de bijlage het gebied met deze situaties. Licht je werkwijze toe.

Vraag 4



Opgave 2 Samenlevingen

In de archeologie probeert men aan de hand van opgravingen na te gaan hoe vroegere samenlevingsvormen er uit gezien hebben en hoe ze veranderd zijn.

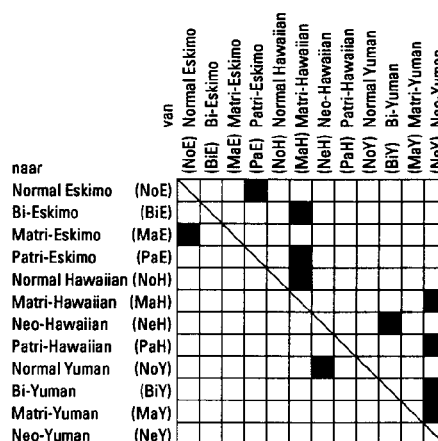
Samenlevingsvormen verschillen van elkaar als bijvoorbeeld economische of godsdienstige kenmerken anders zijn: denk daarbij bijvoorbeeld aan goud als ruilmiddel in tegenstelling tot het gebruik van papiergeld, veelgodendom tegenover aanbidding van een enkele god.

De ene samenlevingsvorm kan overgaan in een andere. Murdock heeft voor een aantal samenlevingsvormen onderzoek gedaan naar hun mogelijke opvolgers. In figuur 1 heeft hij zijn resultaten samengevat. Je kunt daar bijvoorbeeld aflezen dat de samenlevingsvorm Matri-Hawaiian kan overgaan in één van de drie samenlevingsvormen: Bi-Eskimo, Patri-Eskimo of Normal Hawaiian. Van deze drie heeft alleen Patri-Eskimo een mogelijke opvolger die in dit schema voorkomt, namelijk Normal Eskimo.

Het schema van figuur 1 is op te vatten als een matrix:

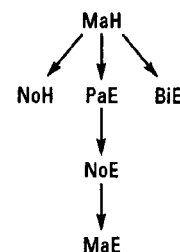
een zwart blokje staat voor 1, er is een directe opvolging mogelijk; een wit blokje staat voor 0, er is geen directe opvolging mogelijk.

We bekijken eerst een deel van figuur 1. Dit gedeelte geven we weer in de onderstaande matrix (M); naast de matrix is de bijbehorende graaf getekend.



matrix en graaf

| | | | | | | | |
|------|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | van | | | | | |
| | | NoE | BiE | MaE | PaE | NoH | MaH |
| naar | Normal Eskimo (NoE) | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | Bi-Eskimo (BiE) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | Matri-Eskimo (MaE) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Patri-Eskimo (PaE) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | Normal Hawaiian (NoH) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | Matri Hawaiian (MaH) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |



Als matrix M met zichzelf vermenigvuldigd wordt, ontstaat matrix M^2 .

4 p 5 □ Schrijf matrix M^2 op.

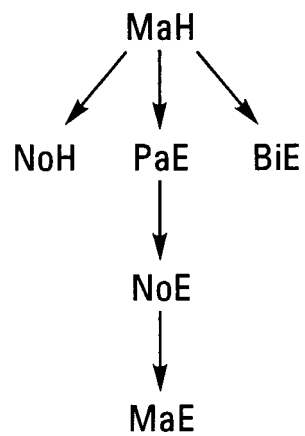
Een samenlevingsvorm A wordt een niet-directe opvolger van samenlevingsvorm B genoemd als A wel in de keten van opvolgers van B zit, maar niet direct op B volgt. Bijvoorbeeld: $B \rightarrow \dots \rightarrow A$ of $B \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow A$. Om enig inzicht te krijgen in de niet-directe opvolging van samenlevingsvormen kan men de matrices M^2 , $M^3 (= M \cdot M \cdot M)$, enzovoorts bekijken. De matrix M^3 heeft nog slechts op één plaats een getal dat niet gelijk is aan 0.

4 p 6 □ Leg uit op welke plaats in de matrix M^3 dit getal staat en hoe groot dit getal is.

We gaan terug naar figuur 1. Figuur 1 is niet in een oogopslag te doorzien. De graaf die bij matrix M gemaakt is, biedt veel duidelijker een overzicht van alle mogelijke overgangen tussen de diverse samenlevingsvormen die in M vermeld staan. De graaf op de bijlage is een deel van de complete graaf die bij figuur 1 hoort.

4 p 7 □ Breid de graaf op de bijlage zo uit dat alle samenlevingsvormen en alle mogelijke overgangen die in figuur 1 genoemd worden, in deze graaf komen te staan.

Vraag 7



■ Opgave 3 Archeologie en modellen

Aan de hand van opgravingen kan men soms te weten komen welke overgangen van samenlevingsvormen hebben plaatsgevonden. Daarbij blijken er soms verschillende mogelijkheden te bestaan. De vorige opgave liet daar een voorbeeld van zien.

Neem nu aan dat ook nog iets bekend is over de kans dat de ene samenlevingsvorm overgaat in een andere. Deze opgave gaat over mogelijke modellen voor overgangen van samenlevingsvormen.

In het eerste model van deze opgave beperken we ons tot vier samenlevingsvormen a, b, c en d waarvan de overgangskansen in de matrix van figuur 2 staan:

figuur 2

| | | van | | | |
|------|---|-----|-----|-----|---|
| | | a | b | c | d |
| naar | a | 0 | 0,1 | 0 | 1 |
| | b | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0 |
| | c | 0,6 | 0,2 | 0,1 | 0 |
| | d | 0,1 | 0,3 | 0,7 | 0 |

In deze matrix kun je bijvoorbeeld aflezen dat de kans dat samenlevingsvorm a in samenlevingsvorm d overgaat 0,1 is. Ook kun je zien dat samenlevingsvorm c niet in samenlevingsvorm a kan overgaan.

Samenlevingsvorm b kan *in twee stappen* overgaan in samenlevingsvorm d, bijvoorbeeld via a. Ook de kans op een overgang in twee stappen kan met behulp van de matrix van figuur 2 worden bepaald.

6 p 8 □ Bereken de kans dat c in twee stappen over zal gaan in a.

We breiden ons model uit. We bekijken nu zes samenlevingsvormen a tot en met f. Er zijn drie overgangen R_1 , R_2 en R_3 die na elkaar plaatsvinden. De verschillen in de overgangen R_1 tot en met R_3 worden veroorzaakt door omstandigheden die in de loop van de tijd veranderen. Denk daarbij bijvoorbeeld aan klimaatveranderingen of het doen van uitvindingen. In figuur 3 staan de overgangskansen bij de overgangen R_1 , R_2 en R_3 . (In R_1 vinden we dezelfde kansen terug als in de matrix van figuur 2.)

Eindexamen wiskunde A havo 1995-II

figuur 3

| | | | | | | |
|-------|---|------|-----|-----|-----|-----|
| | | van | a | b | c | d |
| | | naar | a | b | c | d |
| R_1 | { | a | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 1,0 |
| | | b | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,0 |
| | | c | 0,6 | 0,2 | 0,1 | 0,0 |
| | | d | 0,1 | 0,3 | 0,7 | 0,0 |

| | | | | | | |
|-------|---|------|-----|-----|-----|-----|
| | | van | a | b | c | d |
| | | naar | b | c | d | e |
| R_2 | { | b | 0,5 | 0,1 | 1,0 | 0,1 |
| | | c | 0,3 | 0,3 | 0,0 | 0,5 |
| | | d | 0,0 | 0,4 | 0,0 | 0,4 |
| | | e | 0,2 | 0,2 | 0,0 | 0,0 |

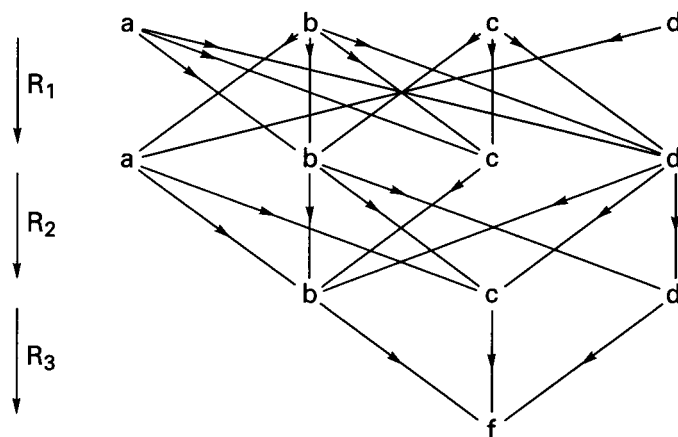
| | | | | | | |
|-------|---|------|-----|-----|-----|-----|
| | | van | b | c | d | e |
| | | naar | d | e | f | |
| R_3 | { | d | 0,1 | 0,2 | 0,0 | 0,0 |
| | | e | 0,8 | 0,6 | 0,3 | 1,0 |
| | | f | 0,1 | 0,2 | 0,7 | 0,0 |

4 p 9 □ Bereken de kans op het traject

$$\begin{array}{cccc}
 R_1 & R_2 & R_3 & \\
 b \rightarrow & d \rightarrow & c \rightarrow & f
 \end{array}$$

In figuur 4 zie je alle mogelijke trajecten om na de drie overgangen R_1 tot en met R_3 van de 'beginsamenlevingsvormen' a, b, c en d in samenlevingsvorm f te komen.

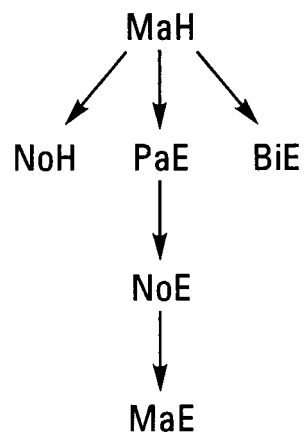
figuur 4



6 p 10 □ Bereken de kans om van d via de drie overgangen R_1 , R_2 en R_3 naar f te komen.

4 p 11 □ Hoeveel verschillende trajecten zijn er om van de 'beginsamenlevingsvormen' a, b, c en d na de drie overgangen R_1 , R_2 en R_3 in samenlevingsvorm f te komen? Licht je werkwijze toe.

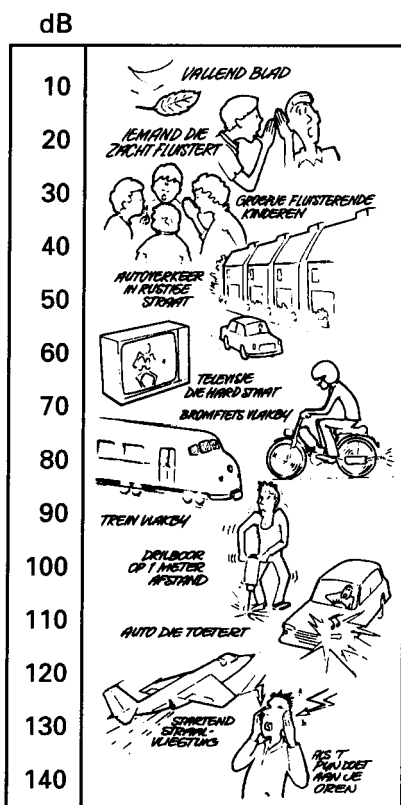
Vraag 7



Opgave 4 Geluid

Geluid wordt vaak gemeten in decibels (dB). Het zwakste geluid dat een persoon met normaal gehoor kan waarnemen heeft een geluidsniveau van 0 dB. Het geluidsniveau van een gesprek tussen twee personen is ongeveer 50 dB. Het geluidsniveau van een straalvliegtuig is ongeveer 120 dB.

afbeelding



Het geluidsniveau zal in de praktijk vaak variëren. Met behulp van geluidsniveaumeters kan men dit op ieder moment meten. Gedurende een zekere periode heeft men dat op een drietal plaatsen P, Q en R gedaan.

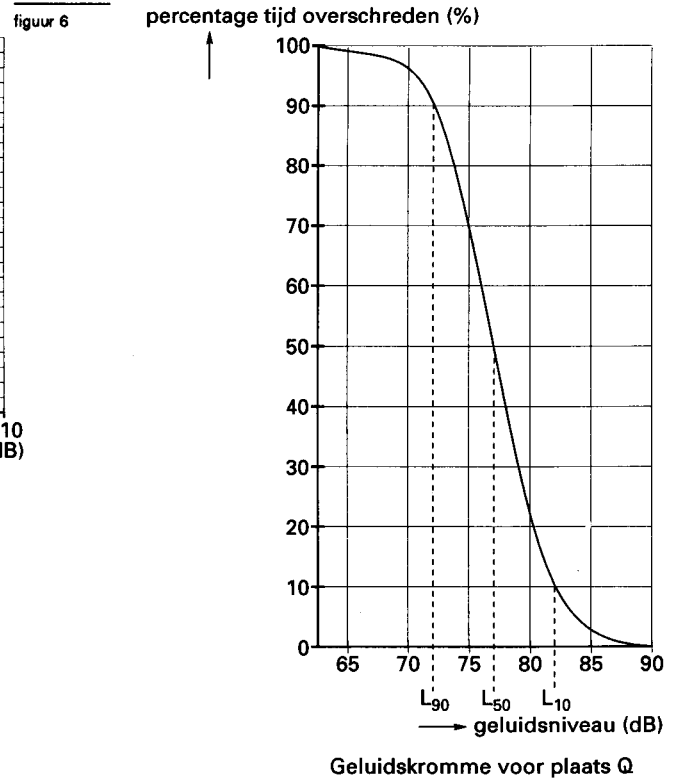
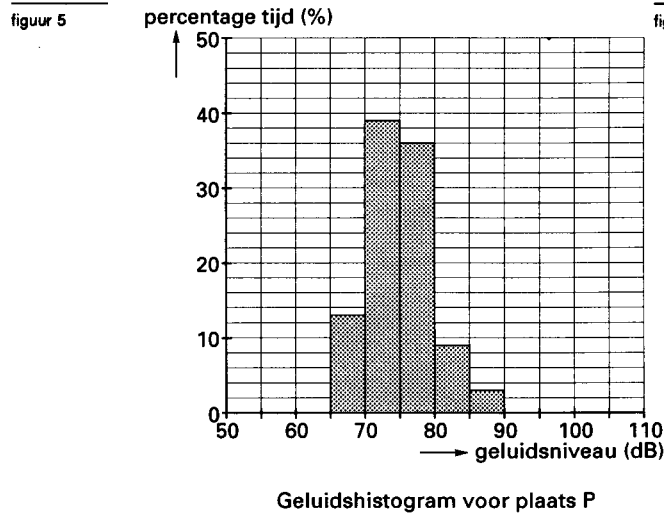
Van de metingen bij P heeft men een *geluidshistogram* gemaakt (zie figuur 5). In dat histogram is bijvoorbeeld af te lezen dat gedurende 13% van de tijd het geluidsniveau tussen 65 dB en 70 dB lag.

Van de metingen bij Q heeft men een *geluidskromme* gemaakt (zie figuur 6).

In deze figuur is onder andere af te lezen dat gedurende 21% van de tijd het geluidsniveau van 80 dB werd overschreden: we zeggen dan dat $L_{21} = 80$ dB.

Zo is ook af te lezen dat 70% van de tijd het geluidsniveau hoger is dan 75 dB. We zeggen dan dat $L_{70} = 75$ dB.

Op dezelfde manier kunnen ook andere L -waarden omschreven worden. In figuur 6 zijn voor plaats Q op de horizontale as L_{90} , L_{50} en L_{10} apart aangegeven.



Op grond van de gegevens in figuur 5 kan voor plaats P net zo'n soort geluidskromme als in figuur 6 gemaakt worden.

- 6 p 12 Bepaal eerst voor een aantal geluidsniveaus hoeveel procent van de tijd deze worden overschreden en teken vervolgens op de bijlage de geluidskromme voor plaats P.

Voor plaats R geldt dat het geluidsniveau bij benadering normaal verdeeld is. Het gemiddelde geluidsniveau is 75 dB en de standaardafwijking is 14 dB.

- 6 p 13 Toon aan dat voor plaats R geldt $L_{10} = 93$ dB.

Om situaties met een steeds variërend geluidsniveau te kunnen vergelijken, gebruikt men vaak een denkbeeldig constant geluidsniveau L_{eq} dat eenzelfde belasting (equivalente belasting) voor het menselijk oor heeft als het variërende geluid.

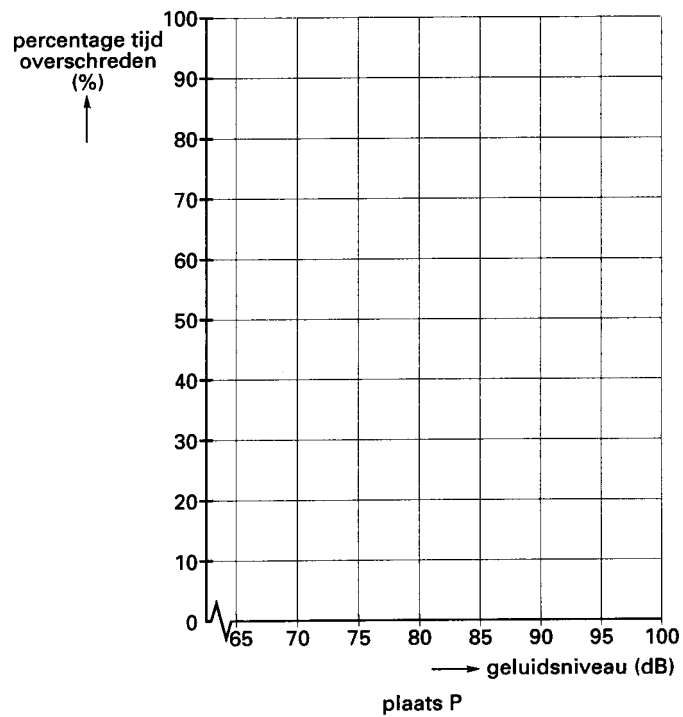
L_{eq} wordt met de volgende formule berekend:

$$L_{eq} = L_{50} + 0,43(L_{10} - L_{50})$$

Van de plaatsen Q en R zijn L_{10} en L_{50} bekend (zie figuur 6 en vraag 13).

- 6 p 14 Onderzoek welke van de twee plaatsen Q en R de grootste L_{eq} heeft.

Vraag 12



Opgave 5 Wandelen

foto



Hierboven zie je de voetafdrukken van een wandelaar op het strand. Als een wandelaar met constante snelheid loopt, is de afstand tussen twee opeenvolgende hielaafdrukken, de staplengte S , steeds even groot.

Natuurlijk loopt niet iedere wandelaar even snel. Wel blijkt uit onderzoek dat de verhouding tussen staplengte en stapfrequentie (aantal stappen per tijdseenheid) constant is.

Voor mannen geldt de vuistregel: $\frac{n}{S} = 140$

waarbij n = het aantal stappen per minuut
 S = staplengte in meters

Van een wandelaar is gemeten dat hij 150 meter in 100 seconden loopt, terwijl hij daar 187 stappen voor nodig heeft.

5 p 15 Bereken voor deze persoon n en S en laat zien dat de vuistregel klopt.

Een man heeft een staplengte van 0,85 meter.

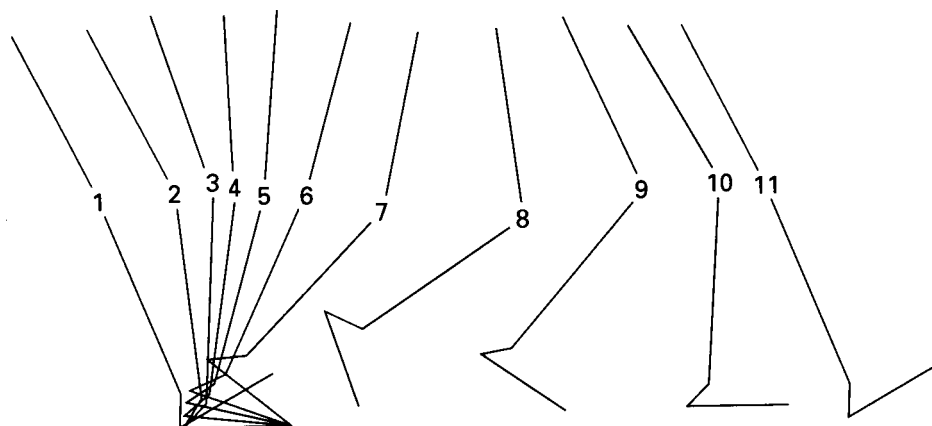
5 p 16 Bereken zijn snelheid in meter per minuut en ook in km per uur.

4 p 17 Laat zien dat, uitgaande van de vuistregel, voor de snelheid v (in km per uur) van een wandelaar de volgende formule geldt:

$$v = 8,4 \cdot S^2$$

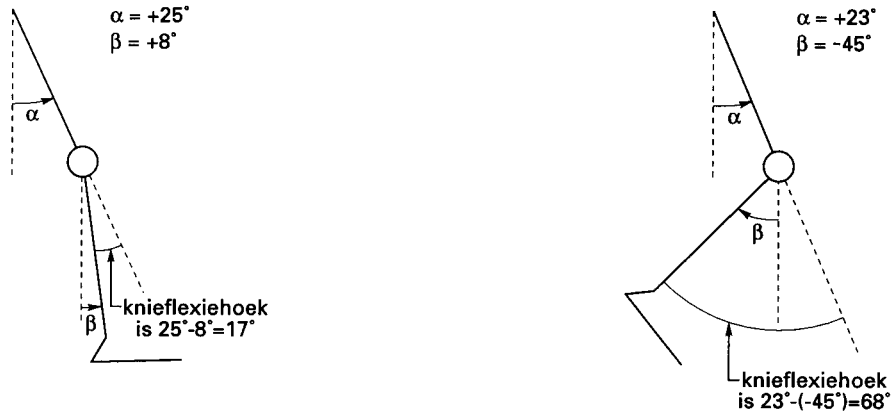
In figuur 7 zie je een volledige beweging van het rechterbeen weergegeven. De stand van het been in positie 11 is weer gelijk aan de stand in positie 1.

figuur 7



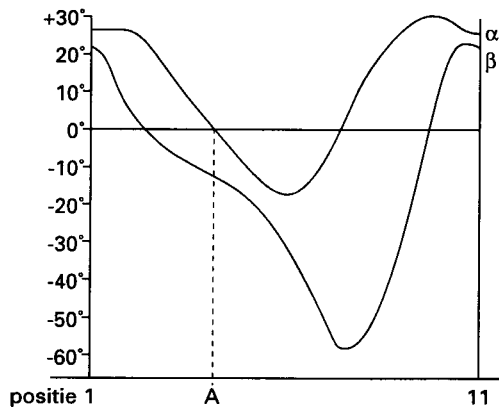
De hoek van het bovenbeen met een verticale lijn noemen we α . De hoek van het onderbeen met een verticale lijn noemen we β . Een uitwijking naar rechts geeft een positieve hoek en een uitwijking naar links een negatieve hoek. De hoek tussen onder- en bovenbeen noemen we de knieflexiehoek. De knieflexiehoek is gelijk aan $\alpha - \beta$. Zie figuur 8.

figuur 8



In figuur 9 zijn de grafieken van α en β getekend voor een volledige beweging van het rechterbeen. Het begin van de grafiek correspondeert met positie 1 uit figuur 7, het eind met positie 11.

figuur 9



- 4 p 18 Bepaal met behulp van figuur 9 de grootste waarde van de knieflexiehoek. Licht je werkwijze toe.
- 4 p 19 Teken de stand van het rechterbeen in positie A (zie figuur 9). Licht je werkwijze toe.