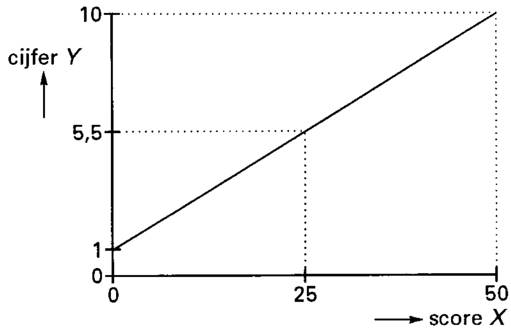
Opgave 1 Scores en cijfers

Bij toetsen met 50 meerkeuzevragen wordt geteld hoeveel vragen een kandidaat goed heeft. Dit aantal noemt men de score X.
Hierna wordt de score X omgezet in een cijfer Y. Een kandidaat die niets goed heeft, krijgt altijd een 1, dus bij $X = 0$ hoort $Y = 1$. Wie alle vragen goed beantwoord heeft, krijgt natuurlijk een 10: bij $X = 50$ hoort $Y = 10$.

Stel dat er een lineair verband bestaat tussen X en Y. Zie figuur 1. Voor het gemak is er een lijn getekend in plaats van losse punten.
Een kandidaat heeft 35 vragen goed.

4p 1 □ Bereken het bijbehorende cijfer Y in 1 decimaal nauwkeurig.

figuur 1



Bij het cijfer 5,5 ligt de omslag van voldoende naar onvoldoende.
Daarom noemen we de score waarbij het cijfer 5,5 hoort, de *omslagscore.*
Meestal zal de omslagscore bij $X = 25$ liggen. Dit is ook het geval in figuur 1.

Soms is de omslagscore niet 25. Er is dan sprake van een verschuiving V.
Op de bijlage is twee keer een verband tussen X en Y getekend bij een verschuiving.
De ene grafiek hoort bij een te moeilijke toets: bij 18 vragen goed krijg je al een 5,5.
De verschuiving is in dit geval negatief: $V = -7$.
De andere grafiek hoort bij een toets met gemakkelijke vragen: voor een 5,5 moeten nu 29 vragen goed beantwoord zijn. Daar is $V = 4$.
De grafiek bestaat na een verschuiving V altijd uit twee (rechte) lijnstukken.

Bij een zekere toets behaalt een leerling met 40 goed beantwoorde vragen het cijfer $Y = 7{,}5$.

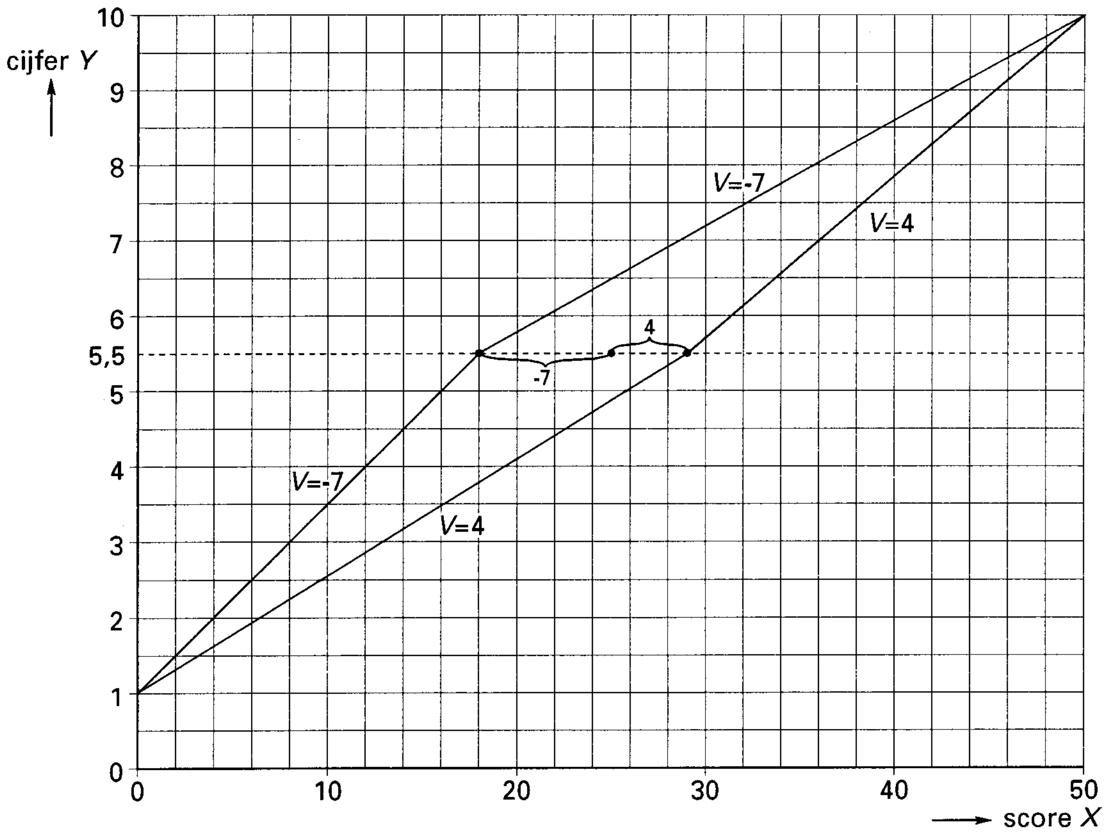
4p 2 □ Bepaal met behulp van de bijlage hoe groot de verschuiving V is. Laat zien hoe het antwoord gevonden is.

Stel dat een leerling 35 vragen goed beantwoord heeft en dat vooraf vaststaat dat de verschuiving die kan plaatsvinden van $V = 0$ tot en met $V = 4$ mag lopen.

5p 3 □ Kan deze leerling het cijfer 6,6 behalen? Licht je antwoord toe.

Bijlage bij opgave 1

Opgave 1



Opgave 2 Wijn proeven

Bij het examen voor *vinoloog* (wijnkenner) moeten de kandidaten wijnen herkennen door te proeven. Uit een artikel komt de volgende tekst.

tekst

'De examenkandidaten hebben zich een jaar lang op deze proeverij voorbereid. Het zijn bijna allemaal vaklui: restauranteigenaars, wijnimporteurs, slijters.
De opdracht lijkt simpel: combineer de 12 op het papier genoemde wijnen met het juiste glas. Om te slagen, wordt genoegen genomen met 9 juiste combinaties. Dat dit in de praktijk een hels karwei is, blijkt wel uit het geringe aantal kandidaten dat succesvol is: gemiddeld zo'n 30 procent.'

In deze opgave kijken we naar de kans dat iemand die helemaal geen verstand van wijnen heeft het examen haalt. Omdat hij uitsluitend gokt, noemen we hem een gokker. Er staan, volgens bovenstaande tekst, 12 glazen met wijn op tafel. Iedere deelnemer krijgt 12 kaartjes met de namen van die wijnen. De opdracht is: leg bij elk glas het goede kaartje. De gokker legt zijn kaartjes dus in willekeurige volgorde bij de verschillende glazen.

3p 4 □ Op hoeveel verschillende manieren kan de gokker de kaartjes neerleggen?

Om het iets gemakkelijker te maken, heeft de examencommissie de 12 wijnen in 4 groepjes van 3 verdeeld. Bij elk groepje liggen 3 kaartjes met de namen van die 3 wijnen (zie figuur 2). De opdracht aan de kandidaat is om bij elk groepje de kaartjes bij het juiste glas te leggen.

figuur 2

Bij één groepje van 3 wijnen en bijbehorende kaartjes kan voor de gokker de volgende kansentabel opgesteld worden:

tabel 1

aantal goed neergelegde kaartjes	0	1	2	3
kans op dat aantal	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

5p 5 □ Leg uit dat de kans op 2 goed neergelegde kaartjes 0 is en dat de kans op 3 goed neergelegde kaartjes $\frac{1}{6}$ is.

4p 6 □ Bereken de kans dat de gokker in deze situatie (4 groepjes van 3) alle 12 kaartjes goed neerlegt.

In figuur 3 is een mogelijk verloop van het examen in beeld gebracht. Het is de 'route' 3 - 1 - 0 - 3 met in totaal 7 goed geraden wijnen.

figuur 3

aantal goed neergelegde kaartjes	eerste drietal	tweede drietal	derde drietal	vierde drietal
	0	0	0	0
	1	1	1	1
	3	3	3	3

Om te slagen moeten er minstens 9 wijnen goed geraden worden.

5p 7 □ Schrijf alle routes op met 9 of meer goed geraden wijnen.

6p 8 □ Bereken de kans dat een gokker slaagt.

Opgave 3 Ziek zijn

Om enig inzicht te krijgen in het verloop van het aantal zieken in bedrijven, gebruikt men wiskundige modellen. In deze opgave gaan we uit van een bedrijf met 1000 werknemers.

We bekijken eerst een eenvoudig model. Er zijn 2 categorieën: gezond (G) en ziek (Z). Iedere maandag wordt het aantal zieken en gezonden geteld. In dit model gaan we er van uit dat zich iedere week het volgende patroon voordoet:
81% van de zieken op een bepaalde maandag is een week later weer gezond;
19% van de zieken blijft ziek;
7% van de gezonden op maandag is een week later ziek;
93% van de gezonden blijft gezond.
Deze gegevens vinden we terug in matrix M.

$$M: \quad \begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cc} G & Z \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} G \\ Z \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}81 \\ 0{,}07 & 0{,}19 \end{pmatrix} \end{array}$$

We nemen aan dat de getallen in deze matrix voor iedere week gelden.

Op een bepaalde maandag, 9 februari, blijken er 900 gezonden en 100 zieken te zijn. We willen weten hoeveel zieken er precies één week eerder, dus op maandag 2 februari, volgens dit model waren. Iemand denkt dat er toen, op 2 februari, 880 gezonden en 120 zieken waren.

5p 9 □ Laat met een berekening zien dat deze persoon geen gelijk kan hebben.

4p 10 □ Bereken hoeveel van de 1000 werknemers er op maandag 2 februari ziek waren.

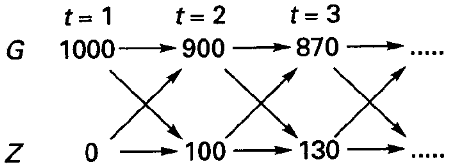
Het maken van een passend wiskundig model is een lastige zaak. Meestal heeft men slechts de beschikking over een tabel waarin voor een aantal opeenvolgende weken de aantallen gezonde en zieke werknemers staan. Zie tabel 2.

tabel 2

tijd t in weken	1	2	3	4	5	6
aantal gezonde werknemers G	1000	900	870	867	874	884
aantal zieke werknemers Z	0	100	130	133	126	116

Een deel van deze gegevens vind je ook terug in figuur 4.

figuur 4



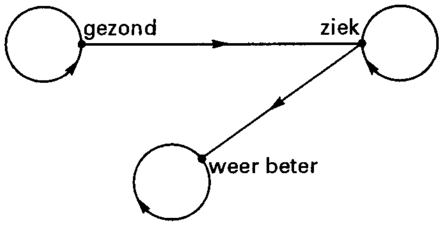
Het is mogelijk om op grond van de gegevens op $t = 1$, $t = 2$ en $t = 3$ een eenvoudig model zoals het model met matrix M te maken. Daarbij wordt er in het geheel niet gelet op de gegevens na $t = 3$.

4p 11 □ Maak met de gegevens op $t = 1$, $t = 2$ en $t = 3$ een model in de vorm van een 2×2 matrix.

3p 12 □ Laat zien dat met dit zojuist gevonden model voor $t = 4$ *niet* de verdeling van tabel 2 gevonden kan worden.

Een model met een 2 × 2 matrix past dus niet bij de gegevens van tabel 2. Daarom maken we een iets ingewikkelder model.
In dit nieuwe model worden nu drie categorieën onderscheiden: 'gezond', 'ziek' en 'weer beter'. We gaan er van uit dat het model slechts gedurende een betrekkelijk korte periode geldig is. Daarom nemen we aan dat een zieke werknemer die beter is geworden, daarna niet nog een keer ziek wordt. Zo'n persoon blijft dus in de categorie 'weer beter'. Bij dit model kan een graaf getekend worden (zie figuur 5).

figuur 5



Als tabel 2 op deze wijze uitgesplitst wordt, ontstaat tabel 3.

tabel 3

tijd t in weken	1	2	3	4	5	6
aantal gezonde werknemers	1000	900	810	729	656	590
aantal zieke werknemers	0	100	130	133	126	116
aantal werknemers dat weer beter is	0	0	60	138	218	294

Uit tabel 3 kan men afleiden dat van de gezonde werknemers iedere week 10% ziek wordt. Van de gezonde werknemers is na een week dus 90% gezond gebleven. Daarom past in figuur 5 bij de pijl van 'gezond' naar 'ziek' het getal 10% en bij de kringpijl van 'gezond' naar 'gezond' het getal 90%. Op grond van de gegevens in tabel 3 passen ook bij de drie andere pijlen in figuur 5 vaste percentages.

5p **13** □ Bepaal met behulp van de gegevens in tabel 3 deze drie percentages. Licht je werkwijze toe.

Opgave 4 Praktische capaciteit van een weg

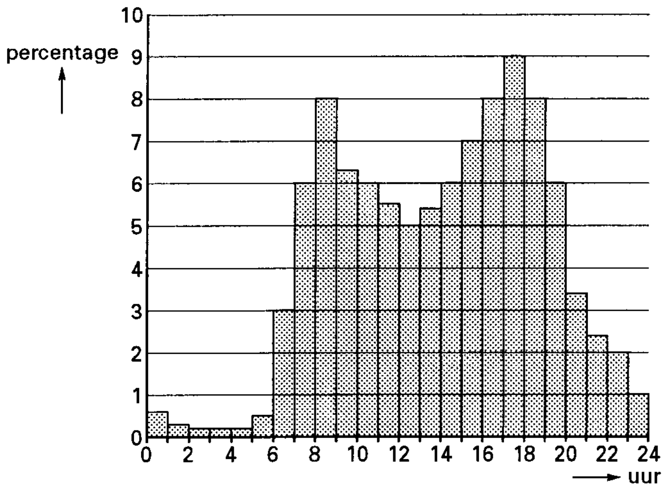
De capaciteit van een autoweg is het maximale aantal auto's dat die weg per uur kan verwerken. De capaciteit zou zeer groot zijn als alle voertuigen met dezelfde hoge snelheid heel dicht achter elkaar zouden rijden. Natuurlijk is dat in de praktijk niet mogelijk. Daarom gebruikt men het begrip 'praktische capaciteit'. Als de praktische capaciteit wordt overschreden, ontstaan er files.
De praktische capaciteit van een weg hangt onder andere af van de indeling van die weg (zie tabel 4).

tabel 4

Wegindeling	Praktische capaciteit in voertuigen per uur
2 rijstroken	900
3 rijstroken	1500
4 rijstroken zonder middenberm	3900
4 rijstroken met middenberm	4000

Er wordt een autoweg aangelegd met 4 rijstroken met middenberm. Uit onderzoek is bekend hoe op dit soort wegen de verkeersdrukte over de dag verdeeld is. In figuur 6 is voor elk uur af te lezen hoeveel procent van het dagelijkse totale aantal voertuigen van zo'n weg gebruik maakt.

figuur 6



De plannenmakers nemen aan dat deze verdeling van de verkeersdrukte ook voor deze nieuwe weg zal gelden en dat de praktische capaciteit van de weg geen enkel uur overschreden zal worden.

4p 14 □ Hoeveel voertuigen zullen er dan maximaal per dag over deze weg rijden? Licht je antwoord toe.

Behalve van de wegindeling (tabel 4) is de praktische capaciteit van een weg ook afhankelijk van:
. het percentage vrachtverkeer
. de breedte van de rijstroken.

Tabel 4 geldt voor wegen zonder vrachtverkeer met rijstroken die 3,60 m breed zijn. Uitgaande van de getallen in tabel 4 kan met behulp van tabel 5 en tabel 6 worden berekend hoe groot de praktische capaciteit van een weg in sommige andere gevallen is.

tabel 5

Correctiepercentage voor de praktische capaciteit bij toenemend vrachtverkeer

Vrachtauto's in % van het totale verkeer	Tweestrookswegen	Meerstrookswegen
0	100%	100%
10	88%	91%
20	78%	83%

tabel 6

Correctiepercentage voor de praktische capaciteit bij kleiner wordende rijstrookbreedte

Rijstrookbreedte	3,60 m	3,30 m	3,00 m	2,70 m
Tweestrooksweg	100%	86%	77%	70%
Meerstrooksweg	100%	97%	91%	81%

We geven een voorbeeld. Een weg met 4 rijstroken met middenberm heeft volgens tabel 4 een praktische capaciteit van 4000 voertuigen per uur. Als er 10% vrachtverkeer is, zal de praktische capaciteit nog slechts 91% van 4000 zijn, dus 3640 voertuigen per uur. Als de rijstrookbreedte 2,70 m is, neemt de praktische capaciteit nog verder af tot 81% van 3640, dus 2948 voertuigen per uur.

Tussen 2 dorpen ligt een weg met 2 rijstroken. Vrachtverkeer vormt 20% van het totale verkeer. De rijstrookbreedte is 2,70 m. De praktische capaciteit van deze weg is te klein. Men wil die praktische capaciteit verhogen. Neem aan dat het percentage vrachtauto's niet zal veranderen.

5p **15** □ Bereken de praktische capaciteit van de weg als er aan deze weg een derde rijstrook wordt toegevoegd die ook 2,70 m breed is.

Er is ook een andere mogelijkheid om de praktische capaciteit van de weg te verhogen. Men kan de twee rijstroken van deze weg verbreden naar 3,00 m, 3,30 m of 3,60 m.

5p **16** □ Bereken de minimale rijstrookbreedte die nodig is om een praktische capaciteit van minstens 600 te bereiken.

In tabel 5 is per kolom sprake van een exponentieel verband tussen het percentage vrachtauto's en het correctiepercentage voor de praktische capaciteit. In deze tabel staan in de kolom 'meerstrookswegen' de percentages 100, 91 en 83. Men wil deze kolom uitbreiden met een percentage dat behoort bij 30% vrachtauto's.

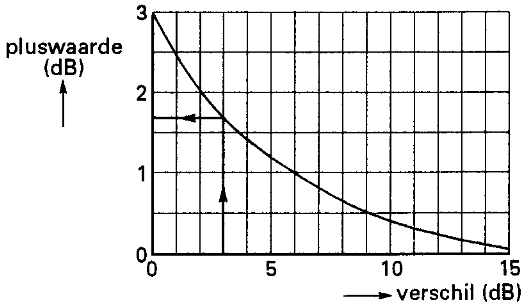
4p **17** □ Bereken dit percentage door gebruik te maken van het exponentiële verband.

Opgave 5 Lawaai van machines

Deze opgave gaat over lawaai dat door machines wordt veroorzaakt. De hoeveelheid lawaai die een machine maakt, noemen we het geluidsniveau van die machine. Het geluidsniveau wordt uitgedrukt in decibel (dB).
Stel dat in een fabriekshal twee machines geluid veroorzaken. Het totale geluidsniveau van de twee machines is *niet* de som van de afzonderlijke geluidsniveaus, maar het hoogste van de twee geluidsniveaus vermeerderd met een zogenaamde pluswaarde. Met behulp van figuur 7 wordt de pluswaarde als volgt gevonden:

1 Meet de afzonderlijke geluidsniveaus van de twee machines.
2 Bereken het verschil van deze twee geluidsniveaus.
3 Lees in de figuur af welke pluswaarde bij dit verschil hoort.

figuur 7



Voorbeeld:
1 Geluidsniveau machine 1: 82,7 dB,
Geluidsniveau machine 2: 85,7 dB
2 Verschil: 3,0 dB
3 Pluswaarde: 1,7 dB (zie figuur 7)
4 Totale geluidsniveau: 85,7 + 1,7 = 87,4 dB.

Stel dat twee machines elk een geluidsniveau van x dB hebben.

4p **18** □ Hoe groot is het geluidsniveau van de twee machines samen, uitgedrukt in x? Licht je werkwijze toe.

Het totale geluidsniveau van twee of meer machines kan opgevat worden als het geluidsniveau van één grotere machine. Met de boven beschreven werkwijze kan dan ook het totale geluidsniveau van grotere aantallen machines worden berekend.

In een fabriekshal wil men een aantal machines van hetzelfde type neerzetten. Elke machine heeft een geluidsniveau van 44,0 dB.

5p **19** □ Hoe groot is het totale geluidsniveau van drie machines? Licht je antwoord toe.

Voor andere aantallen van deze machines is het geluidsniveau in onderstaande tabel aangegeven.

tabel 7

aantal machines n	1	4	5	8
totaal geluidsniveau G	44,0	50,0	51,0	53,0

6p **20** □ Bereken met behulp van tabel 7 en figuur 7 het geluidsniveau G zowel bij $n = 10$ als bij $n = 17$.