

Opgave 1 Water

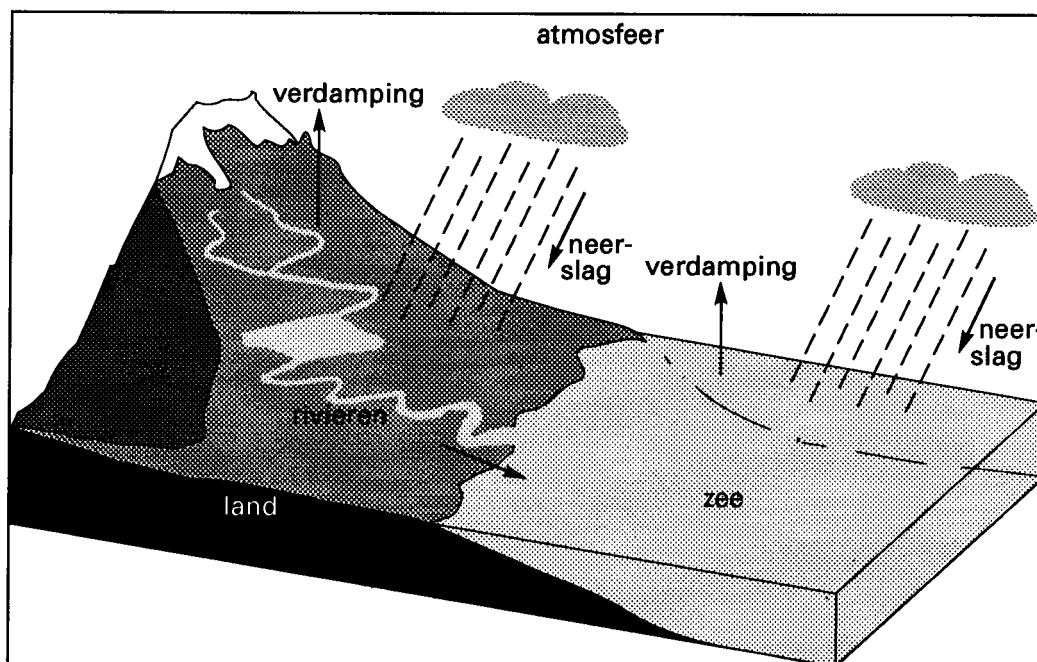
De totale hoeveelheid water op aarde is $1\,400\,000\,000\text{ km}^3$.

Hoewel de zeeën ruim 97% van al het water op aarde bevatten, het land 2,7% en de atmosfeer slechts 0,001%, spelen de waterstromen tussen deze drie een belangrijke rol in het milieu op aarde. Waar we hier spreken over water bedoelen we ook andere vormen van water zoals waterdamp, ijs en sneeuw.

Een volledige beschrijving van alle waterstromen is zo ingewikkeld dat men vaak kiest voor een vereenvoudigd model.

In figuur 1 zijn voor zo'n model de verschillende waterstromen in beeld gebracht.

figuur 1



De grootte van de stromen in dat model is weergegeven in de volgende matrix. De gegevens zijn ontleend aan het boek 'Earth' van Press en Siever.

matrix

		van		
		Atm	Land	Zee
naar	Atmosfeer	-	62	456
	Land	108	-	0
	Zee	410	46	-

in duizenden km^3 per jaar

Zo stroomt er dus jaarlijks 46 duizend km^3 water van land naar zee.

- 4 p 1 □ Teken een graaf met de punten Land, Zee en Atmosfeer en zet de juiste getallen bij de pijlen.

Eindexamen wiskunde A havo 1993-I

Als de hoeveelheid water op het land na een jaar gelijk gebleven is, en dat geldt ook voor de hoeveelheid water in de zee en de hoeveelheid water in de atmosfeer, dan is er sprake van een dynamisch evenwicht.

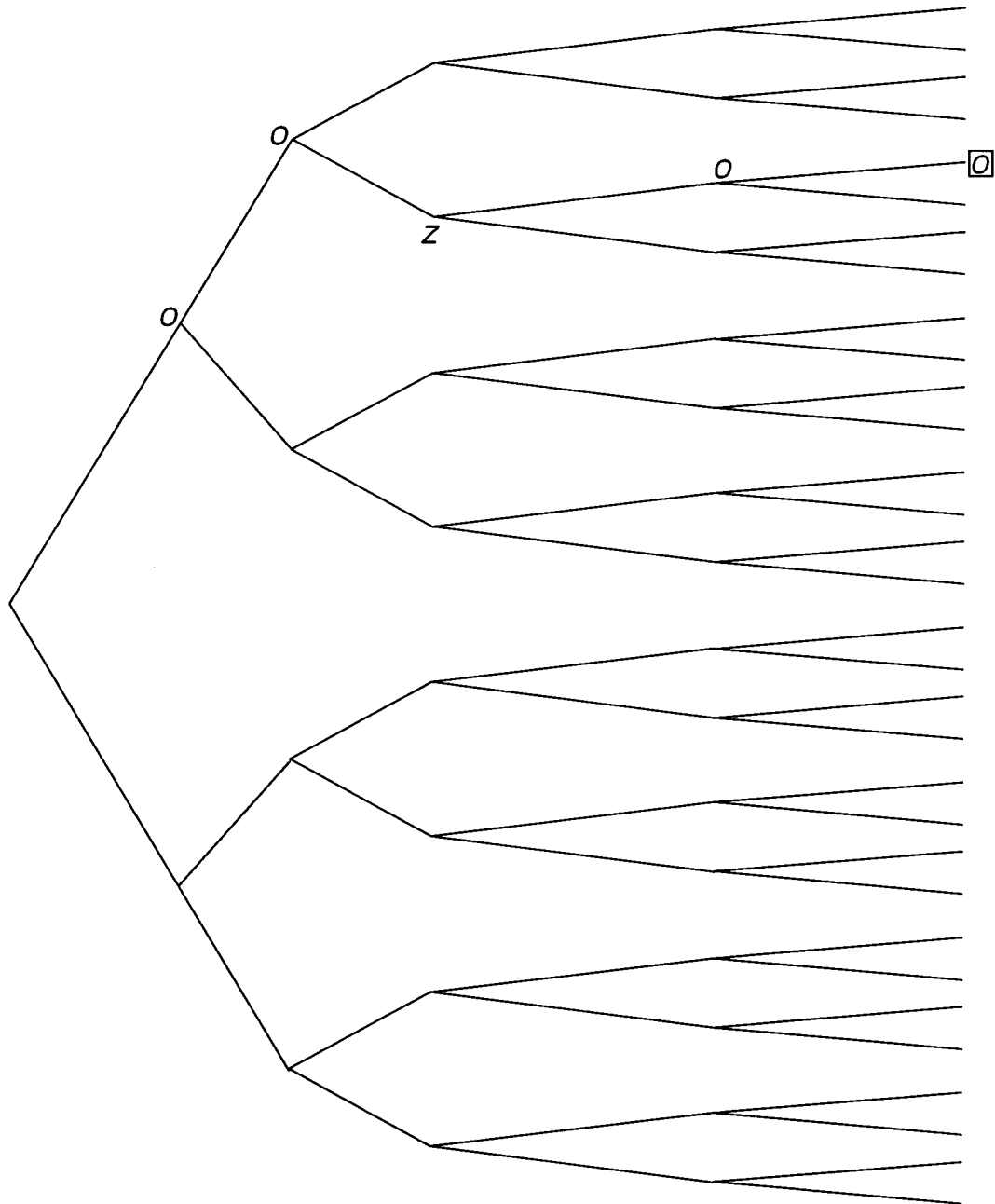
- 3 p 2 Laat zien dat hier sprake is van dynamisch evenwicht.

Als de omstandigheden zich ingrijpend zouden wijzigen, bijvoorbeeld door ontbossing of klimaatveranderingen, moet het model worden aangepast.

Stel dat de waterstroom van land naar zee toeneemt van 46 naar 51 en dat de verdamping vanuit zee 459 wordt. De waterstroom van zee naar land blijft 0 en de totale neerslag uit de atmosfeer blijft 518 (alles in duizenden km^3 per jaar). Er moet weer een dynamisch evenwicht zijn.

- 6 p 3 Stel een matrix en een graaf op bij dit nieuwe model. Zet in de graaf de getallen bij de pijlen.

Opgave 2



Opgave 2 Selecteren in het onderwijs

Meer dan 20 jaar geleden signaleerde Professor Posthumus dat ieder jaar ongeveer een kwart van de leerlingen op de scholen van voortgezet onderwijs aan het eind van het schooljaar niet werd bevorderd. Een citaat:

tekst "Ieder schooljaar wordt in iedere klasse opnieuw één vierde gedeelte der leerlingen op de scholen teruggewezen. Deze toestand schijnt reeds langer dan een halve eeuw te bestaan."

Volgens Posthumus wordt op scholen het begrip 'ongeschikt' als volgt omschreven: „het kwart van de leerlingen met de laagste scores is 'ongeschikt' ”.

We werken in deze opgave met deze omschrijving van 'ongeschikt' en noemen de 25% leerlingen met de hoogste scores 'goed' en de resterende 50% 'middelmatic'.

In tabel 1 staan de resultaten van een examen.

tabel 1

SCORE	FREQUENTIE	CUMULATIEVE FREQUENTIE	SCORE	FREQUENTIE	CUMULATIEVE FREQUENTIE
10	0	0	56	19	296
11	0	0	57	19	315
12	0	0	58	25	340
13	0	0	59	28	368
14	0	0	60	25	393
15	0	0	61	28	421
16	0	0	62	37	458
17	0	0	63	30	488
18	0	0	64	19	507
19	0	0	65	26	533
20	1	1	66	29	562
21	0	1	67	25	587
22	0	1	68	29	616
23	0	1	69	21	637
24	1	2	70	22	659
25	1	3	71	25	684
26	1	4	72	20	704
27	1	5	73	13	717
28	1	6	74	15	732
29	0	6	75	15	747
30	2	8	76	13	760
31	5	13	77	10	770
32	0	13	78	5	775
33	2	15	79	12	787
34	3	18	80	10	797
35	4	22	81	11	808
36	2	24	82	9	817
37	8	32	83	10	827
38	4	36	84	4	831
39	6	42	85	9	840
40	6	48	86	5	845
41	10	58	87	6	851
42	12	70	88	3	854
43	19	89	89	4	858
44	17	106	90	7	865
45	7	113	91	4	869
46	11	124	92	3	872
47	8	132	93	2	874
48	12	144	94	3	877
49	11	155	95	2	879
50	18	173	96	0	879
51	17	190	97	2	881
52	16	206	98	1	882
53	22	228	99	0	882
54	23	251	100	1	883
55	26	277			

Een leerling behoort bij dit examen tot de categorie 'middelmatic'.

4 p 4 Welke scores kan hij behaald hebben? Licht je antwoord toe.

Eindexamen wiskunde A havo 1993-I

Vaak lijkt de verdeling van de scores bij een examen sterk op de normale verdeling. Stel dat voor een zeker examen de scores inderdaad bij benadering normaal verdeeld zijn met een gemiddelde van 62 en een standaardafwijking van 12.

- 6 p 5 Bereken voor dat examen bij welke (gehele) scores een leerling tot de categorie 'middelmatic' behoort.

We bekijken nu een school met een vierjarige opleiding. Elk jaar begint een gelijk aantal leerlingen aan het eerste leerjaar. Aan het eind van het eerste, tweede of derde leerjaar kun je 'overgaan' of 'blijven zitten' en aan het eind van het vierde leerjaar kun je slagen of zakken voor het examen. Je mag op deze school tijdens je gehele schoolloopbaan maar één keer een klas overdoen als je blijft zitten of zakt voor het examen. Als zoiets een tweede keer gebeurt, moet je de school (zonder diploma) verlaten.

Op de bijlage zie je in een boomdiagram de schoolloopbaan $O O Z O O$ van een leerling, die in het derde leerjaar is 'blijven zitten' en na 5 jaar de opleiding met een diploma heeft afgesloten.

Hierbij betekent

O : 'gaat over' of 'haalt diploma'

Z : 'blijft zitten' of 'zakt voor het examen'

- 6 p 6 Geef in de figuur op de bijlage alle mogelijke schoolloopbanen aan, ook die waarbij een leerling voortijdig de school moet verlaten. Geef daarbij het moment dat de leerling de school (met of zonder diploma) verlaat aan met een vierkantje om de laatste letter.

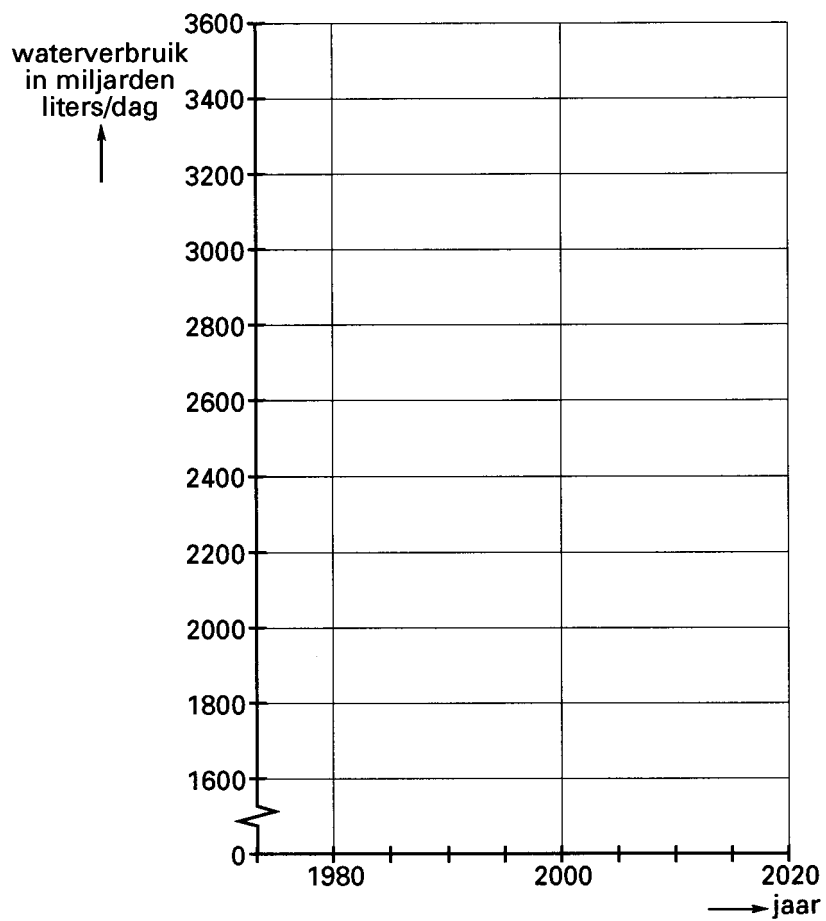
We nemen in een kansmodel voor deze situatie aan dat elke leerling van de school aan het eind van elk leerjaar dezelfde kans heeft om te blijven zitten of te zakken voor het examen. We stellen die kans op 25%.

- 4 p 7 Laat zien dat volgens dit model ruim 30% van de leerlingen die in het eerste leerjaar beginnen, vier jaar later het diploma haalt.

We kijken nu in het kansmodel uitsluitend naar de groep leerlingen die de opleiding met een diploma hebben verlaten.

- 7 p 8 Hoeveel procent van deze leerlingen heeft vijf jaar over de opleiding gedaan? Licht je antwoord toe.

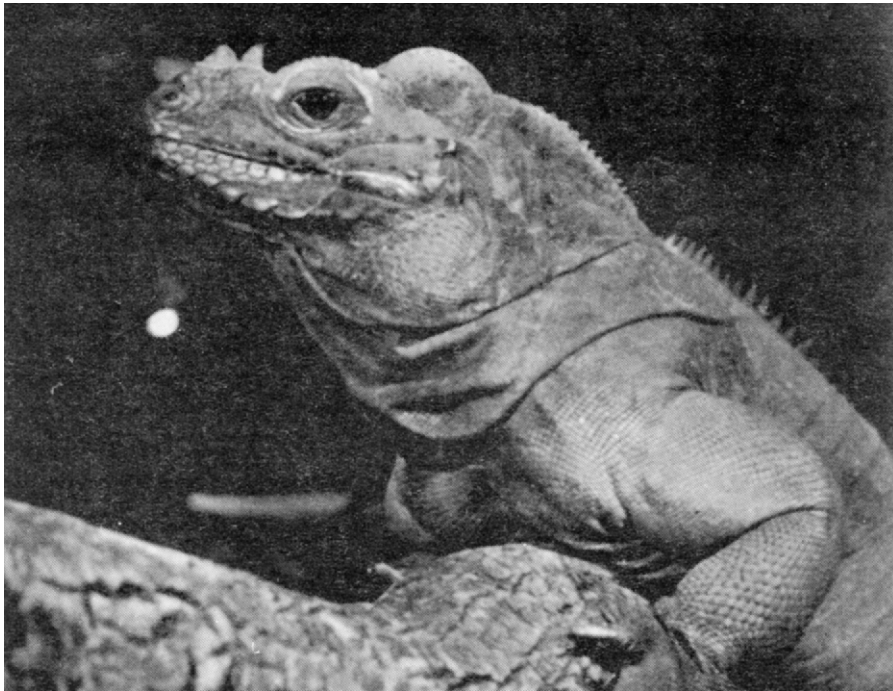
Opgave 5



Opgave 3 Diersoorten

Het lijkt aannemelijk dat er een verband bestaat tussen de oppervlakte van een gebied en het aantal verschillende diersoorten dat in dat gebied voorkomt. Een theorie hierover stelt dat het aantal verschillende diersoorten op een eiland in een bepaalde klimaatzone alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland.

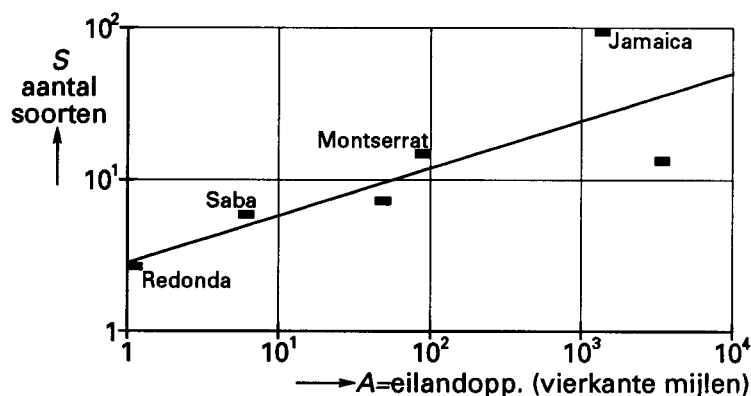
In deze opgave kijken we naar de verschillende soorten reptielen op eilanden in het Caraïbisch gebied.



Neushoornleguaan (Haïti)

Onderzoekers telden op vele eilanden het aantal verschillende soorten reptielen (S). In figuur 2 zijn de gegevens van enkele eilanden weergegeven.

figuur 2



Volgens de theorie is het verband tussen de oppervlakte A van een eiland (in vierkante mijlen) en het aantal soorten reptielen S op dat eiland te beschrijven met de formule

$$S = 3 \cdot A^{0,30}$$

De lijn in figuur 2 is de grafiek die bij deze formule behoort.

Eindexamen wiskunde A havo 1993-I

Op het eiland Jamaica zijn meer soorten reptielen aangetroffen dan op grond van de theorie (de formule) verwacht mag worden.

- 4 p 9 Hoeveel soorten reptielen zou een even groot eiland volgens de theorie hebben? Licht je antwoord toe.

Binnen de theorie geldt als ruwe regel:

Bij een 10 keer zo groot eiland vinden we 2 keer zoveel diersoorten.

- 4 p 10 Laat zien dat dit uit de formule volgt.

Op een groot eiland worden veel verschillende soorten reptielen met uitsterven bedreigd. Men wil maatregelen nemen om de natuur beter te beschermen. Daarbij moet er een keuze worden gemaakt uit twee mogelijkheden:

- oprichting van 1 groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijlen.
- oprichting van 2 kleinere reservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen.

Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd in de bewoonde wereld en kunnen als 'eilanden' beschouwd worden. Voor het schatten van het aantal soorten reptielen dat in zo'n reservaat zal voorkomen kan de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ gebruikt worden.

Of voor a. of b. gekozen wordt, is mede afhankelijk van het aantal soorten dat de twee kleinere reservaten gemeen zullen hebben. Men neemt aan dat er 8 soorten reptielen zijn die zowel in het ene als het andere kleine reservaat zullen voorkomen.

Men wil de mogelijkheid kiezen waarbij in totaal zoveel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

- 6 p 11 Welke van de twee mogelijkheden zal men kiezen? Licht je antwoord toe.

Opgave 4 Ruilverkaveling

In het dorp Groenoord hebben 200 inwoners elk een eigen landbouwbedrijf. In tabel 2 zijn deze bedrijven naar grootte in 4 groepen verdeeld. Van elke groep is de gemiddelde bedrijfsgrootte bepaald. Bovendien is elke groep voorzien van een kleurcode.

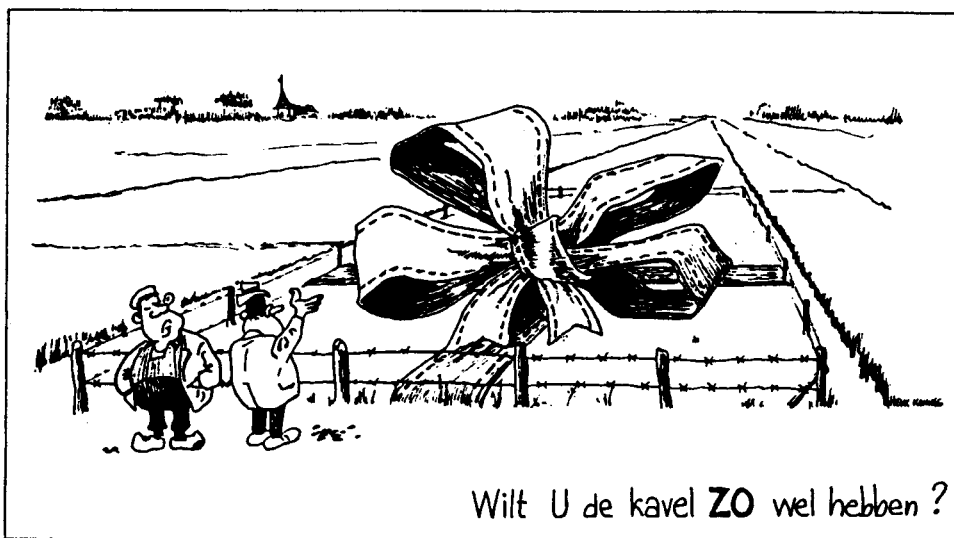
Ga er in het vervolg van uit dat elk bedrijf een grootte heeft, die precies gelijk is aan het gemiddelde van de betreffende groep.

tabel 2

gemiddelde bedrijfsgrootte	kleurcode	aantal
2 ha	oranje	65
12 ha	rood	95
30 ha	blauw	37
90 ha	groen	3

Voor een goede bedrijfsvoering is het belangrijk dat alle landbouwgrond van één eigenaar dicht bij de bedrijfsgebouwen ligt. Bij ruilverkaveling probeert men door onderling ruilen de verspreid liggende stukken grond (kavels) te vervangen door één kavel.

afbeelding



Alle 200 eigenaren komen in een zaal van restaurant 'Den Hommel' bijeen om te stemmen over een voorstel tot ruilverkaveling.

Eerst wordt door middel van loting een stemcommissie gevormd.

De stemcommissie bestaat uit 2 van de 200 eigenaren.

- 4 p 12 Bereken de kans, dat bij een willekeurige loting rood niet in de stemcommissie is vertegenwoordigd. Geef je antwoord in 3 decimalen.

Eindexamen wiskunde A havo 1993-I

Nu kan over het voorstel tot ruilverkaveling gestemd worden. Elke eigenaar stemt voor of tegen het voorstel en vermeldt op zijn stembriefje bovendien zijn kleurcode.

Voor het bepalen van de uitslag van de stemming heeft de overheid de volgende procedure voorgeschreven:

Eerst wordt het aantal voorstemmers vergeleken met het aantal tegenstemmers. Is het aantal voorstemmers groter dan het aantal tegenstemmers, dan is het voorstel aangenomen.

Is dat niet het geval, dan worden de stembriefjes opnieuw bekeken.

Men bepaalt dan aan de hand van de kleurcodes de totale oppervlakte van de bedrijven van de voorstemmers. Is die oppervlakte groter dan de totale oppervlakte van de bedrijven van de tegenstemmers, dan is het voorstel alsnog aangenomen; zo niet, dan is het verworpen.

Stel dat de stemming in Groenord verloopt zoals weergegeven in tabel 3.

tabel 3

kleur	oranje	rood	blauw	groen
aantal voorstemmers	5	50	22	3
aantal tegenstemmers	60	45	15	0

- 4 p 13 Ga na of het voorstel tot ruilverkaveling in Groenord dan is aangenomen of afgewezen. Licht je antwoord toe.

De stemprocedure bij ruilverkaveling maakt het mogelijk dat bij minder dan 50% voorstanders de ruilverkaveling toch wordt aangenomen. In de situatie van Groenord is uit te zoeken met hoe weinig voorstemmers de ruilverkaveling toch aangenomen zou kunnen worden.

- 7 p 14 Wat is het kleinste aantal voorstemmers, waarbij de ruilverkaveling in Groenord kan worden aangenomen? Licht je antwoord toe.

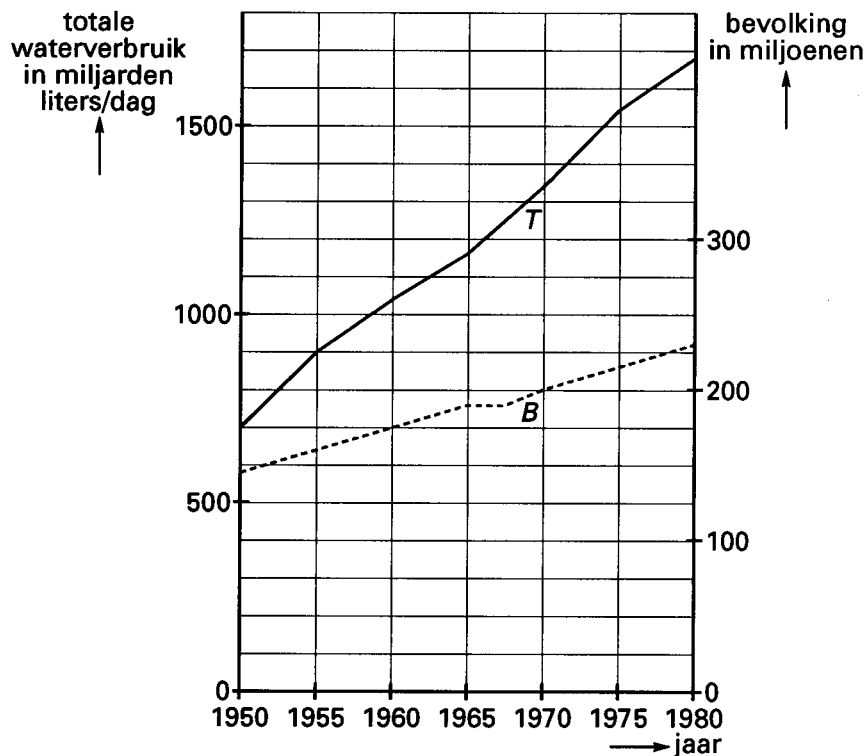
Opgabe 5 Waterverbruik in de V.S.

Overall op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig.

Deze opgave gaat over het waterverbruik in de Verenigde Staten vanaf 1950.

In figuur 3 staan gegevens over het totale waterverbruik (T) en de grootte van de bevolking (B) van de V.S. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat in 1980 het totale waterverbruik ongeveer 1680 miljard liter per dag bedroeg, en dat de bevolking in dat jaar ongeveer 230 miljoen mensen telde.

figuur 3



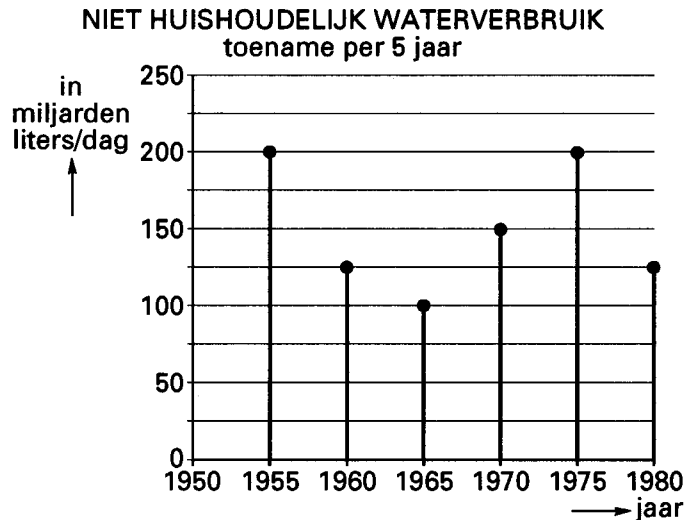
- 4 p 15 □ Laat zien dat het totale jaarverbruik in 1975 gemiddeld ongeveer 2,6 miljoen liter water per inwoner was.

Het aantal liters in vraag 15 is erg groot. Dat komt vooral door het niet-huishoudelijk waterverbruik.

In 1950 was het totale waterverbruik (700 miljard liter per dag) opgebouwd uit 625 miljard liter water voor niet-huishoudelijk gebruik en 75 miljard liter per dag voor huishoudelijk gebruik.

In figuur 4 zie je een toenamendiagram van het waterverbruik per dag in de V.S. voor *niet*-huishoudelijk gebruik. Je kunt er o.a. in aflezen dat het *niet*-huishoudelijk waterverbruik in 1970 150 (miljard liter per dag) hoger was dan in 1965.

figuur 4



- 7 p 16 Onderzoek of het niet-huishoudelijk verbruik als percentage van het totale waterverbruik in 1980 hoger was dan in 1950.

Hoe zal het waterverbruik zich in de volgende eeuw ontwikkelen? Bij een onderzoek in 1980 schatte men dat de toename van het totale waterverbruik elke vijf jaar zou liggen tussen 110 en 200 (miljard liter per dag).

- 5 p 17 Arceer in de figuur op de bijlage het gebied waarbinnen het totale waterverbruik per dag volgens deze veronderstelling in de periode van 1980 tot 2020 zal liggen.

De onderzoekers verwachten dat er niet onbeperkt aan die toenemende waterbehoefte kan worden voldaan. Zij verwachten dat er maximaal 5000 (miljard liter per dag) beschikbaar zal zijn.

- 5 p 18 Tussen welke twee jaartallen zal volgens de veronderstellingen van de onderzoekers het moment vallen waarop dit maximum bereikt wordt? Licht je antwoord toe.