Benzineverbruik

John heeft een nieuwe auto gekocht die bekend staat om zijn lage verbruik.
Om te zien of de auto echt zo zuinig is als beweerd wordt, houdt hij van alle tankbeurten bij hoeveel liter hij getankt heeft en hoeveel kilometer hij daarmee gereden heeft. Met deze gegevens berekent hij het gemiddelde benzineverbruik B per tankbeurt in liter per 100 km.
John vindt op het internet dat het benzineverbruik B bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5,78 liter per 100 km en een standaardafwijking van 0,26 liter per 100 km. In het vervolg gaan we uit van deze gegevens.

John verwacht komend jaar 70 keer te tanken.

4p **1** Bereken bij hoeveel van die 70 tankbeurten het benzineverbruik naar verwachting meer dan 6,0 liter per 100 km zal zijn.

John spreekt van een goedkope tankbeurt als het door hem berekende benzineverbruik hoort bij de 10% laagste volgens de gegevens op het internet.

3p **2** Bereken hoe hoog het benzineverbruik B van een goedkope tankbeurt maximaal mag zijn.

Het benzineverbruik is van verschillende factoren afhankelijk. Een van die factoren is de buitentemperatuur. Zie de figuur op de volgende pagina. Deze figuur is ook op de uitwerkbijlage afgedrukt.
In de figuur is voor een aantal verschillende buitentemperaturen de **literafstand** L in km uitgezet tegen de snelheid v in km per uur. De literafstand is het aantal kilometer dat met 1 liter benzine gereden kan worden. Hoe groter de literafstand is, des te lager is het verbruik. In de figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat bij een temperatuur van 0 °C en een snelheid van 100 km per uur de literafstand L ongeveer 19,0 km is en bij 25 °C en dezelfde snelheid ongeveer 22,3 km.

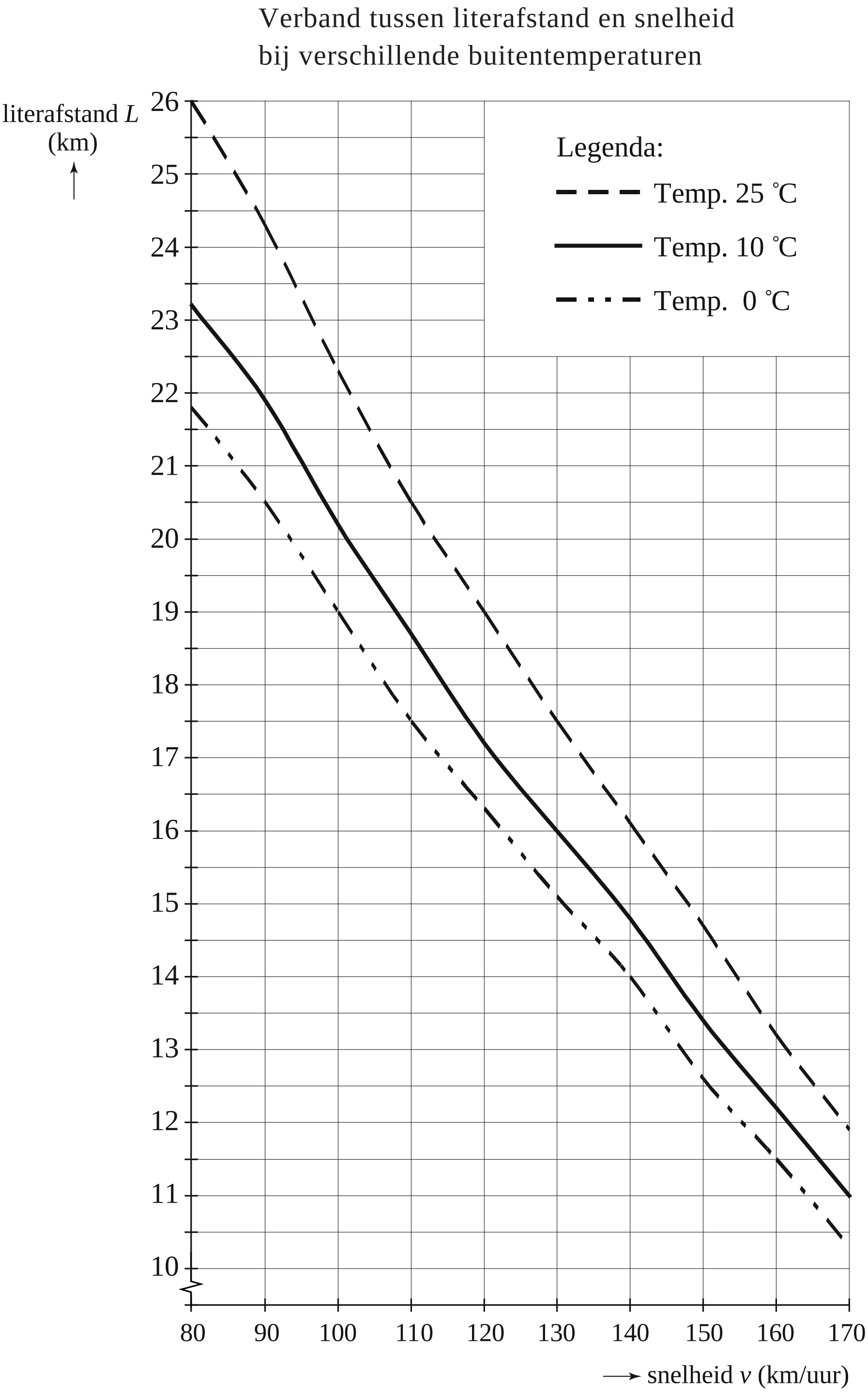
Het verband tussen de snelheid v en de literafstand L is vanaf een snelheid van 120 km per uur bij benadering lineair. De drie formules die horen bij de verschillende buitentemperaturen hebben dus de vorm $L = a \cdot v + b$.

4p **3** Stel de formule op van de literafstand bij een buitentemperatuur van 0 °C bij snelheden vanaf 120 km per uur.

John maakt een rit van 75 km bij een buitentemperatuur van 10 °C. Hij rijdt met constante snelheid en verbruikt hierbij 4,4 liter benzine.
Hij wil onderzoeken hoeveel km hij meer kan rijden met dezelfde hoeveelheid benzine en met dezelfde constante snelheid als de buitentemperatuur 25 °C is. Hierbij gebruikt hij de figuur.

5p **4** Bereken hoeveel km John dan meer kan afleggen. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

figuur



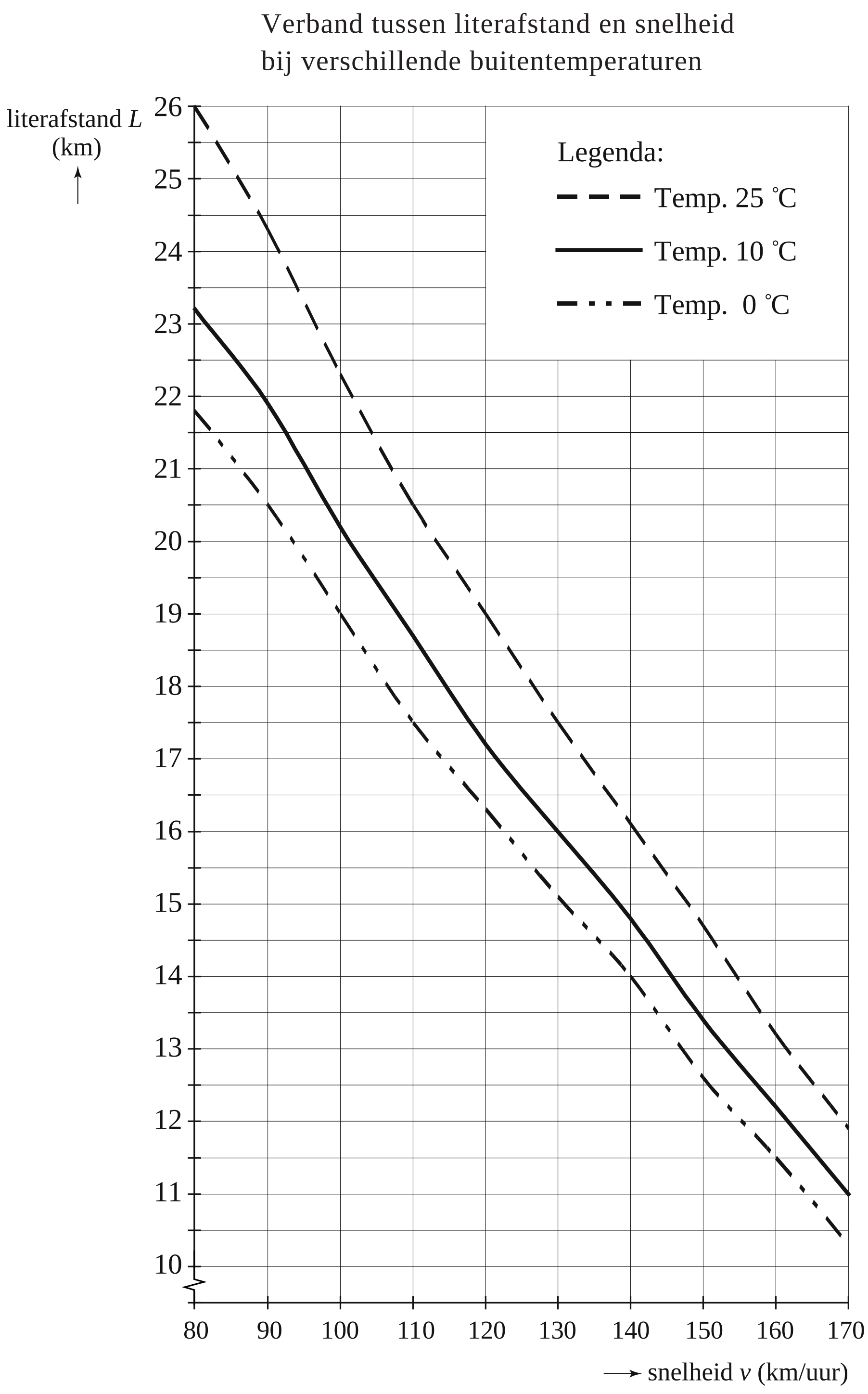
In de figuur kun je zien dat bij een snelheid van 90 km per uur en een temperatuur van 10 °C de literafstand 21,9 km is, en dat deze bij 25 °C 24,3 km is. Met behulp van lineair interpoleren kun je nu de literafstand berekenen bij deze snelheid en een temperatuur van 13 °C.

3p **5** Bereken deze literafstand L.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

4



Pig

Pig is een dobbelspelletje dat wordt gespeeld door twee spelers die om de beurt een aantal keer met een dobbelsteen werpen. Tijdens een beurt gelden de onderstaande spelregels. Zie tabel 1.

tabel 1

Je gooit een	Actie
1	Je beurtscore is 0. Scores uit mogelijk eerdere worpen uit deze beurt vervallen dus. Je totaalscore verandert niet. De beurt gaat naar de tegenstander.
2, 3, 4, 5 of 6	De score van deze worp wordt bij die van de mogelijk eerdere worpen uit deze beurt opgeteld tot een (voorlopige) beurtscore. Je mag nu kiezen: stoppen → een nieuwe totaalscore (de beurtscore wordt opgeteld bij de oude totaalscore); beurt gaat naar de tegenstander. doorgaan → nogmaals werpen.

Het doel is als eerste op een totaalscore van 100 punten (of meer) uit te komen.
Een mogelijk spelverloop is het volgende.
Speler 1 begint en werpt het rijtje 5-2-2-4 en stopt dan. Hij eindigt deze beurt met een beurtscore van 13 punten. Speler 2 gaat verder. Deze werpt het rijtje 5-4-3-2-6 en stopt dan met een beurtscore van 20 punten. Speler 1 gaat weer verder en werpt het rijtje 3-4-1. Hij heeft dan een beurtscore van 0 punten. Zijn totaalscore blijft 13 punten. De beurt gaat weer naar speler 2 die het rijtje 6-6 werpt en dan stopt, zodat zijn totaalscore 32 wordt. Het spelverloop is hieronder in tabel 2 weergegeven.

tabel 2

	Speler 1							**Speler 2**							
	score					**beurt score**	**totaal score**	**score**						**beurt score**	**totaal score**
beurt 1	5	2	2	4	stop	13	13	5	4	3	2	6	stop	20	20
beurt 2	3	4	1			0	13	6	6	stop				12	32
beurt 3	…							…							

Speler 1 werpt in zijn eerste beurt vier keer met een dobbelsteen met als resultaat het rijtje 5-2-2-4.

3p **6** Bereken hoeveel verschillende rijtjes er mogelijk zijn als er vier keer geworpen wordt in één beurt van dit spel.

Speler 1 uit het spel hierboven heeft tijdens zijn tweede beurt een beurtscore van 0 punten.

3p **7** Bereken de kans dat een speler die aan een beurt begint, na drie worpen eindigt met een beurtscore van 0 punten.

Een speler stopt met zijn beurt als hij na drie worpen 16 of meer punten heeft.

4p **8** Schrijf alle rijtjes op waarmee je in drie worpen 16 of meer punten kunt hebben.

Er is een strategie om dit spel te spelen. Bij deze strategie wordt rekening gehouden met het aantal punten dat je gemiddeld **per worp** kunt winnen, dus met de verwachtingswaarde van de winst per worp.
De verwachtingswaarde van de winst per worp blijkt gelijk te zijn aan $3\frac{1}{3}$.

3p **9** Toon dit met een berekening aan.

Stel dat je in een beurt al K punten hebt gescoord en je moet beslissen of je stopt of nog een keer werpt.
Als je nog een keer werpt, is de kans op een beurtscore van 0 gelijk aan $\frac{1}{6}$. Je verliest dan K punten. De verwachtingswaarde van je verlies bij een extra worp is dus $\frac{1}{6}K$.
De strategie is nu:

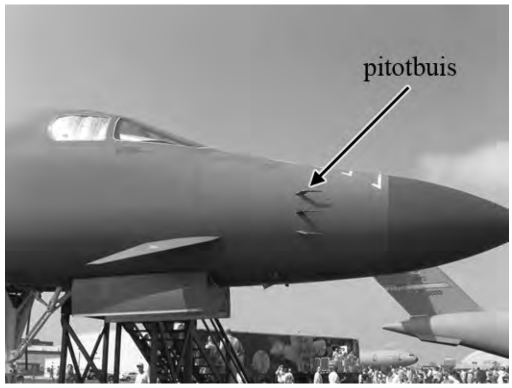
Als de verwachtingswaarde van je verlies bij een extra worp groter is dan de verwachtingswaarde van je winst bij een extra worp, moet je stoppen.

3p **10** Bereken het aantal punten K waarbij je volgens deze strategie zou moeten stoppen.

Pitotbuis

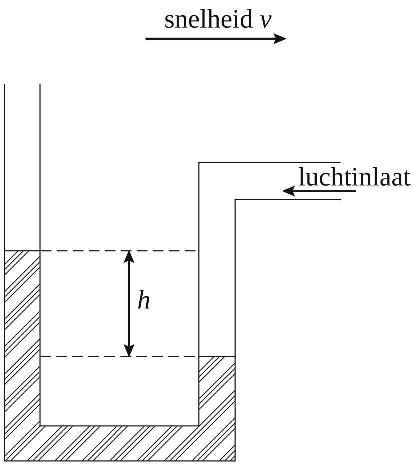
Voor de piloot van een vliegtuig is de 'air speed' heel belangrijk. Dit is de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de omringende lucht. Deze snelheid wordt gemeten met pitotbuizen: kleine buisvormige uitsteeksels aan de romp of vleugel van een vliegtuig. Zie de foto.

foto



Een eenvoudige versie van een pitotbuis is een gebogen buis met een vloeistof erin, zie de figuur. De werking is als volgt. Het vliegtuig vliegt naar rechts, zodat aan de rechterkant lucht de buis instroomt en daar de vloeistof wegdrukt, zie de figuur. De vloeistof in de linkerbuis komt dan hoger te staan. De hoogte van de vloeistof in de linkerbuis ten opzichte van de rechterbuis kan worden gemeten. Een hogere snelheid geeft een grotere hoogte.

figuur



Je kunt met zo'n buis ook de snelheid van je auto bepalen op een windstille dag. Het enige wat je daarvoor nodig hebt, is een met water gevulde doorzichtige plastic buis die je tot een pitotbuis vormt. Het uiteinde voor de luchtinlaat wordt buiten de auto in de rijrichting geplaatst.

Een natuurkundedocent heeft op deze manier de hoogte h in cm gemeten bij verschillende snelheden v in km per uur. De resultaten staan in de tabel.

tabel

snelheid v (in km/uur)	0	20	40	60	80	100	120
hoogte h (in cm)	0	0,2	0,8	1,7	3,0	4,7	6,8

4p **11** Teken in het assenstelsel op de uitwerkbijlage het toenamediagram bij deze gegevens.

De natuurkundedocent weet dat er een kwadratisch verband tussen h en v bestaat. Dit verband is van de volgende vorm

$$h = a \cdot v^2$$

Hierin is h de hoogte in cm en v de snelheid van de auto in km per uur.

3p **12** Bereken met behulp van de tabel de waarde van a.

Het verband tussen h en v is natuurlijk al langer bekend. Volgens natuurkundige wetten geldt in dit geval

$$v^2 = 2116 \cdot h$$

In de rest van deze opgave gaan we uit van dit verband.

De natuurkundedocent heeft nog een andere auto, daarvan is de snelheidsmeter onbetrouwbaar. Hij maakt met deze auto een rit waarbij hij met zijn pitotbuis een hoogte meet van 7,2 cm. Met dit gegeven en het natuurkundige verband kan hij zijn werkelijke snelheid berekenen.
De (onbetrouwbare) snelheidsmeter geeft een snelheid van 110 km per uur aan.

4p **13** Bereken hoeveel procent de snelheid op zijn snelheidsmeter afwijkt van de snelheid volgens het natuurkundige verband.

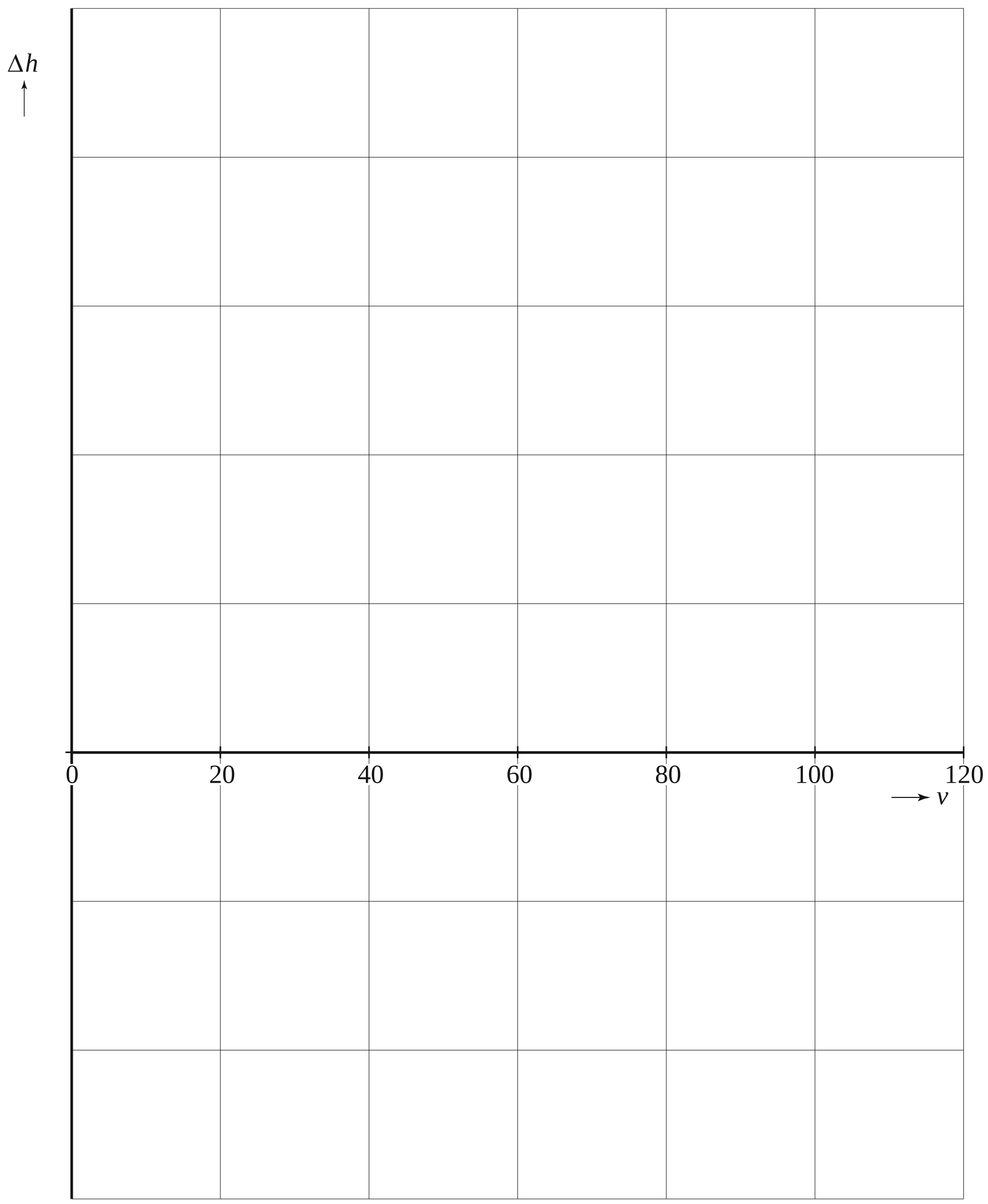
Hieronder staan vijf verbanden (**a** t/m **e**) tussen h en v.

a $h = \dfrac{v^2}{2116}$	**b** $v = 2116 \cdot \sqrt{h}$	**c** $\dfrac{v^2}{h} = 2116$
d $h \cdot v^2 = 2116$	**e** $v = 46 \cdot \sqrt{h}$	

5p **14** Geef bij al deze verbanden aan of het verband $v^2 = 2116 \cdot h$ eruit kan worden afgeleid. Als dit mogelijk is, laat dan de afleiding zien.

uitwerkbijlage

11



Meer dan één prijs ...

Hoe zou je het vinden om met één lot twee auto’s tegelijk te winnen? Dit overkwam een zekere Antonio Gallardo in 1982 bij de Quebec Super Lotto in Canada. Puur geluk? Ongetwijfeld, maar het zou heel goed nog eens kunnen gebeuren.

De Quebec Super Lotto verloot aan het eind van elk jaar 500 auto’s als bonusprijzen. In 1982 waren er 2,4 miljoen loten verkocht, elk met een uniek nummer. Om de winnaars te bepalen, trekt de computer 500 maal een nummer uit de 2,4 miljoen lottonummers zonder erop te letten of een nummer al getrokken is. De lijst van 500 winnende nummers wordt in de krant gezet. Antonio Gallardo, die slechts één lot gekocht had, had de moeite genomen alle nummers na te lopen en had daarbij zijn eigen nummer tweemaal aangetroffen. Dubbel prijs!

Telkens wanneer de computer een nummer trekt, is de kans $\frac{1}{2\,400\,000}$ dat het Antonio’s nummer is. Deze kans is dus zéér klein. Als de computer 500 keer een nummer trekt, kun je de kans berekenen dat Antonio’s nummer twee of meer keer getrokken wordt.

4p **15** Bereken deze kans.

In het vervolg van deze opgave gaan we nader op de trekking in. Het is mogelijk dat er lottonummers zijn die twee of meer keer worden getrokken.
Om de kans daarop te bepalen, berekenen we in eerste instantie een andere kans, namelijk de kans dat alle getrokken nummers verschillend zijn. Dat doen we aan de hand van een eenvoudiger voorbeeld.

Stel je voor dat een computer uit een lijst van 100 verschillende lottonummers vijfmaal een nummer trekt, zonder erop te letten of dit nummer al eerder getrokken is.
De kans dat alle getrokken nummers verschillend zijn, is ongeveer 0,9035.

3p **16** Toon dit met een berekening aan.

De kans dat alle getrokken nummers verschillend zijn, is ook voor andere situaties te berekenen. Een formule die een goede benadering geeft van deze kans is

$$p = 0{,}6065^{\left(\frac{1}{n}\cdot(x^2-x)\right)}$$

In deze formule is n het totaal aantal lottonummers, x het aantal keren dat de computer een nummer trekt en p de kans dat alle getrokken lottonummers verschillend zijn.

We bekijken nog eens de situatie met 100 lottonummers waarbij de computer vijfmaal een nummer trekt.

4p **17** Bereken voor deze situatie hoeveel de kans p die met de formule berekend wordt, afwijkt van de werkelijke kans.

4p **18** Bereken met behulp van de formule hoe groot de kans is dat in een situatie als de Quebec Super Lotto van 1982 op een of meer lottonummers twee of meer keer een prijs valt.

Radioactieve stoffen

In ziekenhuizen wordt veel gebruikgemaakt van radioactieve stoffen.
Bij het radioactieve verval van deze stoffen komt straling vrij. Deze straling wordt onder andere gebruikt voor diagnose en behandeling van ziekten.
Patiënten krijgen een injectie met een geringe hoeveelheid radioactieve stof. Daarna kijkt de arts met een speciale camera waar de stof zich in het lichaam concentreert.

Om een scan van de botten te maken, wordt een patiënt ingespoten met de radioactieve stof Technetium-99m (Tc-99m).
Tc-99m heeft een halveringstijd van 6 uur. Dat wil zeggen dat telkens na 6 uur de helft van de radioactieve stof verdwenen is. Deze halveringstijd is lang genoeg om het medische onderzoek uit te voeren en kort genoeg om de patiënt na het onderzoek niet in het ziekenhuis te hoeven houden.

4p **19** Bereken hoeveel procent van de radioactieve stof Tc-99m 24 uur na toediening nog in het lichaam van de patiënt aanwezig is.

Vanwege de korte halveringstijd is het voor een ziekenhuis onmogelijk om Tc-99m in voorraad te hebben. In het ziekenhuis wordt hiervoor eenmaal per week een **technetiumkoe** afgeleverd. Zie de foto. Deze ‘koe’ is eigenlijk een container met Molybdeen-99 (Mo-99). Tc-99m ontstaat bij het radioactieve verval van Mo-99, dat een veel langere halveringstijd heeft.
Uit de koe kan een week lang op elk gewenst moment Tc-99m worden ‘gemolken’. Dit is voldoende voor vele tientallen patiënten.

foto

Een container wordt gevuld met Mo-99. Het exponentiële radioactieve verval van Mo-99 is dusdanig dat na precies 7 dagen nog 17,3% van de stof over is.
Op grond van dit gegeven kun je vaststellen dat de hoeveelheid Mo-99 ieder uur met ongeveer 1,04% afneemt.

5p **20** Laat met een berekening zien dat dit klopt.

4p **21** Bereken met behulp van de genoemde 1,04% na hoeveel uur de hoeveelheid Mo-99 in de container gehalveerd is.