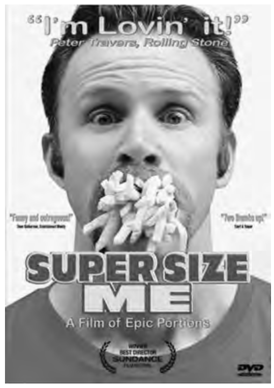
supersize me



In de film Supersize Me besluit de hoofdpersoon, Morgan Spurlock, dertig dagen lang uitsluitend fastfood te eten. Op deze manier krijgt hij elke dag 5000 kcal aan energie binnen.
Eerst wordt Morgan, die aan het begin van het experiment 85 kg weegt, nog misselijk van het eten. In het vervolg van de film went Morgan aan het type voedsel en ten slotte gaat hij het zelfs lekker vinden.

Diëtisten kunnen de gewichtstoename voorspellen met een rekenmodel. Voor actieve volwassen mannen, zoals Morgan, is er een formule om de energiebehoefte te bepalen om 'op gewicht' te blijven:

$$E_b = 33{,}6 \cdot G$$

Hierin is E_b de dagelijkse energiebehoefte in kilocalorieën (kcal) en G het gewicht in kg.

Veronderstel dat Morgan een dagelijkse energiebehoefte zou hebben van 5000 kcal om op gewicht te blijven. Dan zou hij volgens bovenstaande formule veel meer wegen dan de 85 kg die Morgan aan het begin van het experiment woog.

3p **1** Bereken hoeveel kg hij dan meer zou wegen.

In het rekenmodel wordt verder gebruik gemaakt van het gegeven dat elke 7800 kcal te veel een gewichtstoename van 1 kg veroorzaakt.

4p **2** Bereken met behulp van bovenstaande gegevens hoeveel gram Morgan al na één dag zwaarder wordt volgens het rekenmodel.

De gewichtstoename T van Morgan op een bepaalde dag hangt af van zijn energiebehoefte E_b op die dag. Er geldt:

$$T = 0{,}000128 \cdot (5000 - E_b)$$

Hierin is T de gewichtstoename in kg per dag.

Wanneer deze formule gecombineerd wordt met de formule $E_b = 33{,}6 \cdot G$, ontstaat een formule van T uitgedrukt in G.
Deze nieuwe formule is te herleiden tot de vorm $T = a \cdot G + b$.

4p **3** Bereken a en b.

Het rekenmodel kan ook gebruikt worden om een gewichtsafname (een negatieve gewichtstoename) te voorspellen. Het model kan dan dienen als basis voor een dieetadvies om af te vallen.

Een man met een gewicht van 91 kg krijgt van een diëtiste het advies om af te vallen tot een gewicht van 75 kg. Ze adviseert hem om iedere dag slechts 2520 kcal aan energie te consumeren.

De diëtiste geeft hem een tabel mee die gebaseerd is op het rekenmodel. Zie de tabel. In de tabel is t de tijd in maanden vanaf het moment dat de man dagelijks 2520 kcal aan energie consumeert, G het gewicht van de man in kg en A het aantal kg dat hij nog moet afvallen.

tabel

t	0	1	2	3	4	5	6
G	91,0	89,1	87,4	85,9	84,6	83,4	82,4
A	16,0	14,1	12,4	10,9	9,6	8,4	7,4

In de tabel is bijvoorbeeld af te lezen dat de man, wanneer hij zich aan het dieetadvies houdt, na drie maanden een gewicht G heeft van 85,9 kg.
Dat is 10,9 kg boven het gewenste gewicht van 75 kg, dus het aantal nog af te vallen kg A is 10,9.
Uit de tabel blijkt dat A bij benadering exponentieel afneemt. Hierbij hoort de formule:

$$A = 16 \cdot 0{,}88^t$$ (met t in maanden)

De man houdt zich nauwgezet aan het dieetadvies.

3p **4** Bereken het gewicht van de man na acht maanden.

4p **5** Bereken na hoeveel maanden de man 12 kg is afgevallen.

Tai Sai

Tai Sai is een dobbelspel dat veel in casino's wordt gespeeld. Het spel komt oorspronkelijk uit China. Tai Sai betekent zoiets als 'Groot Klein'. Het wordt gespeeld met drie verschillend gekleurde dobbelstenen die op een speeltafel worden gegooid. Vervolgens wordt de som van de ogen van de dobbelstenen bepaald.

4p **6** Bereken hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn waarbij de som van de ogen 6 is.

De speler kan inzetten op Tai (Groot) of Sai (Klein).
Bij Tai gokt de speler erop dat de som van de ogen van de drie dobbelstenen 11, 12, 13, 14, 15, 16 of 17 is.
Bij Sai gokt de speler erop dat de som van de ogen 4, 5, 6, 7, 8, 9 of 10 is.
Volgens de spelregels win je niets als er drie keer een 1 of drie keer een 6 gegooid wordt.

De uitkomst van een worp kan Tai, Sai of geen van beide zijn.
De kans op Tai is even groot als de kans op Sai. De kans op Tai is $\frac{107}{216}$.

4p **7** Toon aan dat de kans op Tai inderdaad $\frac{107}{216}$ is.

Een speler speelt het spel 30 keer en gokt elke keer op Tai.

3p **8** Bereken de kans dat er precies 15 van de 30 keer Tai wordt gegooid.

Een andere speler speelt het spel 25 keer en gokt elke keer op Tai.
Hij zet elk spel 10 euro in. Dat kost hem dus in totaal 250 euro. Iedere keer als hij goed heeft gegokt, krijgt hij 20 euro. Als hij fout heeft gegokt, krijgt hij niets.

5p **9** Bereken de kans dat deze speler na 25 keer spelen meer dan 250 euro aan uitbetaling heeft ontvangen.

Bij het spel Tai Sai kan een speler ook inzetten op Wu (Vijf). Hierbij wordt het aantal vijven geteld dat gegooid wordt met de drie dobbelstenen.
In tabel 1 staan de mogelijkheden die zich hierbij kunnen voordoen.

tabel 1

aantal vijven	**uitbetaling bij inzetten op Wu**
0	niets (inzet kwijt)
1	twee keer de inzet
2	drie keer de inzet
3	dertien keer de inzet

Een speler zet 10 euro in en wil onderzoeken bij welke gok, Wu of Tai, de verwachtingswaarde voor de uitbetaling het hoogst is.
Daartoe heeft hij in tabel 2 en tabel 3 de (nog onvolledige) kansverdelingen voor zijn uitbetaling gemaakt. De kansverdelingen staan ook op de uitwerkbijlage.

tabel 2

Wu				
uitkomst	geen vijven	één vijf	twee vijven	drie vijven
uitbetaling	0			130
kans	$\frac{125}{216}$			$\frac{1}{216}$

tabel 3

Tai		
uitkomst	geen Tai	wel Tai
uitbetaling		20
kans		$\frac{107}{216}$

5p **10** Onderzoek bij welke gok, Wu of Tai, de verwachtingswaarde van de uitbetaling het hoogst is. Geef de berekeningen en gebruik hierbij de uitwerkbijlage.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ______________

10

tabel 2

Wu				
uitkomst	geen vijven	één vijf	twee vijven	drie vijven
uitbetaling	0			130
kans	$\frac{125}{216}$			$\frac{1}{216}$

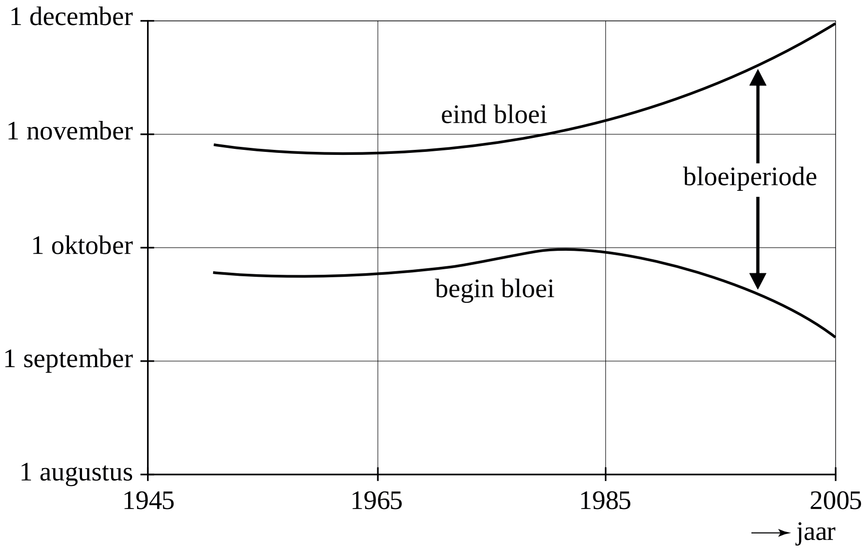
tabel 3

Tai		
uitkomst	geen Tai	wel Tai
uitbetaling		20
kans		$\frac{107}{216}$

Bloeiperiode

In Zuid-Engeland onderzoekt men sinds 1950 de lengte van de bloeiperiode van paddenstoelen.
Na vele duizenden waarnemingen bij 315 verschillende paddenstoelsoorten hebben Britse onderzoekers geconcludeerd dat er sinds 1980 een duidelijke verandering van de gemiddelde lengte van de bloeiperiode zichtbaar is.
Zie figuur 1.

figuur 1 Bloeiperiode paddenstoelen



Van 1950 tot 1980 bleef de lengte van de bloeiperiode ongeveer gelijk. Daarna is deze in de periode van 1980 tot 2005 toegenomen van 30 tot 83 dagen.
In deze opgave nemen we aan dat de lengte van de bloeiperiode sinds 1980 exponentieel toeneemt.

4p **11** Bereken met de gegevens van 1980 en 2005 het jaarlijkse groeipercentage vanaf 1980 in twee decimalen nauwkeurig.

Vanaf 1980 is de lengte van de bloeiperiode bij benadering te beschrijven met de formule:

$$B = 30 \cdot 1{,}042^t$$

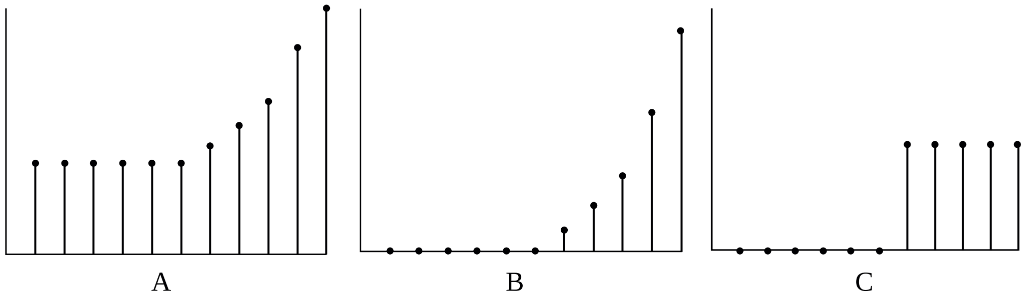
Hierin is B de lengte van de bloeiperiode in dagen en t de tijd in jaren vanaf 1980.

De lengte van de bloeiperiode is van 1980 tot 2005 ruimschoots verdubbeld.

3p **12** Bereken in hoeveel jaar de bloeiperiode twee keer zo lang wordt.

Bij de lengte van de bloeiperiode, zoals die aangegeven is in figuur 1, kun je een toenamediagram tekenen. In figuur 2 staan drie toenamediagrammen, waarvan er één goed past bij de bloeiperiode tussen 1950 en 2005.

figuur 2

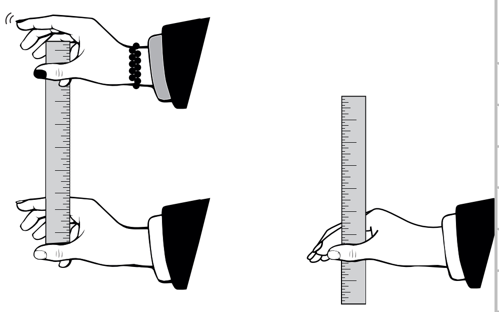


3p **13** Geef met een toelichting aan welk toenamediagram het juiste is.

Reactiesnelheid

Het themanummer van het blad Psychologie Magazine was in 2008 geheel gewijd aan De Man. Het nummer bevatte verschillende testjes waarmee je kon bepalen hoe mannelijk of vrouwelijk je bent. Een van de testjes ging over reactiesnelheid, een punt waarop mannen en vrouwen nogal verschillen.

figuur 1



tabel 1

gemiddelde vang-afstand (cm)	reactietijd (milli-seconden)	gemiddelde vang-afstand (cm)	reactietijd (milli-seconden)
0	0	16	181
2	64	18	192
4	90	20	202
6	111	22	212
8	128	24	221
10	143	26	230
12	156	28	239
14	169	30	247

Voor deze test zijn twee personen nodig en één liniaal.
Persoon 1 houdt de liniaal bovenaan vast en persoon 2 houdt duim en wijsvinger rond het 0-streepje (niet vastpakken). Persoon 1 laat de liniaal los en persoon 2 pakt de liniaal zo snel mogelijk met duim en wijsvinger. Zie figuur 1.
Het afgelezen aantal cm op de liniaal wordt de vangafstand genoemd. Na vijf pogingen wordt de **gemiddelde vangafstand** berekend. In tabel 1 is deze gemiddelde vangafstand omgerekend naar **reactietijd**.

De 18-jarige Henry doet de test en haalt de volgende resultaten: 16,2 cm, 17,2 cm, 16,1 cm, 16,7 cm en 16,8 cm. Hij berekent zijn gemiddelde vangafstand en bepaalt daarna met behulp van lineair interpoleren in tabel 1 zijn reactietijd.

4p **14** Laat zien dat Henry zo op een reactietijd van ongeveer 184 milliseconden uitkomt.

Uit een Amerikaans onderzoek onder mannen en vrouwen tussen de 15 en 30 jaar kwam naar voren dat de reactietijd, volgens deze test bepaald, normaal verdeeld is. Zie tabel 2.

tabel 2 reactietijd (milliseconden)

	gemiddelde	**standaardafwijking**
mannen	$m = 178$	$s = 14$
vrouwen	$m = 195$	$s = 18$

Henry ziet dat volgens dit onderzoek veel mannen sneller zijn dan hij.

4p **15** Bereken hoeveel procent van de mannen sneller is dan Henry met zijn reactietijd van 184 milliseconden.

Tabel 1 is gemaakt met de formule $R = 100 \cdot \sqrt{\frac{A}{4,9}}$.

Hierin is R de reactietijd in milliseconden en A de gemiddelde vangafstand in cm.
In het vervolg van deze opgave gebruiken we deze formule in plaats van tabel 1.

6p **16** Bereken wat de gemiddelde vangafstand van een man maximaal mag zijn om tot de 5% snelste mannen te behoren.

Twee willekeurige vrouwen tussen de 15 en 30 jaar doen de test.

5p **17** Bereken de kans dat zij allebei een reactietijd hebben die sneller is dan de gemiddelde reactietijd van mannen.

Vanaf de leeftijd van 30 jaar neemt de gemiddelde reactietijd toe: oudere mensen reageren gemiddeld genomen trager dan jonge mensen. In sommige situaties kan dat tot problemen leiden. Om bijvoorbeeld veilig te kunnen deelnemen aan het verkeer moet je niet al te traag reageren.
Niet alleen de gemiddelde reactietijd neemt toe, ook de standaardafwijking verandert. Zie tabel 3. Hierin is t de leeftijd in jaren, met $t \geq 30$.

tabel 3 reactietijd (milliseconden)

	gemiddelde	**standaardafwijking**
mannen	$m = 178 + 1,2 \cdot (t - 30)$	$s = 14 + 0,3 \cdot (t - 30)$

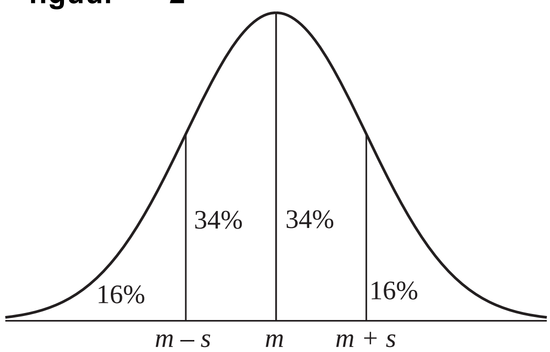
Uit de gegevens van tabel 3 volgt dat $m + s = 147 + 1,5 \cdot t$.

3p **18** Laat dit met een berekening zien.

De uitdrukking $m + s$ speelt een rol bij een vuistregel van de normale verdeling. Zie figuur 2. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat tussen de grenzen $m - s$ en $m + s$ 68% ligt.

3p **19** Bereken vanaf welke leeftijd 16% van de mannen een reactietijd heeft van meer dan 250 milliseconden.

figuur 2



Vogeltrek

gierzwaluw

Vogels die jaarlijks op een andere plaats overwinteren en na de winter terugkeren naar hun broedgebied, worden trekvogels genoemd.
Onderzoekers houden jaarlijks de terugkeerdatum van diverse soorten trekvogels bij. Deze terugkeerdatum is sinds 1980 bij vrijwel alle trekvogelsoorten steeds vroeger geworden.

Uit Engels onderzoek blijkt bijvoorbeeld dat vanaf 1980 de terugkeerdatum van de gierzwaluw per 10 jaar 3 dagen vroeger wordt.
In 1980 keerde de gierzwaluw op 2 mei terug.

3p **20** Bereken op welke datum de gierzwaluw in 2020 zal terugkeren als deze trend zich voortzet.

Om voorspellingen voor de toekomst te kunnen doen, wordt een model opgesteld dat deze trend beschrijft. In dit model houden we geen rekening met schrikkeljaren. De dagen van het jaar worden genummerd: 1 januari krijgt dagnummer 1 en 31 december dus dagnummer 365.
Het dagnummer waarop de gierzwaluw in het model terugkeert, noemen we A.
Bij de datum 2 mei hoort dagnummer $A = 122$. Zoals eerder vermeld, wordt de terugkeerdatum van de gierzwaluw per 10 jaar 3 dagen vroeger.
We noemen de tijd in jaren t, met $t = 0$ in 1980.
Er kan een lineaire formule worden opgesteld waarin A wordt uitgedrukt in t.

3p **21** Stel deze formule op.

In Engeland wordt de gierzwaluw ook wel de honderddagenvogel genoemd, omdat hij gemiddeld 100 dagen in het land verblijft voordat hij weer naar zijn wintergebied vertrekt. Uit hetzelfde onderzoek blijkt dat deze vertrekdatum sinds 1980 ook verandert. Deze wordt elke 10 jaar ongeveer 0,6 dag vroeger. Samen met het vroeger worden van de terugkeerdatum leidt dit ertoe dat de verblijfsduur langer wordt.
Ga ervan uit dat in 1980 de verblijfsduur 100 dagen is.

4p **22** Bereken in welk jaar de gierzwaluw dan voor het eerst meer dan 115 dagen in Engeland verblijft als de genoemde trends zich voortzetten.