Er zijn nog drie wachtenden voor u …

Een callcenter verleent telefonische diensten voor bedrijven, zoals het opnemen van bestellingen of het afhandelen van vragen.
Het aantal telefoontjes en de gespreksduur per telefoontje variëren in een callcenter. Als je zo’n callcenter belt, kun je soms direct geholpen worden. Het is ook mogelijk dat je te horen krijgt: “Er zijn nog drie wachtenden voor u”. Er is dan een rij van wachtenden ontstaan.

Je belt naar een callcenter. De kans K dat je moet wachten, hangt af van het aantal telefonisten T en van het product $a \cdot g$. In dit product is:
a het gemiddeld aantal telefoontjes per minuut;
g de gemiddelde gespreksduur in minuten.
De kans K dat je moet wachten, vind je in tabel 1. Deze tabel staat vergroot op de bijlage.

Je ziet dat de tabel maar voor de ‘helft’ is ingevuld. We bekijken in deze opgave namelijk alleen de situatie dat er meer telefonisten beschikbaar zijn dan er gemiddeld in gesprek zijn, want anders ontstaat er altijd een rij wachtenden. Daarom moet gelden $T > a \cdot g$.

tabel 1 De kans K dat een beller moet wachten

→ *aantal telefonisten T*

$a \cdot g$ ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		0,333	0,091	0,020	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2			0,444	0,174	0,060	0,018	0,005	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3				0,509	0,236	0,099	0,038	0,013	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4					0,554	0,285	0,135	0,059	0,024	0,009	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5						0,588	0,324	0,167	0,081	0,036	0,015	0,006	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6							0,614	0,357	0,196	0,101	0,049	0,022	0,010	0,004	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
7								0,635	0,385	0,222	0,121	0,063	0,031	0,014	0,006	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000
8									0,653	0,409	0,245	0,140	0,076	0,039	0,019	0,009	0,004	0,002	0,001	0,000
9										0,669	0,430	0,266	0,158	0,089	0,048	0,025	0,012	0,006	0,003	0,001
10											0,682	0,449	0,285	0,174	0,102	0,057	0,031	0,016	0,008	0,004
11												0,694	0,466	0,303	0,190	0,115	0,066	0,037	0,020	0,010
12													0,704	0,482	0,319	0,205	0,127	0,076	0,044	0,024
13														0,714	0,496	0,334	0,219	0,138	0,085	0,050
14															0,722	0,508	0,348	0,232	0,150	0,094
15																0,730	0,520	0,361	0,244	0,160
16																	0,737	0,531	0,374	0,256
17																		0,744	0,541	0,385
18																			0,750	0,551
19																				0,755
20																				

In callcenter DirectCall zijn ’s ochtends 11 telefonisten aanwezig. Er komen per minuut gemiddeld 2 telefoontjes binnen. De gespreksduur van die telefoontjes is gemiddeld 4 minuten.

3p **1** ☐ Laat zien dat de kans dat een beller ’s ochtends moet wachten, ongeveer 0,25 is.

Voor een beller is de *wachttijd* belangrijker dan de *kans* op wachten.
Een wiskundige heeft een formule gemaakt voor de *gemiddelde wachttijd* in minuten:

$$gemiddelde\ wachttijd = \frac{K \cdot g}{T - a \cdot g}$$

3p **2** □ Bereken hoe lang een beller 's ochtends gemiddeld moet wachten.
Geef het antwoord in hele seconden.

's Middags zijn er bij DirectCall 14 telefonisten aanwezig. Er komen per minuut gemiddeld 8 telefoontjes binnen, die gemiddeld 1,5 minuut duren.
Een van de telefonisten doet de volgende uitspraak:
"Als het aantal binnenkomende telefoontjes halveert en het aantal telefonisten ook, dan verandert de gemiddelde wachttijd niet".

5p **3** □ Onderzoek met behulp van de formule voor de gemiddelde wachttijd of deze uitspraak juist is.

Bij DirectCall komen 's avonds per minuut gemiddeld 4 telefoontjes binnen, die elk gemiddeld 3 minuten duren.
DirectCall krijgt veel klachten over de wachttijd 's avonds. Daarom wil de directie dat er zoveel telefonisten zijn dat de gemiddelde wachttijd kleiner is dan vijftien seconden.
Je kunt dit aantal telefonisten bepalen door te onderzoeken wanneer $\frac{K \cdot 3}{T - 12} < 0,25$ is.

3p **4** □ Leg dit uit.

5p **5** □ Hoeveel telefonisten zijn er 's avonds minimaal nodig? Licht je antwoord toe.

Bijlage bij de opgave 'Er zijn nog drie wachtenden voor u …'

De kans *K* dat een beller moet wachten

aantal telefonisten T →

$a \cdot g$ ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		0,333	0,091	0,020	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2			0,444	0,174	0,060	0,018	0,005	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3				0,509	0,236	0,099	0,038	0,013	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4					0,554	0,285	0,135	0,059	0,024	0,009	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5						0,588	0,324	0,167	0,081	0,036	0,015	0,006	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6							0,614	0,357	0,196	0,101	0,049	0,022	0,010	0,004	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
7								0,635	0,385	0,222	0,121	0,063	0,031	0,014	0,006	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000
8									0,653	0,409	0,245	0,140	0,076	0,039	0,019	0,009	0,004	0,002	0,001	0,000
9										0,669	0,430	0,266	0,158	0,089	0,048	0,025	0,012	0,006	0,003	0,001
10											0,682	0,449	0,285	0,174	0,102	0,057	0,031	0,016	0,008	0,004
11												0,694	0,466	0,303	0,190	0,115	0,066	0,037	0,020	0,010
12													0,704	0,482	0,319	0,205	0,127	0,076	0,044	0,024
13														0,714	0,496	0,334	0,219	0,138	0,085	0,050
14															0,722	0,508	0,348	0,232	0,150	0,094
15																0,730	0,520	0,361	0,244	0,160
16																	0,737	0,531	0,374	0,256
17																		0,744	0,541	0,385
18																			0,750	0,551
19																				0,755
20																				

Geld uit de muur

In Nederland staan ongeveer zevenduizend geldautomaten. Bij deze automaten kun je contant geld opnemen van je betaalrekening.
De geldautomaten verstrekken uitsluitend biljetten van 10, 20 en 50 euro.
De automaat laat je kiezen uit een aantal vaste bedragen of voor de optie ‘ander bedrag’, waarbij je inderdaad een ander bedrag kunt kiezen.

Wanneer je 60 euro wilt opnemen, kan de geldautomaat dat op verschillende manieren uitkeren. Zo kun je bijvoorbeeld 1 biljet van 50 euro en 1 van 10 euro krijgen.
Dat is één manier.
Maar ook is mogelijk: 3 biljetten van 20 euro of 6 biljetten van 10 euro.

4p **6** ☐ Op hoeveel verschillende manieren kan de geldautomaat een bedrag van 70 euro uitkeren? Licht je antwoord toe.

In een bepaalde geldautomaat in Gouda zijn van elke soort voldoende biljetten aanwezig.
In dat geval geeft de automaat de biljetten volgens de volgende regels:

- Bedragen onder 50 euro:
  één of twee biljetten van € 10,
  eventueel aangevuld met een biljet van € 20
  (bijvoorbeeld 40 euro: 2 × € 10 en 1 × € 20)

- Bedragen boven 50 euro, die geen veelvoud van 50 euro zijn:
  zoveel mogelijk biljetten van € 50,
  één of twee biljetten van € 10,
  eventueel aangevuld met een biljet van € 20
  (bijvoorbeeld 170 euro: 3 × € 50 en 2 × € 10)

- Bedragen van 50 euro en veelvouden hiervan:
  altijd één biljet van € 10 en twee biljetten van € 20,
  eventueel aangevuld met biljetten van € 50
  (bijvoorbeeld 350 euro: 1 × € 10, 2 × € 20 en 6 × € 50)

In tabel 2 staan de bedragen die op zekere dag bij deze geldautomaat in Gouda zijn opgenomen.

tabel 2

bedrag in euro	aantal keer
10	13
20	47
30	2
50	89
60	1
70	48
100	14
120	1
150	12
200	2
250	5
450	1
750	1

5p **7** ☐ Bereken hoeveel biljetten van € 20 de geldautomaat op deze dag heeft uitgekeerd. Gebruik hierbij de tabel op de uitwerkbijlage.

Het aantal biljetten van 10 euro dat per dag uit deze automaat gehaald wordt, is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 326 en een standaardafwijking van 41.
De geldautomaat wordt dagelijks (ook op zon- en feestdagen) aangevuld tot 400 biljetten van 10 euro.
Het kan natuurlijk gebeuren dat alle biljetten van 10 euro op zijn voordat de automaat weer wordt aangevuld.

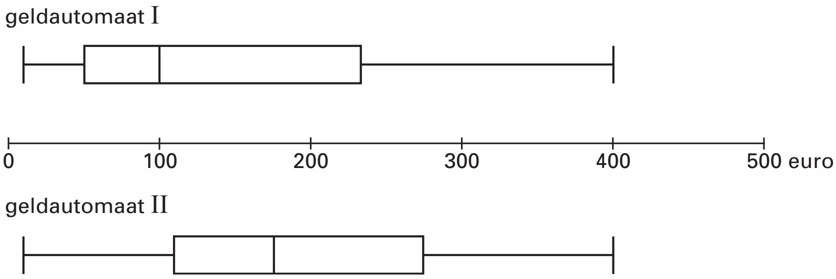
3p **8** □ Bereken op hoeveel dagen van een jaar dat naar verwachting zal gebeuren.

Ook het aantal biljetten van 50 euro dat per dag uit deze automaat gehaald wordt, is bij benadering normaal verdeeld. Het gemiddelde aantal dagelijks uitgekeerde biljetten is 140 en de automaat wordt dagelijks aangevuld tot 175 biljetten van € 50. Op 1,5% van de dagen is dat niet voldoende.

4p **9** □ Bereken de standaardafwijking van het dagelijks aantal uitgekeerde biljetten van 50 euro. Rond af op één decimaal.

Het aantal geldopnames en de grootte van de opgenomen bedragen variëren van geldautomaat tot geldautomaat. Het maakt natuurlijk uit waar de geldautomaat staat. Zo zal een geldautomaat in een stadscentrum dagelijks meer geldopnames hebben dan een geldautomaat in een dorp met weinig inwoners.
In figuur 1 staan twee boxplots die betrekking hebben op de opgenomen bedragen op een zekere dag bij twee geldautomaten in twee verschillende steden.

figuur 1



Hieronder staan drie uitspraken over deze boxplots.

a Bij geldautomaat II is er die dag in totaal meer geld opgenomen dan bij geldautomaat I.
b Het kleinste en het grootste bedrag dat die dag bij beide geldautomaten zijn opgenomen zijn hetzelfde.
c Bij geldautomaat I worden relatief meer kleine bedragen opgenomen dan bij geldautomaat II.

5p **10** □ Geef van elke uitspraak aan of deze af te leiden is uit figuur 1. Licht je antwoorden toe.

Uitwerkbijlage bij vraag 7

Vraag 7

bedrag in euro	per opname aantal € 10	aantal € 20	aantal € 50	aantal opnames	aantal biljetten van € 20
10				13	
20				47	
30				2	
50				89	
60				1	
70				48	
100				14	
120				1	
150				12	
200				2	
250				5	
450				1	
750				1	

Dvd-spelers bestellen

Een winkelier verkoopt per jaar 1200 dvd-spelers, gelijkmatig over het jaar gespreid. Eén groothandel levert die dvd-spelers aan de winkelier. Elke keer als de groothandel een bestelling dvd-spelers aflevert, is de voorraad precies op.
Voor iedere bestelling rekent de groothandel 400 euro bestelkosten, onafhankelijk van het aantal bestelde dvd-spelers.
Het in voorraad houden van een dvd-speler kost de winkelier 16 euro per jaar.

Er is niet genoeg magazijnruimte om alle 1200 dvd-spelers in één keer te bestellen. Dat is ook duur, want het zou betekenen dat er in dat jaar een gemiddelde voorraad zou zijn van $\frac{1}{2} \times 1200$ dvd-spelers. Dat zou $1 \times 400 + \frac{1}{2} \times 1200 \times 16 = 10000$ euro kosten voor het bestellen en in voorraad houden.
Het lijkt goedkoper als de winkelier vaker per jaar een kleiner aantal dvd-spelers bestelt.

De winkelier overweegt om 100 dvd-spelers per maand te bestellen.

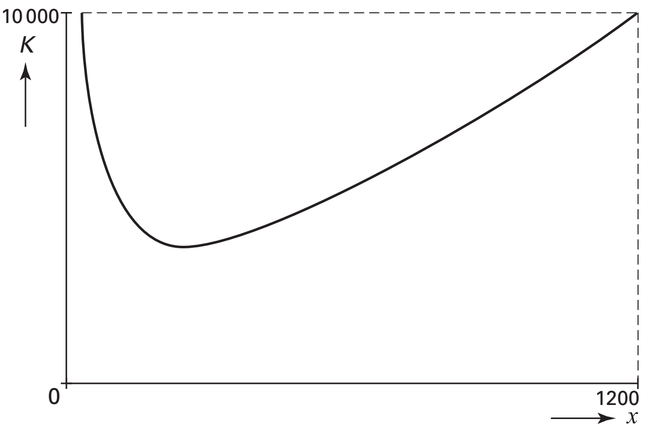
3p **11** ☐ Bereken op de hierboven beschreven manier de totale kosten per jaar voor het bestellen en in voorraad houden.

Het aantal dvd-spelers dat de winkelier per keer bestelt, noemen we x. De winkelier bestelt elke keer evenveel dvd-spelers.
De totale kosten in euro per jaar voor het bestellen en in voorraad houden van de dvd-spelers noemen we K.
Met de volgende formule kan de winkelier K berekenen:

$$K = \frac{480000}{x} + 8x$$

5p **12** ☐ Leid deze formule af uit de gegevens over bestelkosten en voorraadkosten van de 1200 dvd-spelers.

figuur 2



In figuur 2 staat de grafiek van K. Hierin lees je bijvoorbeeld af dat bij $x = 1200$ de waarde $K = 10\,000$ hoort: als de 1200 dvd-spelers in één keer worden besteld, zijn de kosten voor bestellen en in voorraad houden 10 000 euro.

De formule voor K is ook te schrijven als $K = 480\,000 \cdot x^{-1} + 8x$.

5p **13** ☐ Stel de afgeleide van K op en toon met behulp van die afgeleide aan dat de kosten K minimaal zijn bij een bestelling van 245 dvd-spelers per keer.

Een bestelling van 245 dvd-spelers per keer is wel mogelijk, maar is onhandig voor de groothandel. De groothandel wil liever op vaste tijden leveren, bijvoorbeeld eens per maand of eens per twee maanden. Als de winkelier per een geheel aantal maanden bestelt, krijgt hij van de groothandel 10% korting op de bestelkosten.

5p **14** ☐ Welke manier is voor de winkelier het voordeligst? Licht je antwoord toe met een berekening.

De Notenclub

Op de Vlaamse en de Nederlandse televisie is heel vaak het programma *de Notenclub* uitgezonden, een spel met muziek. In dat programma moeten twee teams de titel van een song raden aan de hand van één zin uit de tekst.
De zin bestaat uit zes woorden. Die woorden zijn in het begin niet te zien, maar worden tijdens het spel één voor één zichtbaar. Tussendoor wordt door de teams gezongen.

Twee van de zes woorden staan op een rood vak. Vier woorden staan op een blauw vak.
Bij de start van een ronde staan er zes vakken met de getallen 1 tot en met 6. Het woord en de kleur van het vak kun je niet zien. Zie figuur 3.

figuur 3

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*

De twee rode en de vier blauwe vakken kunnen in elk spel een andere volgorde hebben.

3p **15** ☐ Hoeveel verschillende volgordes zijn mogelijk met twee rode en vier blauwe vakken? Licht je antwoord toe.

Een team kiest één van de getallen 1, 2, 3, 4, 5 of 6. Er verschijnt een woord in het gekozen vak en dit vak kleurt rood of blauw.
Het vak is rood: de beurt gaat naar het andere team.
Het vak is blauw: het team zingt een lied waarin het gevonden woord voorkomt.
Het team houdt de beurt en kiest nog een getal uit de overgebleven mogelijkheden.

Zodra een team de zin herkent en de songtitel raadt, is de ronde afgelopen.
In deze opgave gaan we ervan uit dat een team altijd de titel van de song raadt wanneer er vier blauwe vakken zijn gekozen en niet eerder of later. We nemen verder aan dat het kiezen van de getallen 1 tot en met 6 aselect gebeurt.

Een team begint. Het is mogelijk dat dit team wint, omdat de teamleden achter elkaar de vier blauwe vakken kiezen.
3p **16** ☐ Bereken de kans op deze gebeurtenis.

Team A en team B spelen tegen elkaar.
Team A begint.
Team A kiest vak 4. Hier verschijnt het woord “love” in een blauw vak. Ze zingen een lied en kiezen daarna vak 2. Daar verschijnt het woord “my” in een rood vak.
Zie figuur 4.

figuur 4

1	*my*	*3*	*love*	*5*	*6*

Omdat vak 2 rood is, gaat de beurt nu naar team B.
Er is één rood en één blauw vak gekozen. Dus zijn er nog drie blauwe vakken en één rood vak over. Als team B nu het rode vak zou kiezen, wint team A.
Ook als team B niet meteen het rode vak kiest, kan team A de ronde nog winnen.
Als team B bijvoorbeeld eerst een blauw vak kiest en daarna een rood vak, wint team A ook.
Zo zijn er verschillende mogelijkheden met team A als winnaar van de ronde.

5p **17** □ Bereken de kans dat team A deze ronde wint.

De Wet van Moore

Het Amerikaanse bedrijf Intel is een zeer grote producent van computerchips. Gordon Moore was in 1968 een van de oprichters van het bedrijf.
Deze opgave gaat over het aantal transistoren in een computerchip. (Een transistor is een elektronische schakeling.)
In 1965 deed Moore daar een voorspelling over:
"Het aantal transistoren in een computerchip zal tussen 1965 en 1975 exponentieel groeien."
Moore heeft meer dan gelijk gekregen: de voorspelling is zelfs tot het jaar 2000 uitgekomen! Zijn voorspelling is men de Wet van Moore gaan noemen.

In tabel 3 zie je hoeveel transistoren er in de chips van Intel zitten. Ook zie je in welk jaar die chips op de markt zijn gebracht.

tabel 3

introductiejaar	naam chip	aantal transistoren
1971	4004	2 250
1972	8008	2 500
1974	8080	5 000
1978	8086	29 000
1982	286	120 000
1985	386	275 000
1989	486 DX	1 180 000
1993	Pentium I	3 100 000
1997	Pentium II	7 500 000
1999	Pentium III	24 000 000
2000	Pentium 4	42 000 000

In de tabel zie je dat het aantal transistoren tussen 1971 en 1972 met 250 toeneemt.
Stel dat het aantal transistoren in de jaren daarna *lineair* toe zou nemen met 250 per jaar.

3p **18** □ In welk jaar zou dan het aantal van 5000 transistoren per chip zijn bereikt? Licht je antwoord toe.

In werkelijkheid was de toename dus exponentieel. Zo is in de periode van 1971 tot 2000 het aantal transistoren per chip toegenomen van 2250 tot 42 miljoen.

3p **19** □ Bereken hiermee de groeifactor per jaar in vier decimalen nauwkeurig.

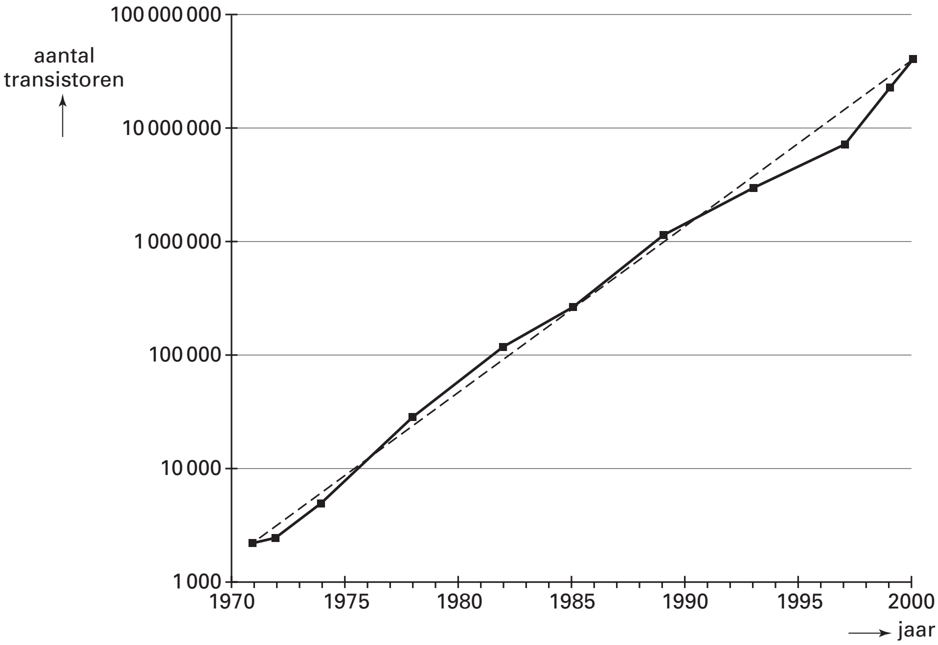
De Wet van Moore in formulevorm is:

$$A = 2250 \cdot 1{,}404^t$$

Hierin is A het aantal transistoren per chip en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1971.

In figuur 5 is een rechte lijn getekend die weergegeven is als stippellijn. Dit is de grafiek van A. Merk op dat de schaalverdeling op de verticale as logaritmisch is. In figuur 5 staat ook de grafiek getekend van de gegevens uit tabel 3.

figuur 5



In de figuur hoort het derde punt van boven bij de Pentium II-chip uit het jaar 1997. Het is duidelijk zichtbaar dat het aantal transistoren in deze chip nogal afwijkt van de voorspelling volgens de Wet van Moore.
In de Pentium II-chip zitten volgens de tabel 7 500 000 transistoren.

4p **20** ☐ Bereken hoeveel procent dit aantal afwijkt van de voorspelling volgens de formule van de Wet van Moore.

Met behulp van de formule kunnen we voorspellen wanneer er 1 miljard transistoren in een computerchip zitten.

4p **21** ☐ Bereken hoeveel jaar na 1971 dit het geval is.