Voetbalwetten

Er zijn sportstatistici die alles bijhouden op het gebied van de Europese voetbalcompetities. Met deze informatie proberen ze allerlei verbanden, de zogenaamde voetbalwetten (zo worden ze genoemd in het tijdschrift Natuur, Wetenschap en Techniek), te ontdekken. In deze opgave bekijken we een aantal van deze voetbalwetten voor de Nederlandse Eredivisie.
In de Nederlandse Eredivisie spelen 18 voetbalclubs tegen elkaar. Iedere club speelt twee wedstrijden, een thuiswedstrijd en een uitwedstrijd, tegen elke andere club.

foto

3p **1** Toon aan dat er in de Nederlandse Eredivisie in totaal 306 wedstrijden worden gespeeld.

Als een wedstrijd in een gelijkspel eindigt, krijgt elk van beide clubs 1 punt. Als een wedstrijd niet in een gelijkspel eindigt, krijgt de winnende club 3 punten en de verliezende club 0 punten.
In de competitie 2007/2008 behaalden de 18 clubs samen 858 punten.

4p **2** Bereken bij hoeveel wedstrijden er in dit seizoen gelijk werd gespeeld.

Een van de voetbalwetten luidt: de kans op gelijkspel is altijd één op vijf.
Deze kans blijkt nauwelijks af te hangen van het verschil in speelsterkte tussen twee clubs.
In een weekend spelen alle clubs één wedstrijd.

5p **3** Bereken de kans dat er in meer dan de helft van deze wedstrijden gelijk wordt gespeeld.

Een andere voetbalwet luidt: een doelpunt valt eens in het half uur.
Het gemiddeld aantal doelpunten per wedstrijd is namelijk 3,1.
Er is zelfs een formule waarmee je de kans kunt uitrekenen op het aantal doelpunten in een wedstrijd. Deze formule luidt:

$$\mathrm{P}\ (n \text{ doelpunten in een wedstrijd}) = 0{,}045 \cdot \frac{3{,}1^n}{n!}$$

Het komt veel voor dat er in een wedstrijd twee of drie doelpunten vallen, zo hebben de sportstatistici vastgesteld.

4p **4** Bereken met behulp van de formule de kans dat er in een wedstrijd twee of drie doelpunten vallen.

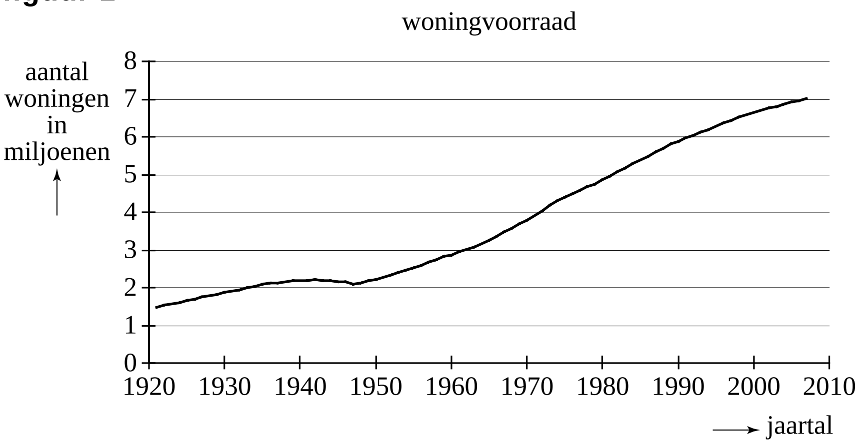
In een ander weekend worden er zeven wedstrijden gespeeld.

5p **5** Bereken de kans dat er in hoogstens twee wedstrijden geen enkel doelpunt valt.

Woningvoorraad

In de Arnhemse nieuwbouwwijk Schuytgraaf werd op 5 november 2007 gevierd dat de woningvoorraad (het aantal woningen) in Nederland de grens van de zeven miljoen had bereikt.
Rond 1896 doorbrak de woningvoorraad de grens van één miljoen woningen. In 1934 werd de grens van twee miljoen bereikt. Hierna duurde het tot 1962 voordat de grens van de drie miljoen woningen werd gepasseerd. In 1992 bereikte de woningvoorraad de zes miljoen, en in 2007 is dus de grens van de zeven miljoen woningen overschreden. Zie figuur 1.

figuur 1



In de periode 1962 – 1992 is het aantal woningen vrijwel lineair gestegen van 3 miljoen tot 6 miljoen. Daarbij hoort een formule:

$$W = a \cdot t + b$$

Hierin is W het aantal woningen in miljoenen en t het aantal jaren na 1962.

3p **6** Bereken a en b.

Er zijn twee soorten woningen: huurwoningen en koopwoningen. Door de jaren heen is de samenstelling van de woningvoorraad sterk veranderd. Waren in het verleden de meeste woningen huurwoningen, nu zijn het vooral koopwoningen. Zo zie je in de tabel dat in 1956 nog geen drie tiende deel van de woningen een koopwoning was, maar dat in 2006 al ruim de helft van de woningen een koopwoning was.

tabel

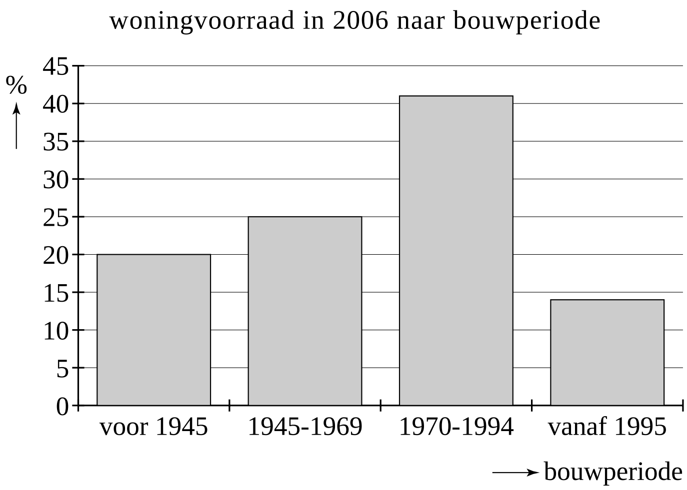
jaar (meting op 1 juli)	1956	1971	1984	1995	2006
koopwoningendeel K	0,29	0,35	0,41	0,47	0,54

Dit koopwoningendeel K blijkt in de periode 1956 – 2006 bij benadering exponentieel te groeien.
Op basis van de gegevens in de tabel kan geconcludeerd worden dat deze groei ongeveer 1,25% per jaar bedraagt.

4p **7** Toon met behulp van de tabelgegevens van 1956 en 2006 aan dat deze groei inderdaad ongeveer 1,25% per jaar bedraagt.

Er worden ieder jaar nieuwe huizen gebouwd en er worden maar weinig huizen gesloopt. Daardoor zijn er zowel nieuwe als oude(re) huizen. Zie figuur 2.
Je ziet daarin bijvoorbeeld dat van de woningvoorraad in 2006 41% gebouwd is in de periode 1970 – 1994.

figuur 2



In 2006 waren er in totaal 6,9 miljoen woningen. Daarvan waren er 900 000 koopwoningen die vóór 1945 gebouwd zijn.

In de tabel kun je aflezen dat in 2006 het koopwoningendeel 0,54 was. In een artikel werd over de woningvoorraad van 2006 geschreven:
“Het koopwoningendeel van de woningen die vóór 1945 gebouwd zijn, is groter dan 0,54.”

5p **8** Onderzoek of de bewering in dat artikel juist is.

Verzekeren

Verzekeringsmaatschappijen krijgen schadegevallen binnen van hun klanten en betalen deze meestal uit. Ze moeten natuurlijk wel genoeg geld hebben om te kunnen uitbetalen.

Verzekeren

We bekijken een verzekeringsmaatschappij met 800 klanten. We gaan ervan uit dat elke klant maximaal één schadegeval per jaar mag indienen. De kans dat een klant een schadegeval indient, is 0,01. Het aantal schadegevallen N per jaar is dan voor deze verzekeringsmaatschappij binomiaal verdeeld.

3p **9** Bereken de kans dat er in een jaar precies 6 schadegevallen worden ingediend.

We gaan uit van een vast schadebedrag van 10 000 euro per geval. Gemiddeld verwacht je dus 8 schadegevallen per jaar met een totaal schadebedrag van 80 000 euro. Maar er kunnen in een jaar méér dan 8 schadegevallen worden ingediend. In het ergste geval dienen alle klanten een schadegeval in, zodat de verzekeringsmaatschappij acht miljoen euro moet uitbetalen. Zoveel geld heeft de verzekeringsmaatschappij niet, en dat hoeft ook niet, want de kans dat dit gebeurt, is heel erg klein.

De kans dat er in een jaar 20 of meer schadegevallen worden ingediend, is al erg klein. Bij 20 schadegevallen moet de verzekeringsmaatschappij slechts 200 000 euro uitbetalen.

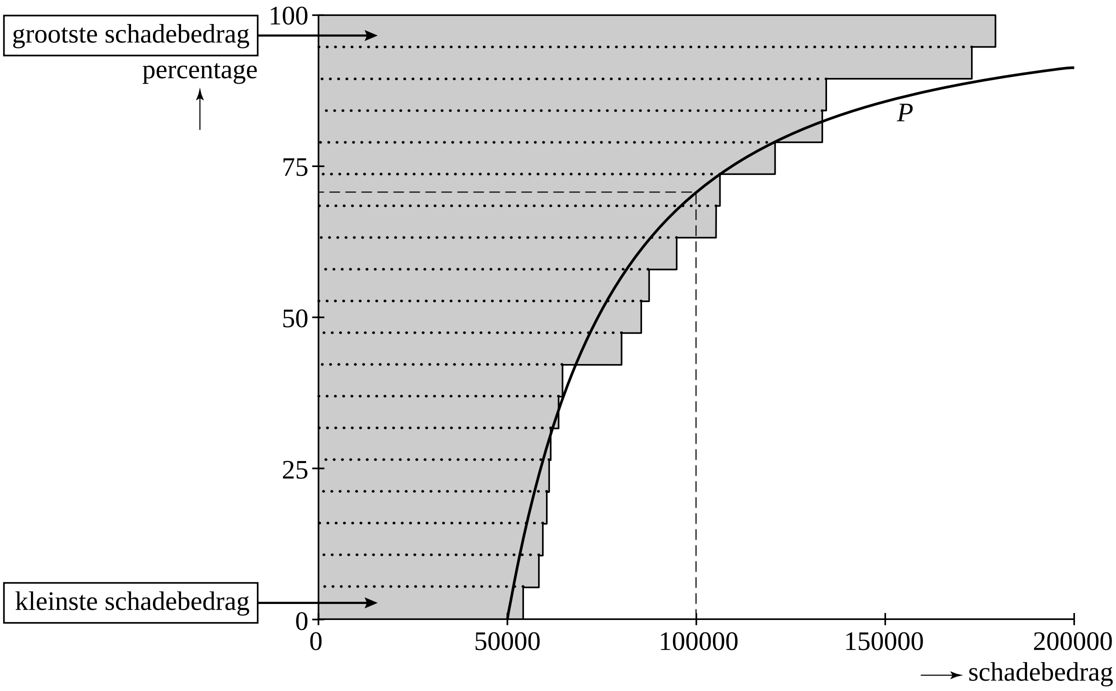
4p **10** Bereken de kans dat de verzekeringsmaatschappij in een jaar 200 000 euro of meer moet uitbetalen.

Herverzekeren

In de praktijk is het iets minder eenvoudig. De schadebedragen kunnen variëren. Soms is er sprake van enorme schadebedragen en soms van een groot aantal tegelijk, zoals na een aardbeving.
Verzekeringsmaatschappijen zorgen ervoor om niet alleen een bedrag te reserveren, maar ook om een deel van het risico te **herverzekeren** bij een andere verzekeringsmaatschappij.
Voor alle schadebedragen boven de 50 000 euro krijgt de verzekeraar het gedeelte bóven de 50 000 euro dan terug van de herverzekeraar. De klanten merken hier niets van.

Voor de herverzekeraar is het dus belangrijk om iets te weten over de verdeling van de schadebedragen boven de 50 000 euro.
Dit bekijkt de herverzekeraar op de volgende manier. Alle schadebedragen boven de 50 000 euro worden van klein naar groot boven elkaar gezet, met horizontaal het bijbehorende schadebedrag. In 2003 zijn bij een Nederlandse herverzekeraar 19 schadegevallen geconstateerd waarvan het kleinste schadebedrag 55 000 euro is en het grootste 178 000 euro. Deze zijn weergegeven in de onderstaande figuur. Verticaal lees je in de figuur af: het percentage schadegevallen lager dan het bijbehorende schadebedrag of gelijk aan dat schadebedrag.

figuur



Wanneer dit gedaan wordt voor grote aantallen schades, zullen de uiteinden van de horizontale staven de getekende grafiek van P benaderen.
Bij de getekende grafiek hoort de volgende formule:

$$P = 100 - 100 \cdot \left(\frac{50\,000}{x}\right)^{1{,}77}$$

Hierin geeft P aan hoeveel procent van alle schadebedragen die van belang zijn voor de herverzekeraar lager is dan of gelijk aan x euro.
Uit de grafiek van P in de figuur kun je aflezen dat ongeveer 70% van die schadebedragen, bedragen zijn van ten hoogste 100 000 euro.

3p **11** Bereken met behulp van de formule hoeveel procent van de schadebedragen die van belang zijn voor de herverzekeraar hoger dan 150 000 euro is.

De herverzekeraar wil weten welk minimaal schadebedrag hoort bij de 5% grootste schades die hij kan verwachten.

4p **12** Bereken dit schadebedrag met behulp van de formule.

Een aantal Nederlandse verzekeringsmaatschappijen herverzekert zich bij Amerikaanse verzekeringsmaatschappijen. Zij werken met dollars en gebruiken een aangepaste formule van P. De door hen gebruikte formule is afhankelijk van de wisselkoers van dollar en euro.

$$P = 100 - 100 \cdot \left(\frac{71\,396}{y} \right)^{1{,}77}$$

Hierin geeft P ook weer aan hoeveel procent van alle schadebedragen die van belang zijn voor de herverzekeraar lager is dan of gelijk is aan een bepaald bedrag. Maar in deze formule is dat bedrag, y genoemd, in dollar.
Het verband tussen y en x in beide formules is een evenredig verband: $y = a \cdot x$.

4p **13** Toon met behulp van beide formules aan dat het verband tussen y en x inderdaad een evenredig verband is en leg uit wat a in deze situatie betekent.

De frikandel van Beckers

Je zou het misschien niet denken, maar 60 jaar geleden had nog nooit iemand van de frikandel gehoord. In Nederland werd hoogstens een knakworst gegeten voor de lekkere trek.
Jan Beckers uit België was het die daar in 1959 verandering in bracht. Hij ontwikkelde een soort langwerpige gehaktbal die tijdens het frituren niet uit elkaar viel: de frikandel. Als ingrediënten gebruikte hij een nog altijd geheime mix van kippen- en varkensvlees, specerijen en andere smaakmakers.

De door Beckers ontworpen snack werd een enorm succes. Zijn fabriek produceert ongeveer 1,15 miljoen frikandellen per dag, waarvan de helft is bestemd voor de Nederlandse markt, waar men zo'n 600 miljoen frikandellen per jaar eet.

4p **14** Bereken hoeveel procent van de in Nederland gegeten frikandellen afkomstig is van de fabriek van Beckers.

Wie een frikandel in de snackbar koopt, krijgt hoogstwaarschijnlijk een exemplaar van 18,5 centimeter en 85 gram. Dat is de zogenoemde 'original'. Het gewicht van deze frikandellen is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 85,0 gram en een standaardafwijking van 2,4 gram.

3p **15** Bereken hoeveel gram de 10% zwaarste frikandellen minimaal wegen.

Beckers produceert ook wat kleinere frikandellen voor verkoop in de supermarkt. Het gewicht van deze frikandellen is ook weer bij benadering normaal verdeeld. Ze wegen gemiddeld 70,0 gram.
Volgens de Warenwet mag slechts 2% van deze frikandellen minder dan 65,5 gram wegen.

4p **16** Bereken de maximaal toegestane standaardafwijking waarbij aan de eis van de Warenwet wordt voldaan.

In een doos zitten 12 frikandellen. Van deze 12 frikandellen zijn er 4 lichter dan 70 gram. Iemand pakt willekeurig 4 frikandellen uit deze doos.

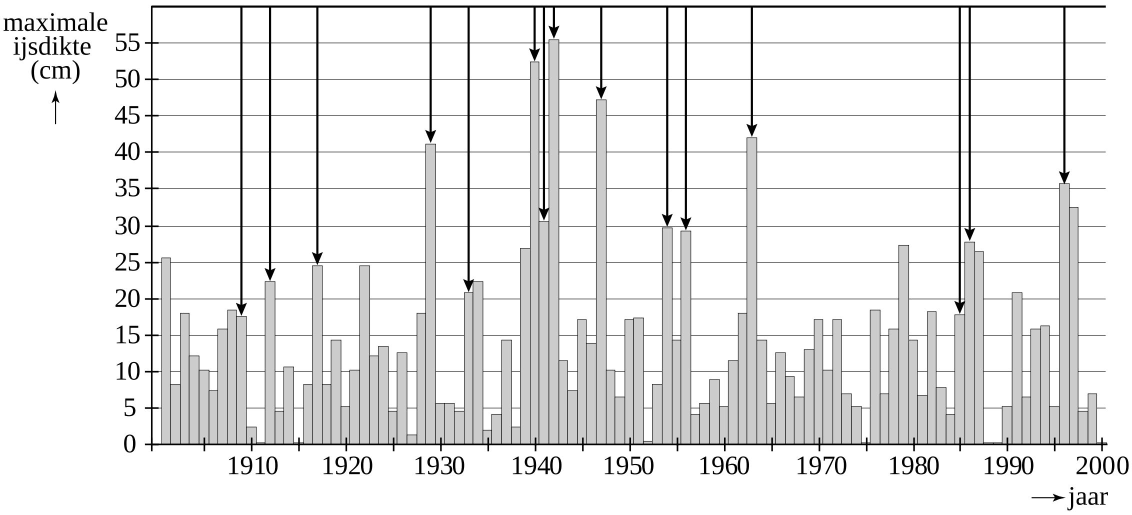
4p **17** Bereken de kans dat er precies één frikandel lichter dan 70 gram bij dit viertal zit.

Elfstedentocht

De schaatsliefhebbers zullen er niet vrolijk van worden. Een rapport van het Intergovernmental Panel on Climate Change voorspelt dat in de 21e eeuw de wereldgemiddelde temperatuur behoorlijk zal stijgen. Deze temperatuurstijging zal ook Friesland niet voorbijgaan. De vraag is: kunnen we nog een Elfstedentocht verwachten?

Er kan al een Elfstedentocht verreden worden bij een ijsdikte van 15 cm. In figuur 1 is van elk jaar van de vorige eeuw de maximale ijsdikte weergegeven. Je ziet dat er heel wat jaren waren waarin het ijs een dikte had van minstens 15 cm. In theorie zouden er dus heel wat Elfstedentochten mogelijk zijn geweest. Toch zijn er in werkelijkheid veel minder Elfstedentochten gereden: de pijltjes markeren de winters waarin er daadwerkelijk een Elfstedentocht[1)] geweest is. De oorzaak hiervan ligt in problemen met de kwaliteit van het ijs, zwak ijs in de steden, bemaling, enzovoort.

figuur 1



Op grond van de gegevens van de vorige eeuw kunnen we, bij een ijsdikte van minstens 15 cm, de kans p berekenen dat er werkelijk een Elfstedentocht gereden wordt. Voor deze kans p geldt de formule:

$$p = \frac{\textit{aantal werkelijk gereden Elfstedentochten}}{\textit{aantal mogelijke Elfstedentochten}}$$

De kans p blijkt ongeveer 0,4 te zijn.

3p **18** Bereken p in drie decimalen nauwkeurig.

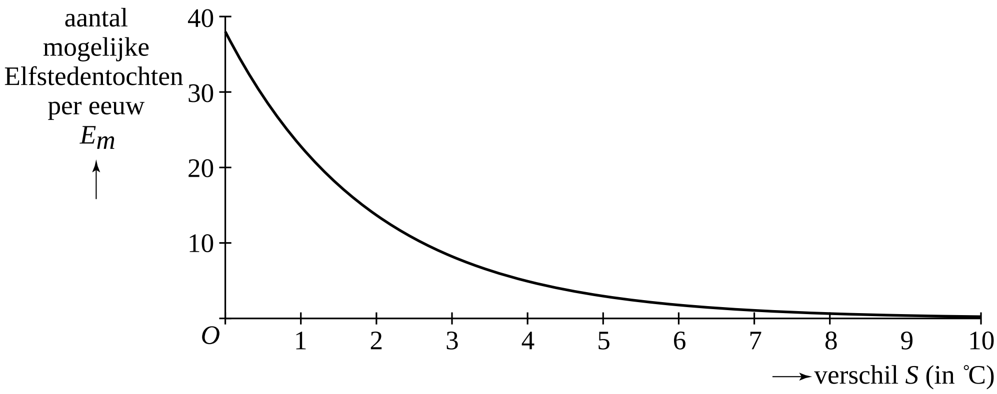
De ijsdikte in een bepaalde winter is natuurlijk afhankelijk van de temperatuur tijdens de winter. Deze wintertemperatuur W, de gemiddelde temperatuur gerekend over een hele winter, zal in de komende jaren behoorlijk stijgen. Men verwacht dat W in de 21e eeuw in totaal met 3,6 °C stijgt.
Als we uitgaan van lineaire stijging, kunnen we een toenamediagram tekenen waarbij de toename van W uitgezet wordt tegen het jaar t.

noot 1 Er wordt maximaal één Elfstedentocht per winter gereden.

4p **19** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het toenamediagram met stapgrootte 20 ($\Delta t = 20$). Kies zelf een geschikte schaalverdeling langs de verticale as.

Figuur 2 laat zien hoe het aantal mogelijke Elfstedentochten per eeuw E_m daalt wanneer de wintertemperatuur stijgt. In figuur 2 kun je bijvoorbeeld aflezen dat, als de wintertemperatuur in een bepaalde eeuw iedere winter 4,0 °C hoger zou liggen dan de gemiddelde wintertemperatuur in de 20e eeuw, er maar 5 Elfstedentochten in die eeuw mogelijk zullen zijn.

figuur 2



De grafiek in figuur 2 kan worden beschreven met de volgende formule:

$$E_m = b \cdot g^S$$

Hierin is S het verschil in °C tussen de wintertemperatuur in iedere winter en de gemiddelde wintertemperatuur in de 20e eeuw.

4p **20** Hoe groot zijn b en g, uitgaande van bovenstaande gegevens? Licht je antwoord toe.

Een wiskundige heeft een formule opgesteld voor het aantal te verwachten Elfstedentochten E_w in de 21e eeuw, waarbij rekening gehouden is met een geleidelijke toename van de wintertemperatuur in de 21e eeuw en met het feit dat niet iedere mogelijke Elfstedentocht werkelijk gereden zal worden:

$$E_w = \frac{74}{V} \cdot (p - p \cdot 0{,}6^V)$$

Hierin is V het verschil tussen de wintertemperatuur aan het einde van de 21e eeuw en de gemiddelde wintertemperatuur van de 20e eeuw in °C en p is de kans op een werkelijk gereden tocht als een Elfstedentocht mogelijk is.

De organisatie van de Elfstedentocht probeert de kans p door nog betere voorbereidingen te verhogen tot 0,65. Men verwacht dat V 3,6 °C zal zijn.

3p **21** Bereken dan het aantal te verwachten Elfstedentochten in de 21e eeuw.

Als we aannemen dat V inderdaad 3,6 °C zal zijn, dan is de formule van E_w te schrijven in de vorm:

$$E_w = a \cdot p$$

4p **22** Bereken a.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

19