Examen HAVO
2013

tijdvak 1
vrijdag 17 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B (pilot)

Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Tornadoschalen

In tornado's kunnen hoge windsnelheden bereikt worden. De zwaarte of heftigheid van een tornado wordt **intensiteit** genoemd. Er zijn verschillende schalen om de intensiteit van een tornado uit te drukken in een getal.

foto

Zo is er de Fujita-schaal die in 1971 is ontwikkeld. Voor de intensiteit op de Fujita-schaal geldt de volgende formule:

$$F = \left(\frac{v}{6,3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en F de intensiteit van de tornado op de Fujita-schaal. F wordt afgerond op een geheel getal.

In een zware tornado worden maximale windsnelheden van ongeveer 280 km/u bereikt.

3p **1** Bereken de intensiteit van deze tornado op de Fujita-schaal.

Een tornado met intensiteit 4 op de Fujita-schaal komt niet zo vaak voor.

4p **2** Bereken de minimale waarde van v in zo'n tornado. Rond je antwoord af op één decimaal.

Een andere schaal voor de intensiteit van tornado's is de in 1972 ontwikkelde Torro-schaal T. Het verband tussen v en T wordt gegeven door de formule:

$$v = 2,39 \cdot (T + 4)^{\frac{3}{2}}$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en T de intensiteit van de tornado op de Torro-schaal. T wordt afgerond op een geheel getal.

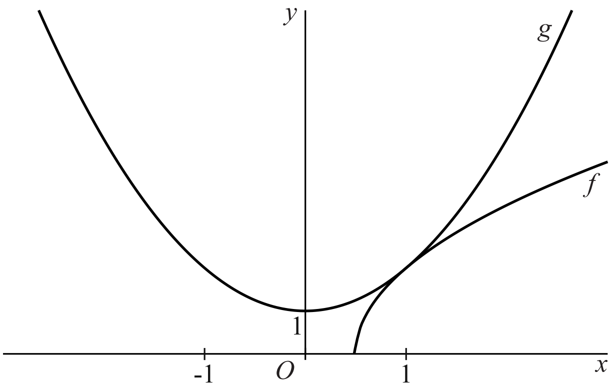
Er bestaat een lineair verband tussen de onafgeronde F- en T-waarden. Dit lineaire verband kan worden beschreven met een formule van de vorm $F = aT + b$.

4p **3** Bereken de waarden van a en b. Rond je antwoorden af op twee decimalen.

Wortel en parabool

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \sqrt{8x - 4}$ en $g(x) = x^2 + 1$.
In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven.

figuur 1

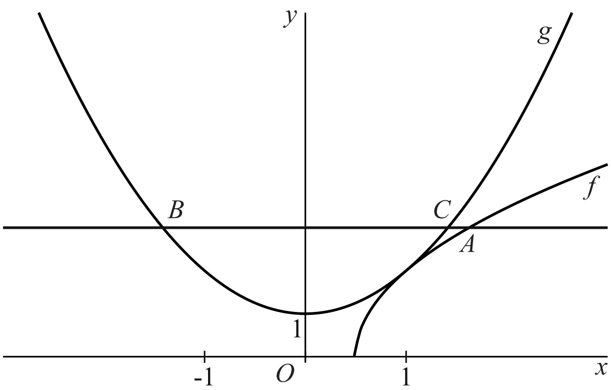


De grafieken van f en g hebben het punt $(1, 2)$ gemeenschappelijk.

4p **4** Toon op algebraïsche wijze aan dat in dit punt de hellingen van de grafieken van f en g gelijk zijn.

De horizontale lijn met vergelijking $y = 3$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in de punten B en C. Zie figuur 2.

figuur 2

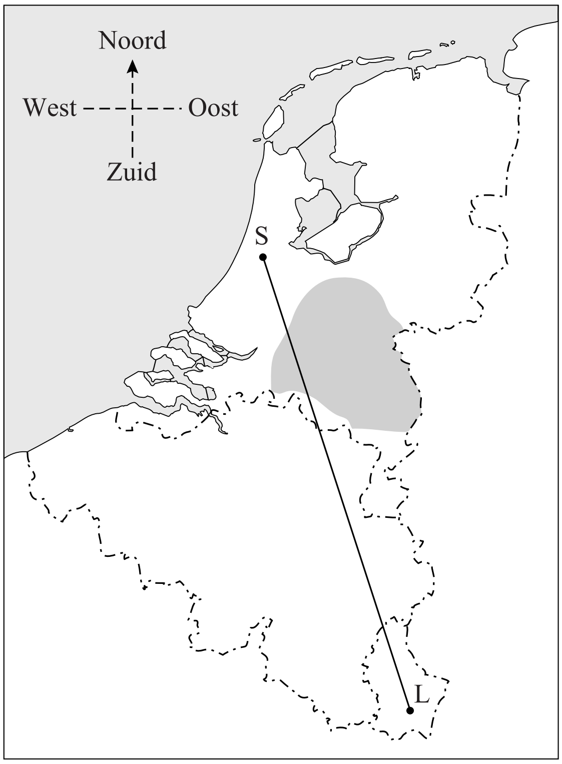


6p **5** Bereken exact de lengte van lijnstuk CA.

Omvliegen

Een burgervliegtuig mag niet via de kortste route van vliegveld Luxemburg naar Schiphol vliegen omdat er een verboden militaire zone tussen ligt. Zie figuur 1, waarin deze zone grijs gemaakt is.

figuur 1



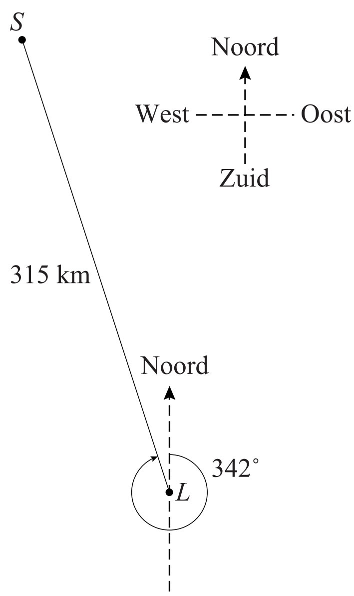
In deze opgave bekijken we een model van deze situatie. In dit model houden we alleen rekening met horizontale afstanden en nemen we aan dat vliegtuigen in rechte lijnen vliegen.

De afstand van vliegveld Luxemburg (L) naar vliegveld Schiphol (S) is hemelsbreed 315 km met een koers van 342°. Hierin is de **koers** de hoek ten opzichte van het noorden met de wijzers van de klok mee. Zie figuur 2.

Stel dat een vliegtuig vanaf vliegveld Luxemburg eerst richting het westen vliegt en vervolgens richting het noorden vliegt om precies op Schiphol uit te komen. Hierdoor wordt de vliegafstand langer dan 315 km.

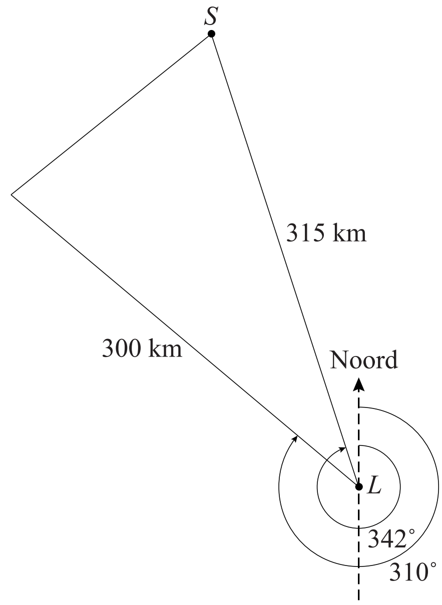
4p 6 Bereken hoeveel langer deze vliegafstand is. Geef je antwoord in tientallen kilometers nauwkeurig.

figuur 2



In werkelijkheid vliegt men vanaf vliegveld Luxemburg eerst 300 kilometer met een koers van 310° om vervolgens rechtstreeks naar Schiphol te vliegen. Zie figuur 3.

figuur 3



Als men rechtstreeks van vliegveld Luxemburg naar vliegveld Schiphol zou mogen vliegen, zou de afstand met een bepaald percentage verkort kunnen worden.

5p **7** Bereken dit percentage in hele procenten nauwkeurig.

Derdegraadsfunctie en gebroken functie

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = -x^3 + 4x$ en

$$g(x) = 1 - \frac{1}{(ax+1)^2}.$$

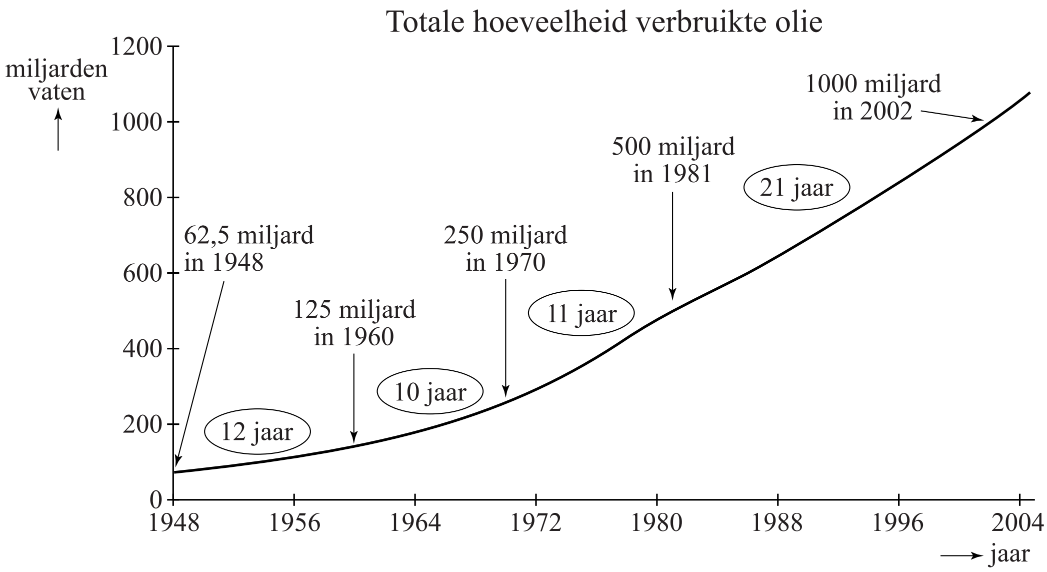
Voor elke waarde van a snijden de grafieken van f en g elkaar in de oorsprong. Er is een waarde van a zodat in de oorsprong de raaklijnen aan de grafieken van f en g loodrecht op elkaar staan.

7p **8** Bereken exact deze waarde van a.

Olie

Olie is een belangrijke grondstof. In figuur 1 is af te lezen hoeveel olie er wereldwijd in totaal is verbruikt sinds er in 1859 voor het eerst een oliebron geslagen werd. Zo valt bijvoorbeeld af te lezen dat het totaal van 1000 miljard vaten in de loop van 2002 gepasseerd werd.

figuur 1



In de grafiek van figuur 1 zijn vanaf 1948 de perioden aangegeven waarin de totale hoeveelheid verbruikte olie verdubbelde. Tussen 1948 en 1981 duurde het telkens ongeveer 11 jaar tot de totale hoeveelheid verbruikte olie was verdubbeld. Dit betekent dat tussen 1948 en 1981 de totale hoeveelheid verbruikte olie bij benadering exponentieel groeide.

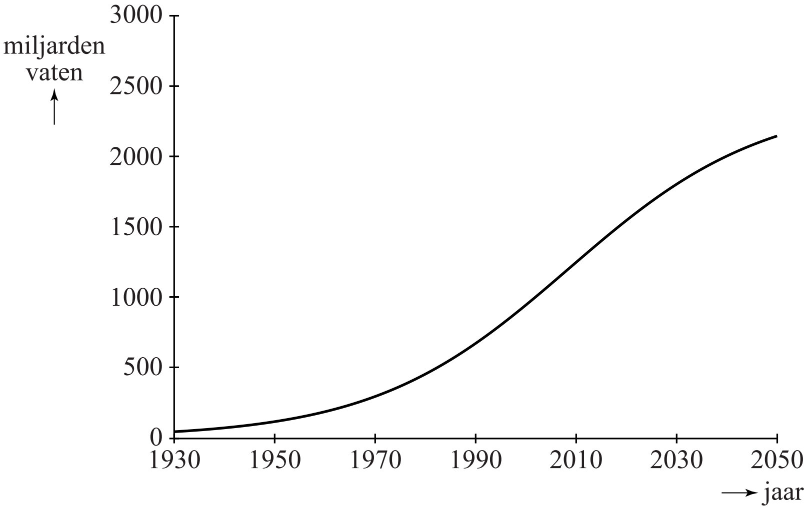
4p **9** Bereken het jaarlijkse groeipercentage dat hoort bij een verdubbelingstijd van 11 jaar. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Vanaf 1981 groeide de totale hoeveelheid verbruikte olie bij benadering nog steeds exponentieel, maar met een andere groeifactor. In de grafiek is te zien dat de totale hoeveelheid verbruikte olie verdubbelde van 500 miljard tot 1000 miljard vaten in de periode van 1981 tot 2002. Een verdubbelingstijd van 21 jaar komt overeen met een groei van ongeveer 3,4% per jaar.

4p **10** Bereken op algebraïsche wijze het jaar waarin volgens dit exponentiële model de totale hoeveelheid verbruikte olie de grens van 750 miljard vaten passeerde.

Er zijn in de loop der jaren verschillende modellen gemaakt die het verbruik van olie voorspellen. Een van deze modellen is het model van Hubbert uit 1956. In figuur 2 zie je een grafiek die uit dit model volgt.

figuur 2



Deze grafiek hoort bij de totale hoeveelheid olie die tot dat moment verbruikt is. Een formule voor deze totale hoeveelheid is:

$$V = \frac{2400}{1 + 56 \cdot 0{,}95^t}$$

Hierin is V de totale hoeveelheid verbruikte olie in miljarden vaten en t de tijd in jaren, met $t = 0$ op 1 januari 1930.

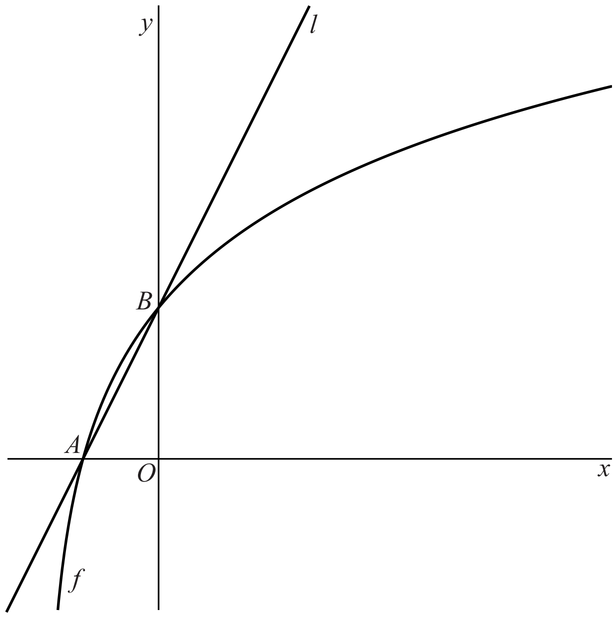
De totale hoeveelheid winbare olie in de wereld wordt geschat op 2400 miljard vaten.

4p **11** Bereken in welk jaar deze geschatte voorraad volgens het model van Hubbert voor de helft verbruikt was.

Grafiek van een logaritme

De functie f is gegeven door $f(x) = {}^{3}\log(4x+3)$. De grafiek van f snijdt de x-as in punt A en de y-as in punt B.
Verder is l de lijn door A en B. Zie de figuur.

figuur



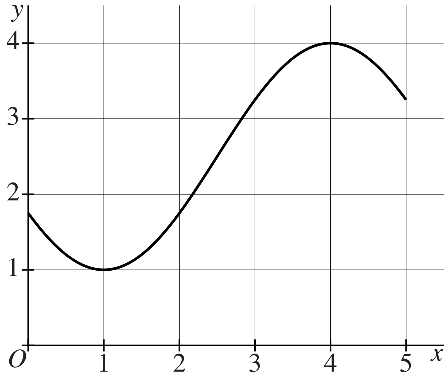
5p **12** Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op voor l.

3p **13** Bereken de helling van de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 1.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

Grafiek van een cosinus

In de figuur is op het interval $[0, 5]$ een sinusoïde getekend.

figuur



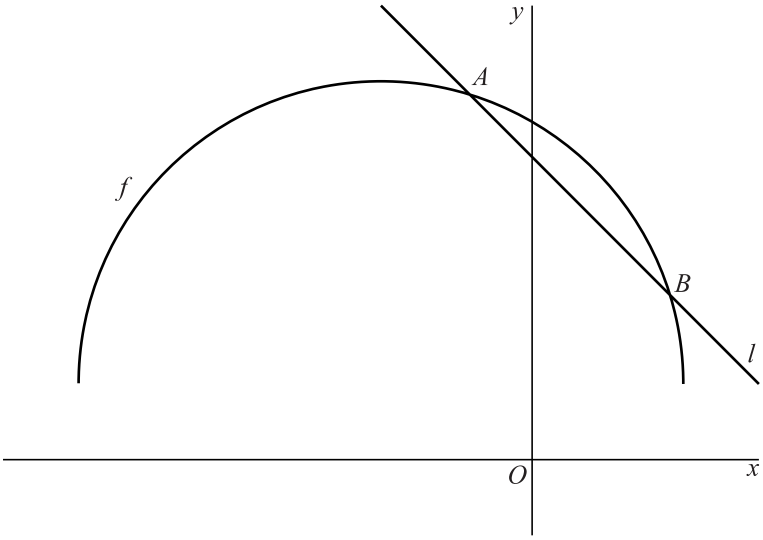
Deze sinusoïde is te beschrijven met een vergelijking van de vorm $y = a + b\cos(c(x-d))$.

5p **14** Bepaal geschikte waarden van a, b, c en d zodat $y = a + b\cos(c(x-d))$ een vergelijking is van deze sinusoïde. Licht je werkwijze toe.

Een halve cirkel als grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = 1 + \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$. Verder is de lijn l gegeven met vergelijking $y = -x + 4$. l snijdt de grafiek van f in de punten A en B. Zie de figuur.

figuur



5p **15** Bereken exact de x-coördinaten van A en B.

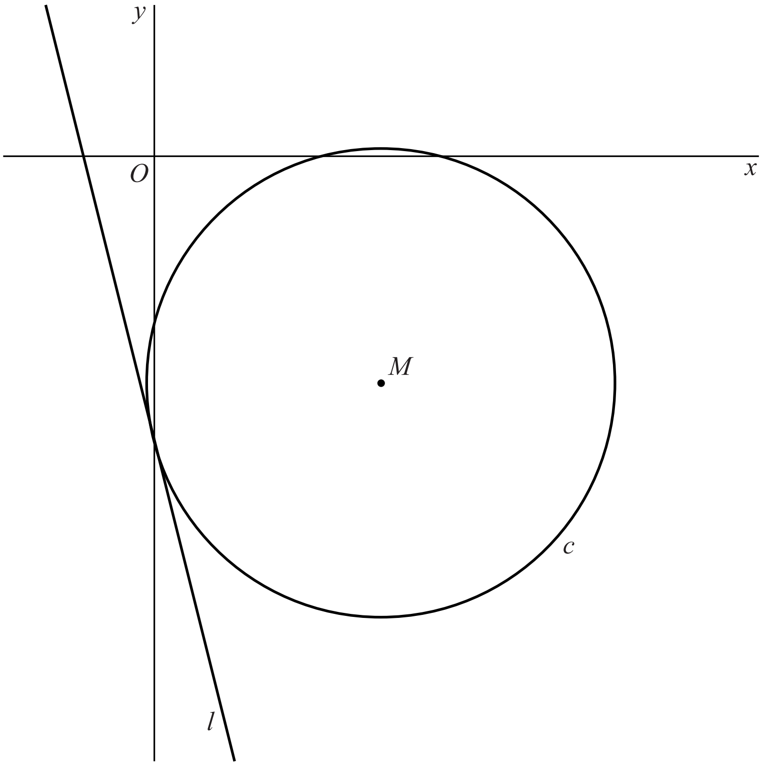
De grafiek van f is de helft van een cirkel.

5p **16** Bereken exact de coördinaten van het middelpunt en de straal van deze cirkel.

Cirkel en lijn

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x + 6y = -8\frac{2}{5}$ en middelpunt M en de lijn l met vergelijking $y = -4x - 3\frac{3}{4}$. Zie de figuur.

figuur



In de figuur lijkt het erop dat l de cirkel raakt. Als l inderdaad c raakt, dan is de afstand van M tot l gelijk aan de straal van c. Echter, de afstand van M tot l is kleiner dan de straal van c.

8p **17** Toon op algebraïsche wijze aan dat de afstand van M tot l kleiner is dan de straal van c.