Examen HAVO

2011

tijdvak 2
woensdag 22 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

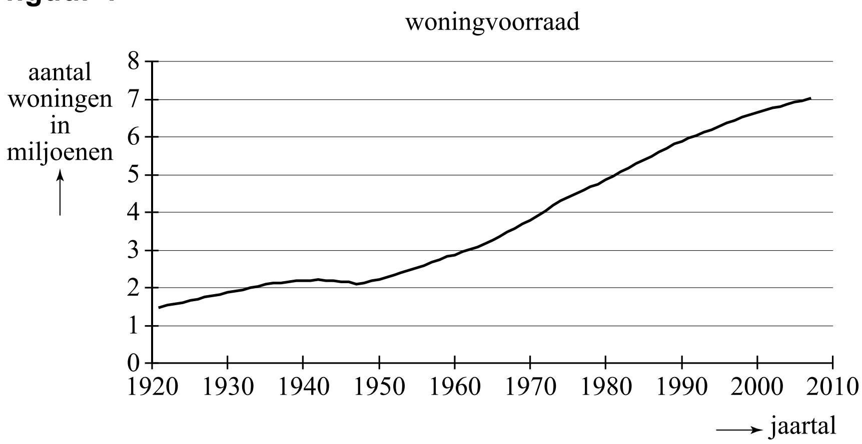
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Woningvoorraad

In de Arnhemse nieuwbouwwijk Schuytgraaf werd op 5 november 2007 gevierd dat de woningvoorraad (het aantal woningen) in Nederland de grens van de zeven miljoen had bereikt.
Rond 1896 doorbrak de woningvoorraad de grens van één miljoen woningen. In 1934 werd de grens van twee miljoen bereikt. Hierna duurde het tot 1962 voordat de grens van de drie miljoen woningen werd gepasseerd. In 1992 bereikte de woningvoorraad de zes miljoen, en in 2007 is dus de grens van de zeven miljoen woningen overschreden. Zie figuur 1.

figuur 1



In de periode 1962 – 1992 is het aantal woningen vrijwel lineair gestegen van 3 miljoen tot 6 miljoen. Daarbij hoort een formule:

$$W = a \cdot t + b$$

Hierin is W het aantal woningen in miljoenen en t het aantal jaren na 1962.

3p **1** Bereken a en b.

Er zijn twee soorten woningen: huurwoningen en koopwoningen. Door de jaren heen is de samenstelling van de woningvoorraad sterk veranderd. Waren in het verleden de meeste woningen huurwoningen, nu zijn het vooral koopwoningen. Zo zie je in de tabel dat in 1956 nog geen drie tiende deel van de woningen een koopwoning was, maar dat in 2006 al ruim de helft van de woningen een koopwoning was.

tabel

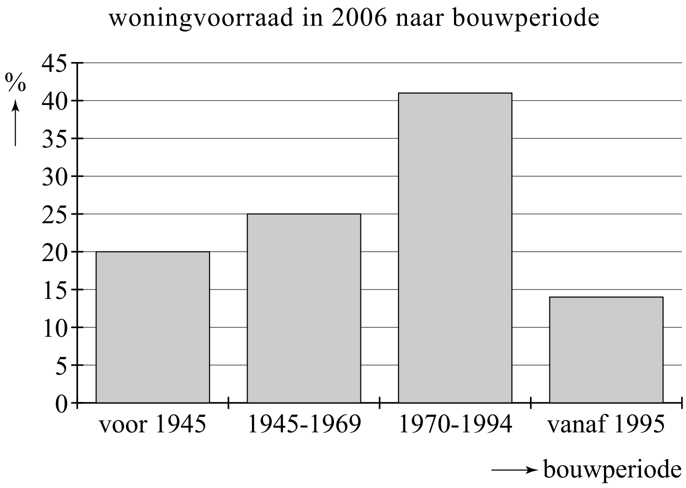
jaar (meting op 1 juli)	1956	1971	1984	1995	2006
koopwoningendeel K	0,29	0,35	0,41	0,47	0,54

Dit koopwoningendeel K blijkt in de periode 1956 – 2006 bij benadering exponentieel te groeien.
Op basis van de gegevens in de tabel kan geconcludeerd worden dat deze groei ongeveer 1,25% per jaar bedraagt.

4p **2** Toon met behulp van de tabelgegevens van 1956 en 2006 aan dat deze groei inderdaad ongeveer 1,25% per jaar bedraagt.

Er worden ieder jaar nieuwe huizen gebouwd en er worden maar weinig huizen gesloopt. Daardoor zijn er zowel nieuwe als oude(re) huizen. Zie figuur 2.
Je ziet daarin bijvoorbeeld dat van de woningvoorraad in 2006 41% gebouwd is in de periode 1970 – 1994.

figuur 2



In 2006 waren er in totaal 6,9 miljoen woningen. Daarvan waren er 900 000 koopwoningen die vóór 1945 gebouwd zijn.

In de tabel kun je aflezen dat in 2006 het koopwoningendeel 0,54 was. In een artikel werd over de woningvoorraad van 2006 geschreven:
“Het koopwoningendeel van de woningen die vóór 1945 gebouwd zijn, is groter dan 0,54.”

5p **3** Onderzoek of de bewering in dat artikel juist is.

Verzekeren

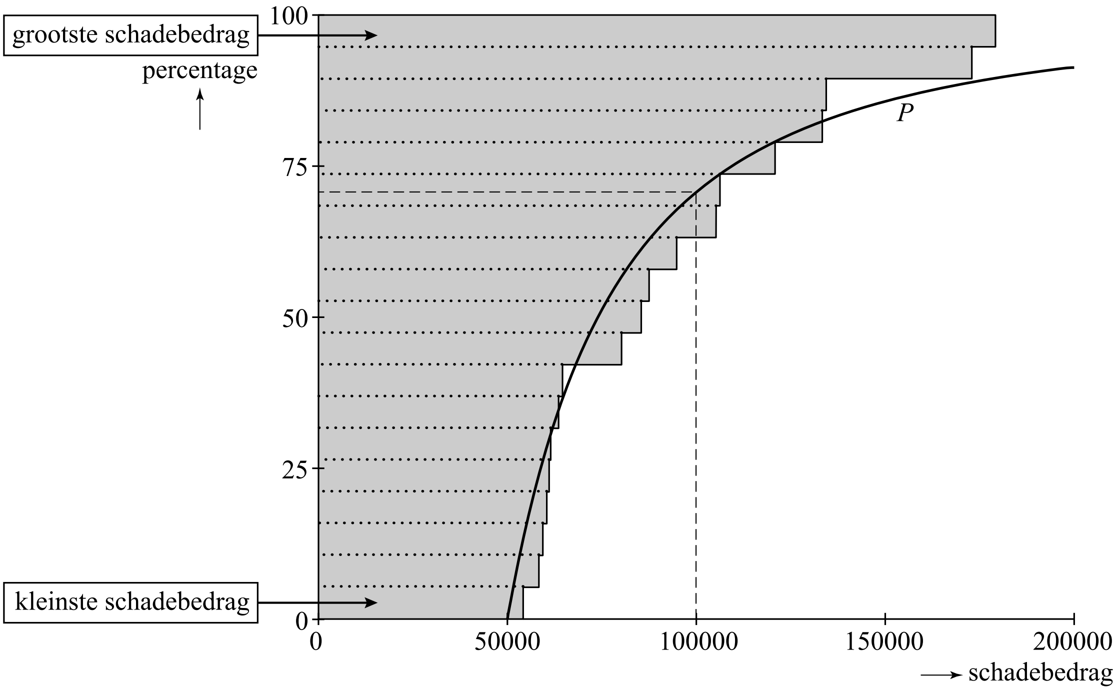
Verzekeringsmaatschappijen krijgen schadegevallen binnen van hun klanten en betalen deze meestal uit. De schadebedragen kunnen variëren. Soms is er sprake van enorme schadebedragen en soms van een groot aantal tegelijk, zoals na een aardbeving.
Verzekeringsmaatschappijen moeten natuurlijk wel genoeg geld hebben om te kunnen uitbetalen. Daarom zorgen ze ervoor om niet alleen een bedrag te reserveren, maar ook om een deel van het risico te **herverzekeren** bij een andere verzekeringsmaatschappij.
Voor alle schadebedragen boven de 50 000 euro krijgt de verzekeraar het gedeelte bóven de 50 000 euro dan terug van de herverzekeraar. De klanten merken hier niets van.

Een verzekeraar moet in een maand 60 schadegevallen van 750 euro, een schadegeval van 70 000 euro en een schadegeval van 110 000 euro vergoeden.

4p **4** Laat met een berekening zien dat de verzekeraar ruim een derde deel van het totale schadebedrag terugkrijgt van de herverzekeraar.

Voor de herverzekeraar is het dus belangrijk om iets te weten over de verdeling van de schadebedragen boven de 50 000 euro.
Dit bekijkt de herverzekeraar op de volgende manier. Alle schadebedragen boven de 50 000 euro worden van klein naar groot boven elkaar gezet, met horizontaal het bijbehorende schadebedrag. In 2003 zijn bij een Nederlandse herverzekeraar 19 schadegevallen geconstateerd waarvan het kleinste schadebedrag 55 000 euro is en het grootste 178 000 euro. Deze zijn weergegeven in de onderstaande figuur. Verticaal lees je in de figuur af: het percentage schadegevallen lager dan het bijbehorende schadebedrag of gelijk aan dat schadebedrag.

figuur



Wanneer dit gedaan wordt voor grote aantallen schades, zullen de uiteinden van de horizontale staven de getekende grafiek van P benaderen.
Bij de getekende grafiek hoort de volgende formule:

$$P = 100 - 100 \cdot \left(\frac{50\,000}{x}\right)^{1,77}$$

Hierin geeft P aan hoeveel procent van alle schadebedragen die van belang zijn voor de herverzekeraar lager is dan of gelijk aan x euro.
Uit de grafiek van P in de figuur kun je aflezen dat ongeveer 70% van die schadebedragen, bedragen zijn van ten hoogste 100 000 euro.

3p **5** Bereken met behulp van de formule hoeveel procent van de schadebedragen die van belang zijn voor de herverzekeraar hoger dan 150 000 euro is.

De herverzekeraar wil weten welk minimaal schadebedrag hoort bij de 5% grootste schades die hij kan verwachten.

4p **6** Bereken dit schadebedrag met behulp van de formule.

Een aantal Nederlandse verzekeringsmaatschappijen herverzekert zich bij Amerikaanse verzekeringsmaatschappijen. Zij werken met dollars en gebruiken een aangepaste formule van P. De door hen gebruikte formule is afhankelijk van de wisselkoers van dollar en euro.

$$P = 100 - 100 \cdot \left(\frac{71\,396}{y}\right)^{1,77}$$

Hierin geeft P ook weer aan hoeveel procent van alle schadebedragen die van belang zijn voor de herverzekeraar lager is dan of gelijk is aan een bepaald bedrag. Maar in deze formule is dat bedrag, y genoemd, in dollar.
Het verband tussen y en x in beide formules is een evenredig verband: $y = a \cdot x$.

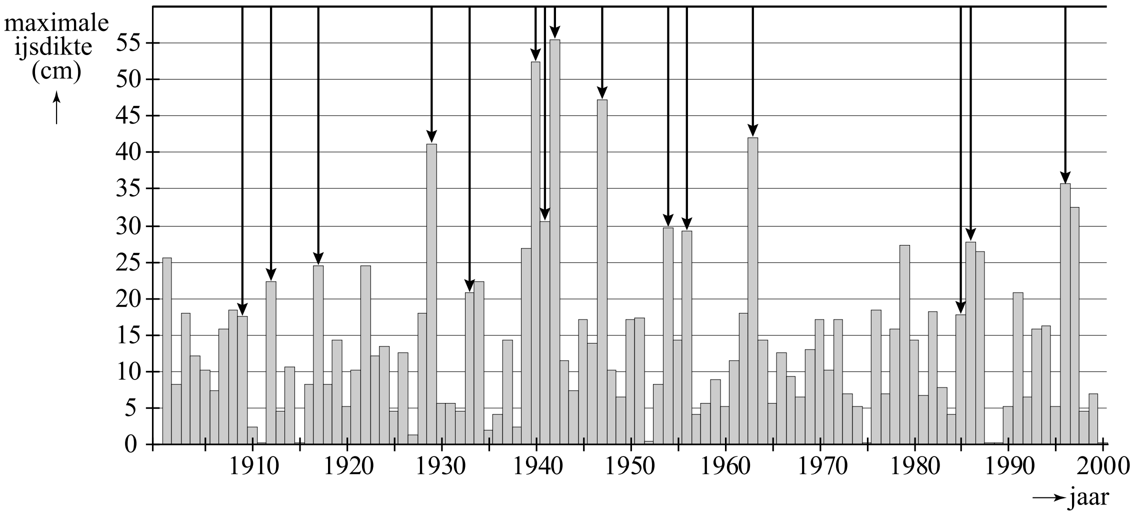
4p **7** Toon met behulp van beide formules aan dat het verband tussen y en x inderdaad een evenredig verband is en leg uit wat a in deze situatie betekent.

Elfstedentocht

De schaatsliefhebbers zullen er niet vrolijk van worden. Een rapport van het Intergovernmental Panel on Climate Change voorspelt dat in de 21e eeuw de wereldgemiddelde temperatuur behoorlijk zal stijgen. Deze temperatuurstijging zal ook Friesland niet voorbijgaan. De vraag is: kunnen we nog een Elfstedentocht verwachten?

Er kan al een Elfstedentocht verreden worden bij een ijsdikte van 15 cm. In figuur 1 is van elk jaar van de vorige eeuw de maximale ijsdikte weergegeven. Je ziet dat er heel wat jaren waren waarin het ijs een dikte had van minstens 15 cm. In theorie zouden er dus heel wat Elfstedentochten mogelijk zijn geweest. Toch zijn er in werkelijkheid veel minder Elfstedentochten gereden: de pijltjes markeren de winters waarin er daadwerkelijk een Elfstedentocht[1)] geweest is. De oorzaak hiervan ligt in problemen met de kwaliteit van het ijs, zwak ijs in de steden, bemaling, enzovoort.

figuur 1



Op grond van de gegevens van de vorige eeuw kunnen we, bij een ijsdikte van minstens 15 cm, het percentage p berekenen van winters dat er werkelijk een Elfstedentocht gereden wordt. Voor dit percentage p geldt de formule:

$$p = \frac{\textit{aantal werkelijk gereden Elfstedentochten}}{\textit{aantal mogelijke Elfstedentochten}} \times 100$$

Het percentage p blijkt ongeveer 40 te zijn.

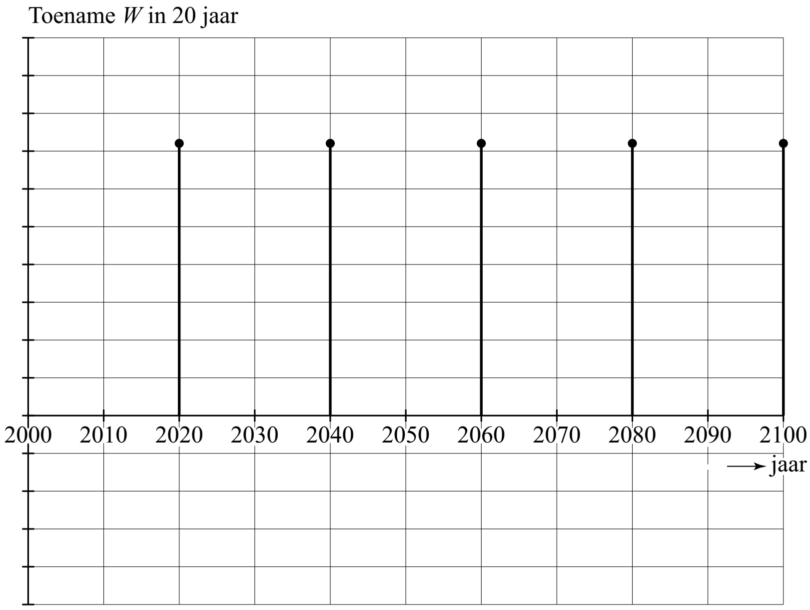
3p **8** Bereken p in één decimaal nauwkeurig.

De ijsdikte in een bepaalde winter is natuurlijk afhankelijk van de temperatuur tijdens de winter. Deze wintertemperatuur W, de gemiddelde temperatuur gerekend over een hele winter, zal in de komende jaren behoorlijk stijgen. Men verwacht dat W in de 21e eeuw in totaal met 3,6 °C stijgt.

noot 1 Er wordt maximaal één Elfstedentocht per winter gereden.

In figuur 2 is een toenamediagram getekend dat hoort bij de stijging van de wintertemperatuur W in de 21e eeuw. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

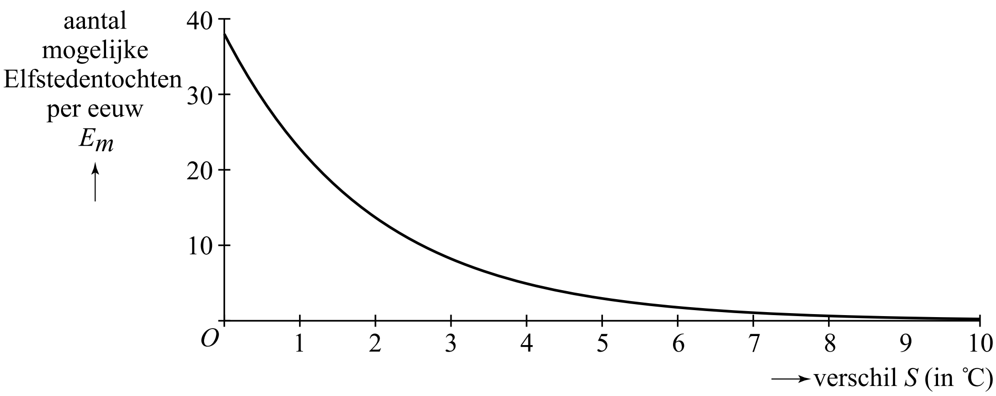
figuur 2



4p **9** Welk type stijging hoort hierbij? Bereken de hoogte van de staafjes en geef op de uitwerkbijlage de juiste schaalverdeling langs de verticale as aan. Licht je antwoorden toe.

Figuur 3 laat zien hoe het aantal mogelijke Elfstedentochten per eeuw E_m daalt wanneer de wintertemperatuur stijgt. In figuur 3 kun je bijvoorbeeld aflezen dat, als de wintertemperatuur in een bepaalde eeuw iedere winter 4,0 °C hoger zou liggen dan de gemiddelde wintertemperatuur in de 20e eeuw, er maar 5 Elfstedentochten in die eeuw mogelijk zullen zijn.

figuur 3



De grafiek in figuur 3 kan worden beschreven met de volgende formule:

$$E_m = b \cdot g^S$$

Hierin is S het verschil in °C tussen de wintertemperatuur in iedere winter en de gemiddelde wintertemperatuur in de 20e eeuw.

4p **10** Hoe groot zijn b en g, uitgaande van bovenstaande gegevens? Licht je antwoord toe.

Een wiskundige heeft een formule opgesteld voor het aantal te verwachten Elfstedentochten E_w in de 21e eeuw, waarbij rekening gehouden is met een geleidelijke toename van de wintertemperatuur in de 21e eeuw en met het feit dat niet iedere mogelijke Elfstedentocht werkelijk gereden zal worden:

$$E_w = \frac{0,74}{V} \cdot (p - p \cdot 0,60^V)$$

Hierin is V het verschil tussen de wintertemperatuur aan het einde van de 21e eeuw en de gemiddelde wintertemperatuur van de 20e eeuw in °C en p is het percentage werkelijk gereden tochten als een Elfstedentocht mogelijk is.

De organisatie van de Elfstedentocht probeert het percentage p door nog betere voorbereidingen te verhogen tot 65. Men verwacht dat V 3,6 °C zal zijn.

3p **11** Bereken dan het aantal te verwachten Elfstedentochten in de 21e eeuw.

Als we aannemen dat V inderdaad 3,6 °C zal zijn, dan is de formule van E_w te herschrijven tot de vorm:

$$E_w = a \cdot p$$

4p **12** Laat zien hoe je de formule van E_w kunt herschrijven tot deze vorm en bereken a.

Korfbal

Korfbal is een sport waarbij twee teams de bal in elkaars korf proberen te gooien.
Een korfbalveld is verdeeld in twee vakken: een aanvalsvak en een verdedigingsvak. Het aanvalsvak van het ene team is het verdedigingsvak van het andere team en omgekeerd.

Een korfbalteam bestaat uit vier jongens en vier meisjes, die zo opgesteld zijn dat er altijd in elk vak twee jongens en twee meisjes spelen. Om uit een team van vier jongens en vier meisjes een opstelling te maken, hoef je slechts van elk geslacht twee leden aan te wijzen. Die komen in het aanvalsvak, de anderen staan dan automatisch in het verdedigingsvak.

4p **13** Bereken hoeveel verschillende opstellingen je kunt maken met één team.

Aan een wereldkampioenschap doen 16 landen mee. In de eerste ronde zijn de teams ingedeeld in vier poules van vier teams. In elke poule wordt een halve competitie afgewerkt. Dat wil zeggen dat elk land één keer tegen elk ander land speelt.

3p **14** Bereken het aantal wedstrijden dat in de eerste ronde wordt gespeeld.

De deelnemende landen zijn ingedeeld in twee categorieën, A en B.
De teams in categorie A spelen voor de plaatsen 1 tot en met 8, de teams in categorie B spelen voor de plaatsen 9 tot en met 16.
Vóór het begin van het wereldkampioenschap in 2003 was het mogelijk om te gokken op het eindklassement. Daarvoor was onderstaand formulier ontworpen.

Wereldkampioenschap Korfbal 2003 – voorspelling eindklassement					
categorie A	1e plaats		categorie B	9e plaats	
	2e plaats			10e plaats	
	3e plaats			11e plaats	
	4e plaats			12e plaats	
	5e plaats			13e plaats	
	6e plaats			14e plaats	
	7e plaats			15e plaats	
	8e plaats			16e plaats	

Jack weet niets van korfbal, maar hij gokt erop dat Nederland en België de nummers één en twee zullen worden (of andersom). Al jarenlang wordt namelijk een van deze twee landen wereldkampioen. Verder weet hij welke landen in categorie A en welke in categorie B zijn ingedeeld. Met deze informatie vult hij het formulier in.

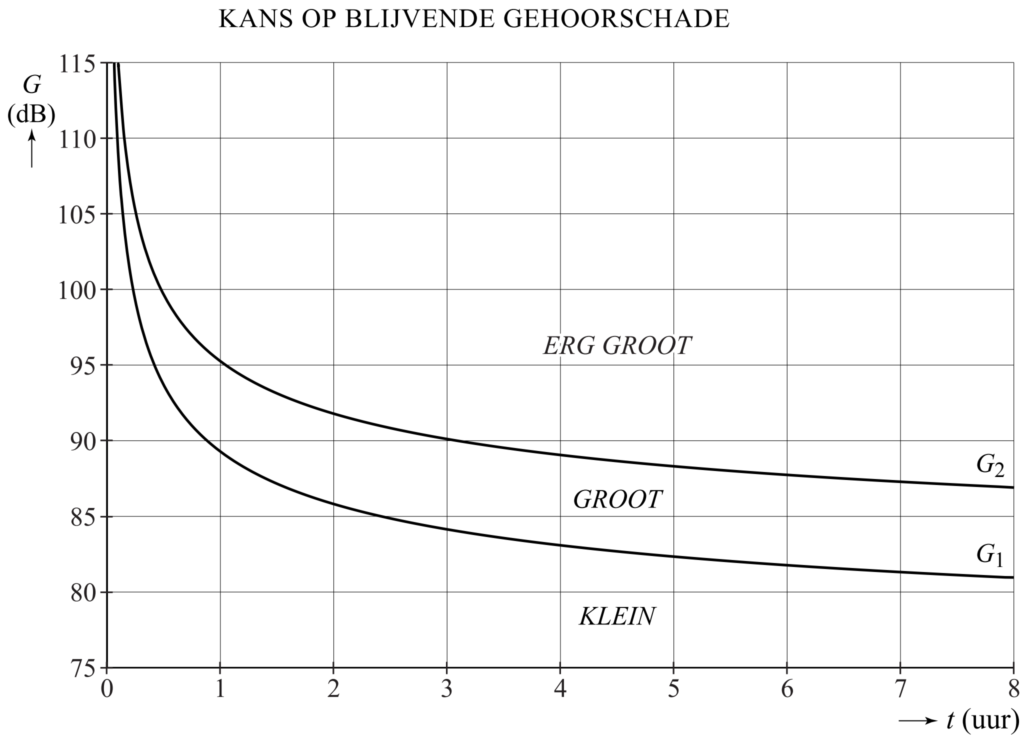
5p **15** Bereken op hoeveel verschillende manieren hij het formulier kan invullen.

Gehoorschade

Het aantal mensen dat het risico loopt op gehoorschade door het luisteren naar harde muziek is de laatste jaren flink gestegen. Uit onderzoek van het Erasmus Medisch Centrum blijkt dat bijna een derde van de jongeren van 12 tot 16 jaar structureel naar te harde muziek luistert. De mp3-speler is een van de boosdoeners: het geluidsniveau wordt vaak zo hoog ingesteld dat de luisteraar blijvende gehoorschade riskeert.

De mp3-spelers van tegenwoordig kunnen geluidsniveaus bereiken tot ongeveer 110 decibel (dB). In de figuur is te zien dat bij een geluidsniveau van 100 dB de kans op blijvende gehoorschade na ongeveer een kwartier luisteren al groot is en na ongeveer een half uur luisteren zelfs erg groot.

figuur



De krommen G_1 en G_2 geven de grenzen aan tussen een kleine, een grote en een erg grote kans op blijvende gehoorschade.
Hierbij zijn de volgende formules opgesteld:

$$G_1 = \frac{16{,}3}{t^{0{,}35}} + 73 \text{ en } G_2 = G_1 + c$$

Hierin zijn G_1 en G_2 het geluidsniveau in dB en is t het aantal uren dat iemand blootstaat aan dit geluidsniveau. Je ziet dat G_2 bepaald wordt door bij G_1 een constant getal c op te tellen.

Johan luistert naar muziek op zijn mp3-speler bij een geluidsniveau van 100 dB. Hierdoor is voor Johan de kans op blijvende gehoorschade al na korte tijd groot.

4p **16** Bereken met de formule na hoeveel minuten luisteren de kans op blijvende gehoorschade voor hem al *GROOT* is.

3p **17** Bepaal met behulp van de figuur de waarde van c in de formule van G_2. Licht je werkwijze toe.

In plaats van met het geluidsniveau rekent men in onderzoeken vaak met de **intensiteit** van het geluid. Zodra je het volume van een mp3-speler lager zet, neemt de intensiteit van het geluid sterk af. Als vuistregel geldt:

Telkens als het geluidsniveau 3 dB lager wordt ingesteld, wordt de intensiteit van het geluid de helft minder.

Johan verlaagt het geluidsniveau van zijn mp3-speler met 15 dB.

4p **18** Bereken met behulp van de vuistregel met hoeveel procent de intensiteit van het geluid afneemt.

Er bestaat een formule waarin de intensiteit van het geluid I (in μW/m^2) wordt uitgedrukt in het geluidsniveau G (in dB):

$$I = 31{,}6 \cdot 1{,}259^{(G-75)}$$

Mirjam heeft het geluidsniveau van haar mp3-speler meestal op 75 dB staan. Als ze echter haar favoriete nummers beluistert, zet ze het geluidsniveau zoveel hoger, dat de intensiteit van het geluid 100 keer zo groot wordt.

4p **19** Bereken op welk geluidsniveau ze haar mp3-speler zet bij haar favoriete nummers.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Mobiel bellen

Na lang aandringen van de kinderen en kleinkinderen heeft oma eindelijk besloten een mobiele telefoon aan te schaffen. Ze heeft gekozen voor een speciale seniorentelefoon, met grote toetsen en een heel simpel menu. Sms'en vindt oma niet nodig. Ze gaat haar mobiele telefoon alleen voor bellen gebruiken.
Ze vergelijkt twee aanbiedingen:

1 Prepaid: je betaalt alleen gesprekskosten, deze zijn 15 cent per belminuut.
2 Abonnement: je betaalt 9,95 euro per maand voor 75 gratis belminuten. Bel je méér dan kost dit 23 cent per extra belminuut.

Het is duidelijk dat prepaid goedkoper is als oma heel weinig belt. Maar ook als ze heel veel belt, is prepaid goedkoper wegens de lagere gesprekskosten per belminuut.

7p **20** Onderzoek bij welke aantallen belminuten per maand prepaid goedkoper is.