Examen HAVO

2011

tijdvak 1
woensdag 25 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Achter het correctievoorschrift zijn twee aanvullingen opgenomen.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Zuinig rijden

foto

Tijdens rijlessen leer je om in de auto bij 20 km per uur van de eerste naar de tweede versnelling te schakelen.
Daarna ga je bij 40 km per uur naar de derde versnelling, bij 60 km per uur naar de vierde en ten slotte rond de 90 km per uur naar de vijfde.
Iedere versnelling heeft een ideale snelheid.
Maar is dat ook de zuinigste snelheid?
Om dit te onderzoeken heeft men met dezelfde auto steeds met andere snelheden en in een andere versnelling telkens hetzelfde traject afgelegd en daarbij steeds de **literafstand** L (de afstand die je met 1 liter benzine kunt afleggen) gemeten.
Een deel van de resultaten staat in tabel 1.

tabel 1

literafstand bij 80 km per uur			
versnelling	3	4	5
literafstand L (km)	16,92	19,63	21,68

In tabel 1 kun je zien dat je bij 80 km per uur het beste in de vijfde versnelling kunt rijden, omdat je dan 21,68 km kunt afleggen met 1 liter benzine.

Je rijdt op dit traject met een snelheid van 80 km per uur. Je begint met een volle tank van 35 liter benzine en je rijdt die tank helemaal leeg.

3p **1** Bereken hoeveel km je in de vijfde versnelling meer kunt afleggen dan in de vierde versnelling.

In tabel 2 staat de literafstand L voor verschillende snelheden in de vijfde versnelling.

tabel 2

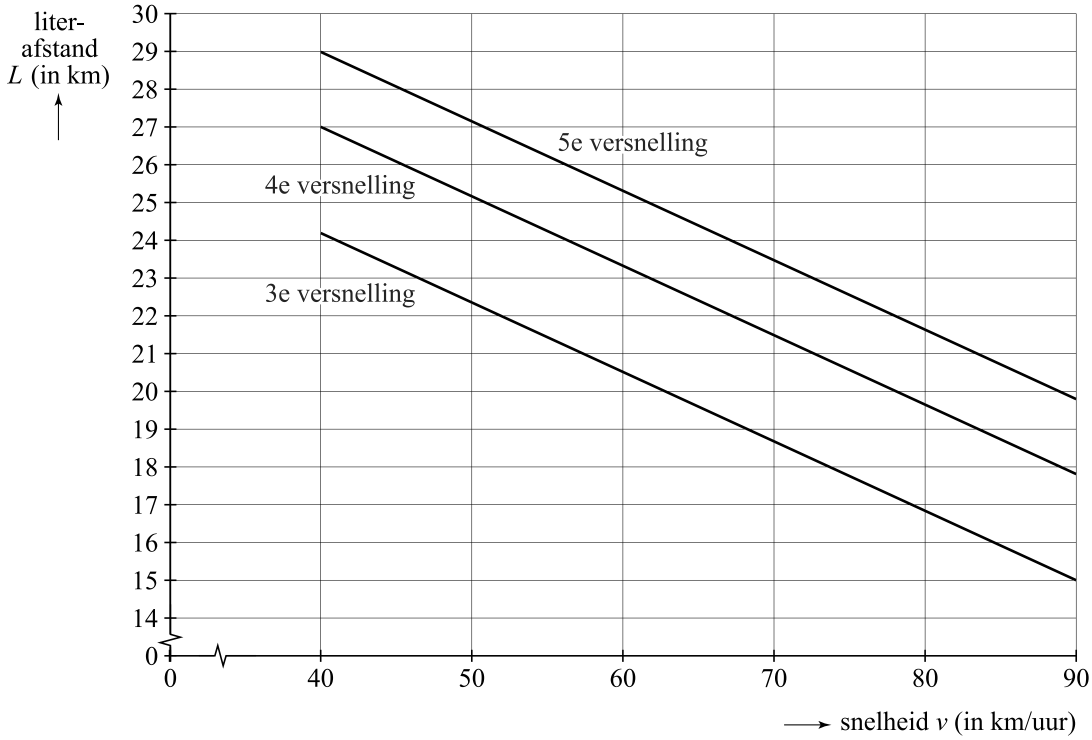
literafstand in de vijfde versnelling						
snelheid v (km per uur)	40	50	60	70	80	90
literafstand L (km)	29,03	27,19	25,35	23,51	21,68	19,84

Je legt in de vijfde versnelling een traject van 300 km af. Als je 80 km per uur rijdt, heb je deze afstand sneller afgelegd dan wanneer je 60 km per uur rijdt. Maar je verbruikt wel meer benzine.

3p **2** Bereken hoeveel liter benzine je dan meer verbruikt.

De resultaten van het onderzoek zijn in de figuur grafisch weergegeven.

figuur



In de figuur kun je voor de derde, vierde en de vijfde versnelling bij iedere snelheid de literafstand aflezen. De figuur bestaat uit drie evenwijdige rechte lijnen. De figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

Je rijdt 70 km per uur in de vierde versnelling.

3p **3** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage met welke snelheid je in de derde versnelling kunt rijden bij dezelfde literafstand. Licht je werkwijze toe.

Voor de vierde en de vijfde versnelling worden deze lineaire verbanden beschreven door de formules:

$$L_{vierde\ versnelling} = -0{,}1838 \cdot v + 34{,}33$$

$$L_{vijfde\ versnelling} = -0{,}1838 \cdot v + 36{,}38$$

Hierin is L de literafstand in km en v de snelheid in km per uur.

De formule voor de literafstand in de derde versnelling $L_{derde\ versnelling}$ ontbreekt in het bovenstaande.

4p **4** Stel op basis van bovenstaande gegevens deze formule op.

Als je wilt weten met welke snelheid je mag rijden in de vijfde versnelling om een bepaalde literafstand te halen, is het handig het gegeven verband tussen de literafstand en de snelheid te schrijven in de vorm:

$$v = a \cdot L_{vijfde\ versnelling} + b$$

4p **5** Leid uit het gegeven verband tussen $L_{vijfde\ versnelling}$ en v een formule van bovenstaande vorm af. Rond a en b af op één decimaal.

De grootste taart

Omdat je winnaar van een wedstrijd bent, krijg je één voor één in willekeurige volgorde een aantal taarten van verschillende grootte te zien. Je weet van tevoren hoeveel taarten er getoond zullen worden, maar je hebt geen idee hoe groot de taarten zijn.
Direct na elke taart moet je zeggen of je deze wilt of niet, maar je mag maar één keer ja zeggen. Het gaat erom dat je de grootste van alle taarten probeert te kiezen.
De vraag is: wat is de beste strategie om de grootste taart te bemachtigen?

afbeelding

Vijf taarten
We bekijken een situatie waarin vijf taarten getoond worden. De kleinste taart noemen we 1, de op één na kleinste 2, daarna volgen de taarten 3 en 4 en de grootste taart is taart 5. In het voorbeeld op de afbeelding worden de taarten in de volgorde **4 2 3 5 1** getoond. De taarten worden echter, zoals al gezegd, in willekeurige volgorde gepresenteerd.

4p **6** Bereken hoeveel verschillende volgordes er zijn met vijf taarten, waarbij de eerste taart niet de grootste is.

We bekijken enkele strategieën om te proberen de grootste taart te bemachtigen. Daartoe nemen we de wat eenvoudiger situatie waarbij in totaal maar vier taarten getoond worden. Deze kunnen in 24 verschillende volgordes gepresenteerd worden. De kleinste taart is ook nu taart 1, daarna volgen de taarten 2, 3 en 4. Taart 4 is in dit geval de grootste taart.

Strategie van Richard bij vier taarten
Richard denkt dat het een willekeurige gok is en hij besluit om ja te zeggen tegen de tweede taart die hij te zien krijgt.

3p **7** Bij hoeveel volgordes van de 4 taarten zal Richard de grootste taart bemachtigen? Licht je antwoord toe.

Strategie van Remco bij vier taarten
Remco besluit om de eerste taart die hij te zien krijgt nooit te nemen, maar de eerstvolgende taart die groter is dan die eerste. Hij kiest uiteindelijk wel altijd een taart. Zijn alle volgende taarten kleiner dan de eerste taart, dan kiest hij dus noodzakelijkerwijs de laatste taart.
Remco schrijft alle mogelijke volgordes op.
In de tabel wordt steeds de gekozen taart omcirkeld.
Je kunt in de tabel natellen dat Remco met zijn strategie bij 11 volgordes de grootste taart zal bemachtigen.

tabel

1 2 3 4	1 2 4 3	1 3 2 4	1 3 4 2	1 4 2 3	1 4 3 2
2 1 3 4	2 1 4 3	2 3 1 4	2 3 4 1	2 4 1 3	2 4 3 1
3 1 2 4	3 1 4 2	3 2 1 4	3 2 4 1	3 4 1 2	3 4 2 1
4 1 2 3	4 1 3 2	4 2 1 3	4 2 3 1	4 3 1 2	4 3 2 1

Strategie van Marlies bij vier taarten
Marlies besluit om de eerste twee taarten die ze te zien krijgt nooit te nemen; ze neemt de eerstvolgende taart die groter is dan zowel de eerste als de tweede taart. Zijn de volgende taarten kleiner dan de eerste twee taarten, dan kiest ze de laatste taart.

5p **8** Onderzoek of Marlies met deze strategie bij vier taarten vaker dan Remco de grootste taart zal bemachtigen. Je kunt hierbij gebruikmaken van de tabel op de uitwerkbijlage.

Woei wordt waaide

We noemen werkwoorden regelmatig wanneer ze worden vervoegd als het werkwoord fietsen: **fietsen — fietste — gefietst**, of als het werkwoord huilen: **huilen — huilde — gehuild**. Er is een vaste uitgang voor de verleden tijd en het voltooid deelwoord. Wanneer een werkwoord bij de vervoeging verandering van klinkers (a, e, i, …) of medeklinkers (b, c, d, …) vertoont, spreken we van een onregelmatig werkwoord. Een voorbeeld hiervan is het werkwoord lopen, dat wordt vervoegd als **lopen — liep — gelopen**.
Veel werkwoorden die tegenwoordig regelmatig zijn, waren vroeger onregelmatig. Onregelmatige werkwoorden hebben namelijk de neiging in de loop der tijd regelmatig te worden. Denk maar aan het werkwoord waaien. Sommige oudere mensen zeggen nog: 'Gisteren woei het erg!', terwijl vooral jongeren zeggen: 'Gisteren waaide het erg!'

Wetenschappers hebben dit verschijnsel onderzocht voor Engelse werkwoorden. Zij turfden het aantal onregelmatige werkwoorden in drie verschillende perioden. Je begrijpt dat in het onderzoek alleen die werkwoorden betrokken zijn waarvan uit elke periode gegevens bekend waren.
Van de 177 onregelmatige werkwoorden in het Oudengels (800 na Christus) waren er in het Middelengels (1200 na Christus) 145 nog steeds onregelmatig, en in het moderne Engels (2000 na Christus) nog maar 98.

Er geldt bij benadering dat het aantal Engelse onregelmatige werkwoorden daalt volgens een exponentieel verband.

5p **9** Bereken met behulp van de bovenstaande gegevens het afnamepercentage per 100 jaar.

In werkelijkheid zijn er natuurlijk meer onregelmatige werkwoorden dan alleen die werkwoorden van het onderzoek. We nemen aan dat bij benadering het volgende verband tussen het totaal aantal Engelse onregelmatige werkwoorden W en het jaartal t geldt:

$$W = 432 \cdot 0{,}9995^t$$

3p **10** Bereken met behulp van dit verband in welk jaar het aantal Engelse onregelmatige werkwoorden nog maar 80 zal zijn.

In het moderne Engels (2000 na Christus, dus t = 2000) is slechts 3% van de werkwoorden onregelmatig.

4p **11** Bereken met behulp van het verband het totaal aantal Engelse werkwoorden in het jaar 2000.

Het regelmatig worden van werkwoorden gebeurt sneller naarmate de woorden minder vaak worden gebruikt.
De wetenschappers hebben alle onderzochte onregelmatige werkwoorden in zes groepen ingedeeld. De meest gebruikte, **to be** en **to have**, zitten in groep 1 en de minst gebruikte zitten in groep 6.

In groep 3 blijkt het aantal werkwoorden in de periode 800 tot 2000 na Christus afgenomen te zijn van 37 tot 33. In deze groep 3 zijn de werkwoorden **to help**, **to reach**, **to walk** en **to work** regelmatig geworden. Ga ervan uit dat binnen deze groep het aantal werkwoorden bij benadering exponentieel afneemt met 0,01% per jaar.

4p **12** Bereken hoeveel jaar het duurt tot het aantal werkwoorden in groep 3 gehalveerd is.

De onderzoekers onderzochten dit voor elke groep en leidden hieruit de volgende vuistregel af: wordt een onregelmatig werkwoord n keer zo vaak gebruikt, dan duurt het $\sqrt{n}$ keer zo lang totdat dit werkwoord regelmatig wordt. Een onregelmatig werkwoord dat bijvoorbeeld 100 keer zo vaak gebruikt wordt als een ander onregelmatig werkwoord, zal er $\sqrt{100} = 10$ keer zo lang over doen om regelmatig te worden.

In Nederland heeft men uit stukken tekst van in totaal 100 miljoen woorden de 10 meest gebruikte Nederlandse werkwoorden gehaald. Zie de tabel. Het valt vrijwel direct op dat de eerste 9 onregelmatig zijn.

tabel

	werkwoord	**frequentie**
1	zijn	2 264 398
2	worden	946 623
3	hebben	872 661
4	kunnen	569 152
5	zullen	382 900
6	moeten	345 098
7	gaan	285 026
8	komen	267 532
9	zeggen	230 606
10	maken	214 280

Neem aan dat het Nederlandse werkwoord **komen** pas na 13 000 jaar regelmatig wordt, zoals men dat ook verwacht voor het Engelse werkwoord **to come**. Neem verder aan dat de vuistregel ook geldt voor de Nederlandse onregelmatige werkwoorden. Dan kun je met behulp van de tabel berekenen hoeveel jaar het duurt voor het werkwoord **worden** regelmatig wordt.

3p **13** Bereken met behulp van de frequenties in de tabel hoeveel jaar het duurt voor het werkwoord **worden** regelmatig wordt.

Kinderalimentatie

Als ouders scheiden, blijven de kinderen meestal bij één van de ouders wonen. Deze ouder neemt de zorg van de kinderen op zich. De andere ouder draagt financieel bij in deze zorg door maandelijks een bepaald geldbedrag, de (kinder)alimentatie, te betalen.
Bij minderjarige kinderen zijn er normen vastgesteld om de hoogte van de alimentatie te bepalen. Daarbij spelen slechts een paar zaken een rol: het aantal kinderen, de leeftijd van de kinderen en het gezinsinkomen vóór de scheiding.
In deze opgave nemen we aan dat de ouder bij wie de kinderen gaan wonen geen eigen inkomen heeft.

In de tabel is een gedeelte te zien van de tabel waarmee de alimentatie A per maand wordt bepaald in een situatie met kinderen van 6 tot en met 11 jaar.

tabel

		gezinsinkomen G (in euro per maand) vóór de scheiding					
		1500	2000	2500	3000	3500	4000
aantal kinderen	1	197	287	376	466	555	644
	2	295	431	568	704	841	977
	3	359	533	706	880	1053	1226
	4 of meer	435	645	855	1065	1275	1485

In de tabel is te zien dat bij drie kinderen en een gezinsinkomen van € 3500 de alimentatie A voor deze drie kinderen samen € 1053 is.

Er is, bij een gegeven aantal kinderen, bij benadering een lineair verband tussen de alimentatie A en het gezinsinkomen G.

4p **14** Bereken met behulp van lineair extrapoleren de alimentatie bij twee kinderen en een gezinsinkomen van € 4820.

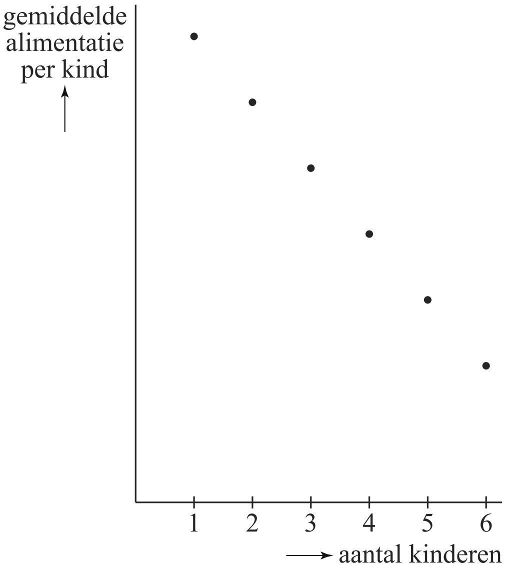
Hoe hoger het gezinsinkomen, hoe hoger het bedrag aan alimentatie dat betaald moet worden. Een jurist stelt: “Iemand die voor drie kinderen alimentatie moet betalen, betaalt voor elke euro gezinsinkomen boven de € 1500 ongeveer 35 cent aan alimentatie.”

3p **15** Laat met een berekening zien of de jurist gelijk heeft.

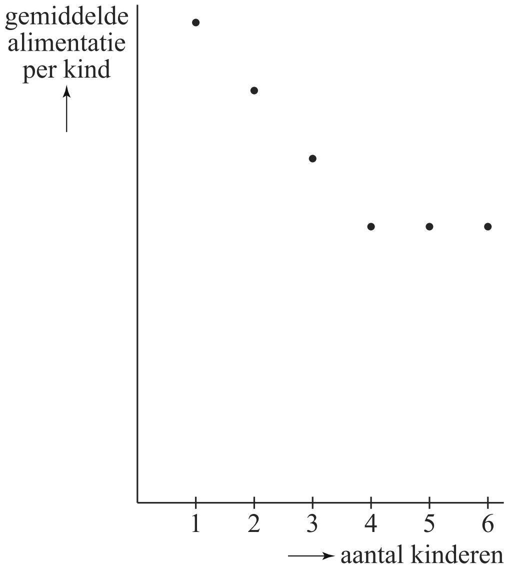
Tot dusverre is alleen gekeken naar de alimentatie die voor alle kinderen samen betaald moet worden. De alimentatie die ieder kind ontvangt, dus de gemiddelde alimentatie **per kind**, is afhankelijk van het aantal kinderen.
Van deze gemiddelde alimentatie per kind is een globale grafiek te tekenen. Die grafiek ziet er, ongeacht het gezinsinkomen, altijd ongeveer hetzelfde uit.

Hieronder zijn vier grafieken gegeven, waarvan er één de juiste is.

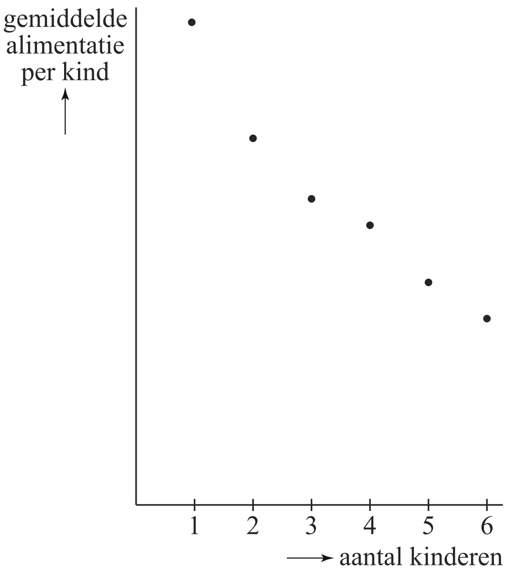
figuur 1



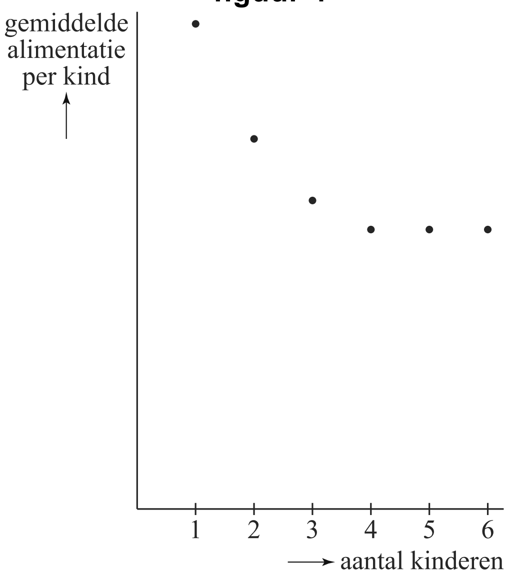
figuur 2



figuur 3



figuur 4



5p **16** Welke grafiek is de juiste? Licht je antwoord toe.

Gebruiksduur

Een fabriek produceert een bepaald type huishoudelijk apparaat dat door veel consumenten wordt gekocht. Sommige van die apparaten gaan lang mee, andere zijn al vrij snel defect.
De serviceafdeling van de fabriek verzamelt informatie over de gebruiksduur van dit type. Dat doet men door te onderzoeken op welk moment de apparaten defect raken.
Er zijn twee verschillende formules waarmee men de gebruiksduur probeert te beschrijven:

formule 1: $P = 100 \cdot (1 - 0,8^t)$

formule 2: $P = 100 \cdot (1 - 0,61^t) - 50t \cdot 0,61^t$

Hierin is P het percentage apparaten dat na t jaar of eerder defect is geraakt.

3p **17** Bij welke van de twee formules is na 5,5 jaar ruim driekwart van de apparaten defect? Licht je antwoord toe.

Op tijdstip t = 0 geven beide formules hetzelfde percentage, namelijk 0. Er is echter nog een ander tijdstip waarop beide formules hetzelfde percentage opleveren.

3p **18** Bereken voor welke andere waarde van t beide formules hetzelfde percentage geven. Rond je antwoord af op één decimaal.

Formules die gebruikt kunnen worden om de gebruiksduur te beschrijven, moeten aan de volgende drie eisen voldoen:

1 op $t = 0$ moet gelden dat $P = 0$;
2 als t groter wordt, moet P toenemen;
3 als t heel groot wordt, moet P naderen naar 100.

4p **19** Geef een redenering aan de hand van formule 1 waaruit blijkt dat formule 1 aan de tweede en derde eis voldoet.

Formule 2 is: $P = 100 \cdot (1 - 0,61^t) - 50t \cdot 0,61^t$.

Deze formule is in de volgende vorm te schrijven: $P = a + (b \cdot t + c) \cdot 0,61^t$.

Hierin zijn a, b en c constanten.

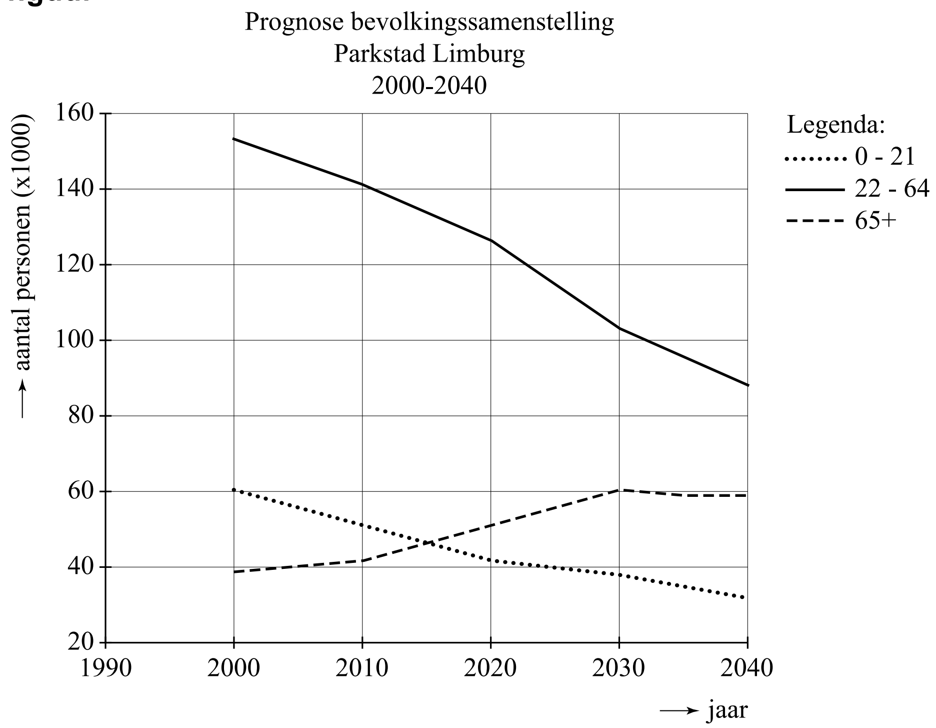
3p **20** Bereken de waarden van a, b en c.

Parkstad Limburg

In de krant lees je vaak over de dreigende vergrijzing: het percentage 65-plussers zal de komende jaren spectaculair stijgen.

Stadsregio Parkstad Limburg omvat acht gemeenten in Zuidoost-Limburg met ongeveer 252 000 inwoners in 2000. Er zijn prognoses gemaakt van de bevolkingssamenstelling tot 2040. Zie de figuur.
Bestuurders van Parkstad Limburg willen duidelijk maken dat de dreigende vergrijzing ook voor Parkstad Limburg geldt.

figuur



7p **21** Maak voor deze bestuurders aan de hand van de gegevens van de figuur een grafiek waarin de spectaculaire stijging van het percentage 65-plussers zichtbaar is. Geef hiermee vervolgens een schatting van het percentage 65-plussers in Parkstad Limburg in 2050.