diswis

1 Inhoudsopgave

2 Colofon

DisWis is een initiatief van Prof. dr. A. Schrijver (Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam) en De Praktijk. De lesmaterialen zijn gebaseerd op de syllabus Grafen: Kleuren en Routeren van Prof. dr. A. Schrijver en bewerkt tot een 40 slu lessenserie voor het voortgezet onderwijs door De Praktijk (www.praktijk.nu).

3 Sudoku's, Roosterpuzzels en Grafen

								7
						6	3	4
			9	4			2	
5		1	7			8	6	
		9						3
				8				
4	3		5					
	1			6	8			
					3	1		9

1 Sudoku

Sudoku

Een *sudoku* is een puzzel van negen bij negen vakjes waarvan een klein aantal al is ingevuld met enkelvoudige cijfers. De kunst is de overige vakjes ook in te vullen op zo'n manier dat in elke horizontale lijn én in elke verticale kolom de cijfers 1 tot en met 9 één keer voorkomen. Bovendien is de puzzel onderverdeeld in negen blokjes van drie bij drie, die elk ook weer eenmaal de cijfers 1 tot en met 9 moeten bevatten.

De moeilijkheidsgraad van een opgave is in tegenstelling tot wat vaak gezegd wordt niet echt afhankelijk van het aantal reeds ingevulde cijfers. Een opgave met 19 gegevens kan heel eenvoudig zijn en een met 36 gegevens heel moeilijk. (Bij het willekeurig genereren van opgaven met 19 gegevens lijkt het aantal moeilijke puzzels zelfs een beetje lager dan dat bij 24 gegevens.) Er zijn sudoku's bekend met 17 gegevens (en een unieke oplossing), maar tot dusver niet met 16 gegevens. Bekijk zelf eens bij een willekeurige sudoku of het aantal mogelijke oplossingen toeneemt als je een cijfer uit de beginsituatie weglaat. Waarom kan het aantal oplossingen niet afnemen?

Latijns Vierkant

Een sudoku is een speciale variant van een *Latijns vierkant*. Een *n*-de orde Latijns vierkant is een $n \times n$ vierkant met daarin precies *n* verschillende symbolen. Die moeten bovendien zo gerangschikt zijn dat in iedere rij en in iedere kolom al deze *n* symbolen één keer voorkomen. Een Latijns vierkant kan een leuke puzzel worden als een aantal symbolen zijn weggelaten.

		4		7	9	6	8	5
			8	4	5	7	9	6
8		9	4		6		5	7
6	9		7		4	5		8
	6	8		5		4	7	9
4	5	6		8	7	9		
9	7		5	6		8	4	
7	8	5	6	9				4
5	4	7	9		8		6	

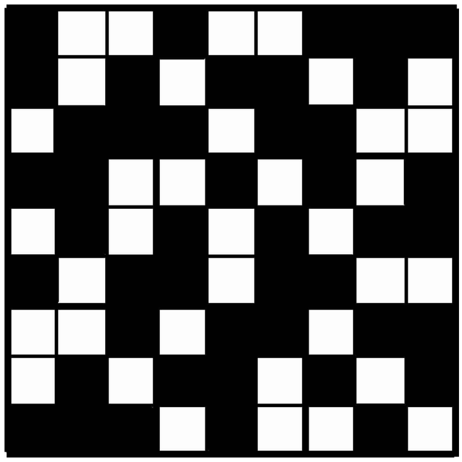
2 Latijns Vierkant

Roosterpuzzel

Een *roosterpuzzel* is eigenlijk een Latijns vierkant waarbij een aantal waarden al zijn ingevuld. In het Latijns vierkant/sudoku op de volgende pagina zijn bijvoorbeeld de waarden 5 t/m 9 allemaal al ingevuld. Kan jij hem verder aanvullen? De puzzel is nog een keer afgebeeld waarbij de reeds ingevulde hokjes zwart zijn gemaakt. Stel nu dat het een *sudoku* is waarvoor de waarden 5 t/m 9 allemaal al zijn ingevuld. Kan de puzzel ook worden aangevuld tot een sudoku? Met andere woorden, kun je de roosterpuzzel ook zodanig invullen dat elk symbool slechts eenmaal in iedere rij, kolom én 3×3 blok voorkomt waarin de puzzel is onderverdeeld?

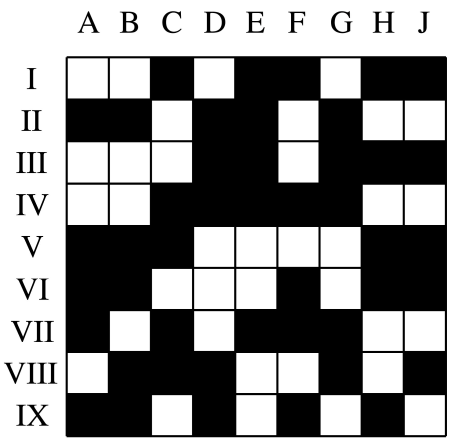
9			6			8	7	5
5		6		7	8		9	
	7	8	5		9	6		
8		7		6		5		9
	5		9		7		6	8
6	9		8		5	7		
		5		9	6		8	7
	8		7	5		9		6
7	6	9		8			5	

3 Sudoku?

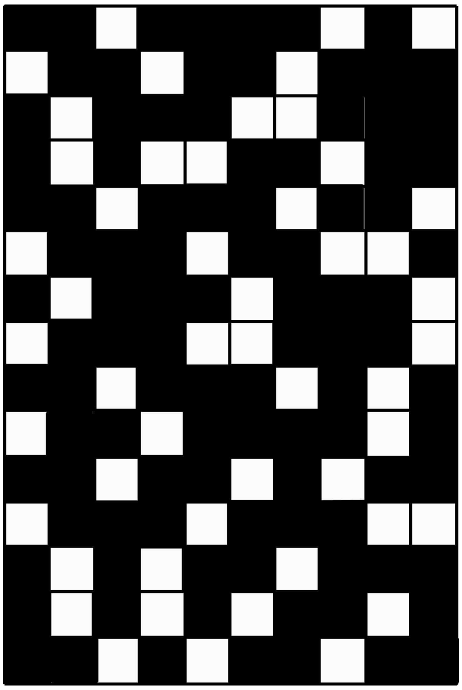


4 Roosterpuzzel

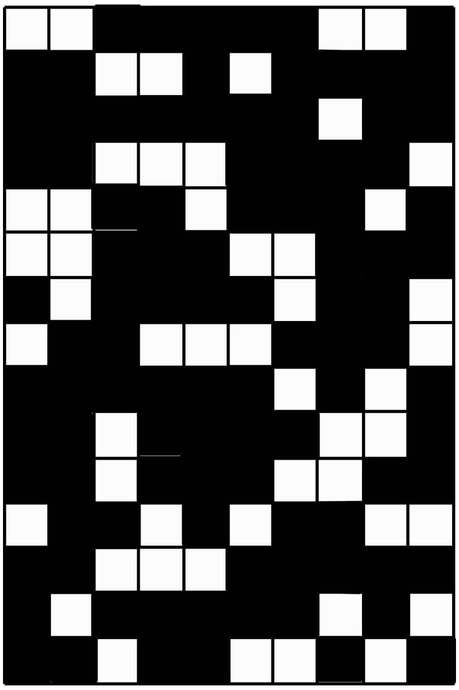
De naam van de puzzel komt van de praktische toepassing ervan. Bij het maken van een schoolrooster is het de bedoeling de docenten aan de verschillende klassen te koppelen. De te roosteren combinaties zijn met een wit vakje aangegeven. Het is niet mogelijk dat een docent in een lesuur voor meerdere klassen staat. Het is evenmin de bedoeling dat er meerdere docenten voor dezelfde klas komen te staan. Men heeft vier lesuren tot de beschikking en elke docent beschikt over een eigen klaslokaal (Het is dan ook een sterk vereenvoudigde versie van een werkelijke roosterpuzzel). Door in elk wit vakje de getallen 1,2,3 of 4 in te vullen zodanig dat ieder getal slechts eenmaal in iedere rij of kolom voorkomt, wordt het gewenste rooster verkregen. Wanneer bijvoorbeeld in het vakje (VIII, E) een 3 wordt ingevuld, moet klas VIII zich voor het derde uur melden in het lokaal van docent E.



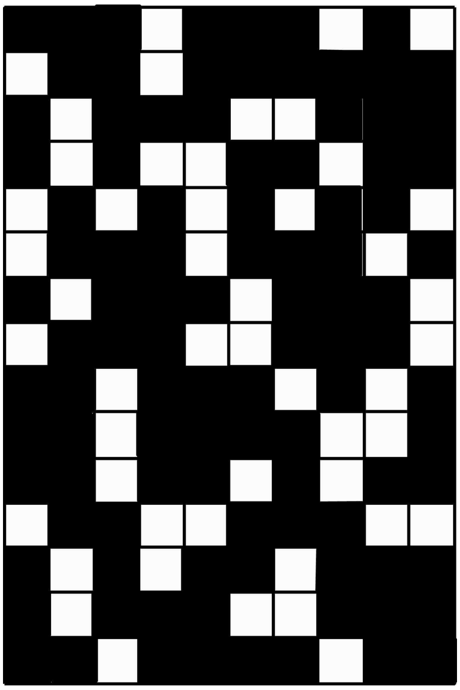
Hieronder staan nog een aantal roosterpuzzels afgebeeld. De bedoeling is dat je de witte vakjes nummert, zodanig dat elk nummer niet vaker dan één keer in iedere rij en kolom voorkomt. Hoeveel verschillende cijfers heb je minimaal nodig? Kun je een systematische manier verzinnen waarmee je alle roosterpuzzels op zou kunnen lossen?



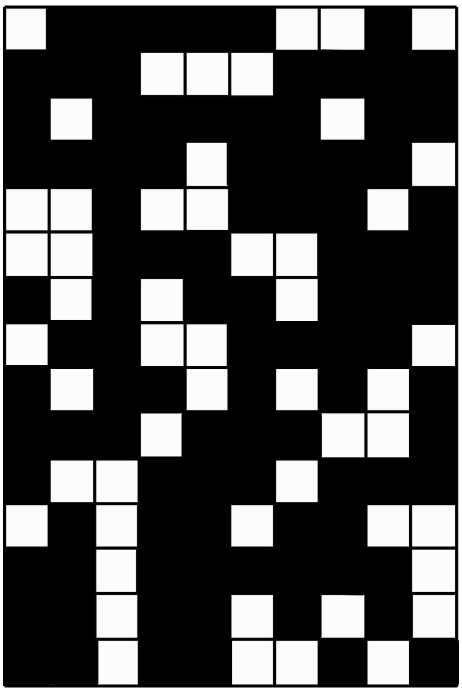
5 Roosterpuzzel 1



6 Roosterpuzzel 2



7 Roosterpuzzel 3



8 Roosterpuzzel 4

Grafen

De roosterpuzzels die hierboven staan, blijken representaties van *grafen*. De graaf is een fundamenteel wiskundig begrip. Op zich is het niet moeilijk om je een voorstelling te maken van een graaf. Het is een verzameling punten en een verzameling puntparen, die je als lijnen tussen de punten kunt voorstellen. Het is verbazingwekkend hoeveel theorie er kan worden ontwikkeld over deze puntjes en lijntjes. We zullen in de komende lessen een aantal onderdelen uit de grafentheorie behandelen. Laten we eerste maar eens beginnen met het formuleren van de definitie van een graaf.

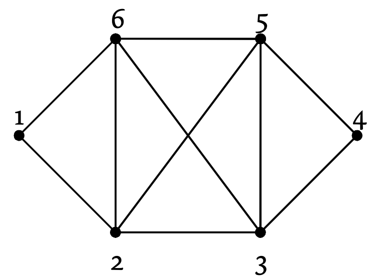
Definitie 1: Graaf

Een graaf G is een geordend paar (V,E) waarbij V een eindige verzameling is en E een verzameling paren uit V.

Dit is een behoorlijk abstracte definitie. Wat is een geordend paar? En wat is eigenlijk een eindige verzameling? Om een beeld te krijgen van wat hier nu eigenlijk staat, geven we eerst een klein voorbeeld.

Een verzameling is een zeer elementair begrip in de wiskunde. In deze syllabus worden verzamelingen beschreven door de elementen van de verzameling. Een voorbeeld van een eindige verzameling is $V=\{1,2,3,4,5,6\}$. In dit geval zijn de elementen 1, 2, 3, 4, 5 en 6. Je kunt de elementen van de verzameling V ook als punten voorstellen. Als we geen punten in V hebben noemen we V leeg. We zouden kunnen schrijven V={ }, maar als notatie voor *de lege verzameling* wordt in de wiskunde het symbool ∅ gebruikt.

Een paar is een verzameling met twee elementen. Een verzameling paren uit V kan zijn $E=\{\{1,2\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{5,6\}\}$. V en E zijn beiden eindige verzamelingen. E is een verzameling paren uit V, maar andersom geldt dit niet. Er is dus een verschil tussen de verzamelingen V en E. (Er bestaat een graaf waarbij er geen verschil is tussen V en E. Welke is dat?) We geven dit onderscheid aan door de volgorde waarin we ze noemen (en zetten nu ronde haken om aan te geven dat de volgorde van belang is). Het geordende paar (V,E) is volgens de definitie een graaf.



9 De graaf $G=(V,E)$ zoals hiernaast beschreven

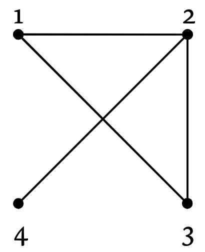
Je kunt je de verzameling paren als lijnen voorstellen. Een paar $e=\{1,2\}$ is dan bijvoorbeeld de lijn die de punten 1 en 2 met elkaar verbindt. Op deze manier kun je een graaf tekenen.

Opgave 1.

Teken de graaf $G=(\{1,2,3,4,5,6\},\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\})$.

Je kunt andersom ook met een graaf een tekening beschrijven. Dat is de meest gangbare manier om een graaf te representeren. Onderstaande tekening is een voorbeeld van zo'n representatie van een graaf, d.w.z. van de graaf (V,E) wordt de verzameling V wordt met puntjes weergegeven en de verzameling E met lijntjes.

Opgave 2.
Geef de notatie van de graaf die deze tekening beschrijft.

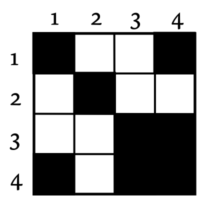


We kunnen een graaf ook beschrijven met een matrix. Aan iedere $v \in V$ ken je een rij en een kolom toe en voor elk paar $\{v, w\} \in E$ zet je een 1 op het kruispunten tussen de rijen en kolommen die corresponderen met de punten $v, w \in V$. De rest van de elementen van de matrix krijgen de waarde 0. De graaf uit Opgave 2 ziet er dan als volgt uit:

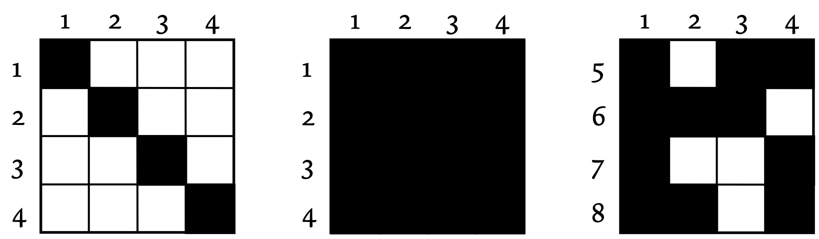
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Opgave 3.
Geef de matrixrepresentatie van de graaf in figuur 9.

In plaats van een matrix met nullen en enen kun je ook een rooster met zwarte en witte hokjes tekenen:



Opgave 4.
Teken bij elk van de onderstaande roosters de bijbehorende graaf. (Let op de nummering van de rijen en kolommen!)



Het laatste roostertje in Opgave 4 is een voorbeeld van een roosterpuzzel zoals we die in de vorige paragraaf zijn tegengekomen.

Opgave 5.
Teken de graaf die hoort bij de roosterpuzzel van figuur 4. Je mag zelf de namen van de punten verzinnen.

Grafen worden veel gebruikt in de combinatoriek. Binnen deze tak van de wiskunde is het tellen van het aantal mogelijke combinaties een belangrijk onderdeel. In de volgende opgave zullen we zien dat het aantal mogelijke grafen sterk toeneemt als de puntenverzameling groter wordt.

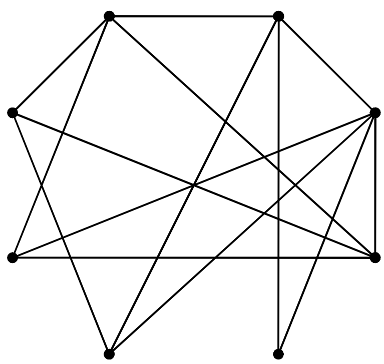
Opgave 6.
Bereken hoeveel grafen $G=(V,E)$ er bestaan met $V=\{1,2,3,4\}$? Kun je dit nog algemener formuleren: hoeveel grafen $G=(V,E)$ bestaan er met $V=\{1,2,\ldots,n\}$? Hoeveel grafen bestaan er dus met 100 punten? (Schrijf je methode om te tellen bij je antwoord.)

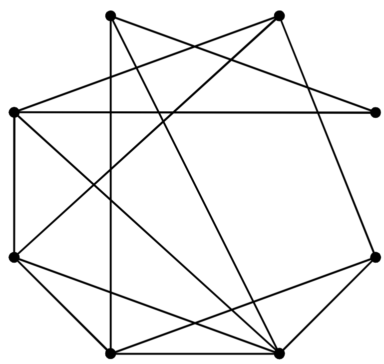
Zoals we hebben gezien, wordt een graaf gedefinieerd met behulp van verzamelingen. De verzamelingenleer (wiskundige theorie van verzamelingen) dient als een fundament voor de wiskunde. We behandelen een paar begrippen uit de verzamelingenleer die zowel voor verzamelingen als voor grafen kunnen worden gedefinieerd..

Complement

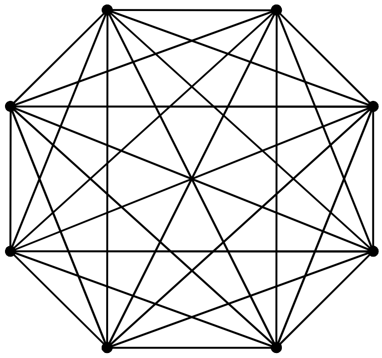
Een belangrijk begrip uit de verzamelingenleer is het *complement* van een deelverzameling. Het complement bestaat uit alle elementen die niet in de deelverzameling zitten.
Stel je voor dat je een verzameling X hebt en X is een deelverzameling van bijvoorbeeld de natuurlijke getallen. Het complement $\overline{X}$ van X zijn dan alle natuurlijke getallen die niet in X zitten. Bovendien geldt er dat X en zijn complement $\overline{X}$ samen alle natuurlijke getallen bevatten. In de grafentheorie is er ook een begrip complement. We geven de formele definitie.

Definitie 2: Complement
Het complement van een graaf $G=(V,E)$ is de graaf $\overline{G}=(V,F)$ waarbij F uit alle paren bestaat die niet tot E behoren.



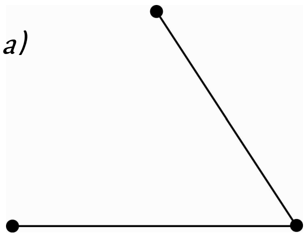


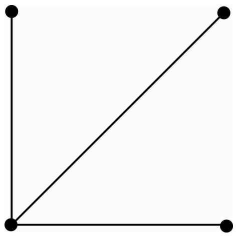
De grafen in bovenstaande tekeningen zijn complementen van elkaar. Je ziet dat de puntenverzameling van beide grafen hetzelfde is. Als je de paren, of lijnen, samen in een graaf zou zetten heb je een graaf waarin alle punten met elkaar verbonden zijn. Zo'n graaf heet een volledige graaf en daar wordt verderop aandacht aan besteed.

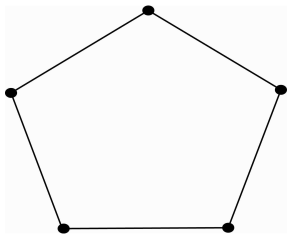


10 Een volledige graaf op 8 punten

Opgave 7.
Wat zijn de complementen van de volgende grafen?

a)


b)


c)


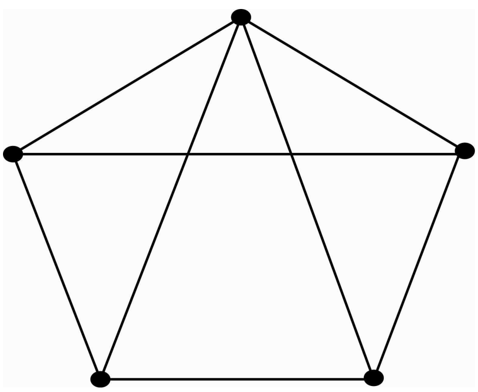
Opgave 8.

Leid uit de definitie van het complement van een graaf af dat $\overline{\overline{G}} = G$. M.a.w. het complement van het complement van een graaf G is de graaf G zelf. Gebruik in je redenering puur en alleen de definitie van een graaf en de definitie van het complement van een graaf.

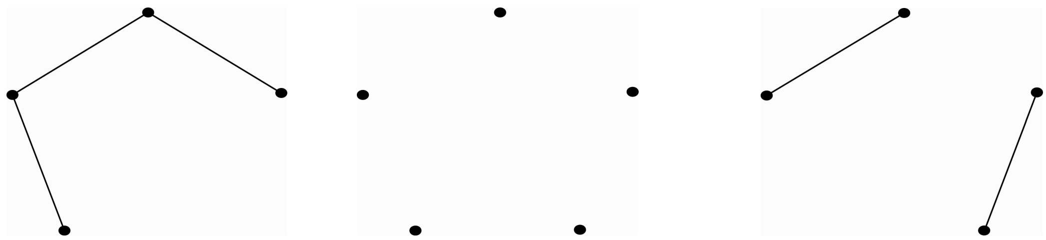
Een ander begrip uit de verzamelingenleer is de *deelverzameling*. Alle elementen van een deelverzameling X' van X moeten ook in X zitten. De notatie hiervoor is $X' \subseteq X$. Ook hiervoor bestaat een vergelijkbaar begrip in de grafentheorie.

Deelgrafen

Definitie 3: Deelgraaf
Een graaf $G' = (V', E')$ heet een deelgraaf van $G = (V, E)$ als $V' \subseteq V$ en $E' \subseteq E$.



De volgende grafen zijn allemaal deelgrafen van bovenstaande graaf.



Opgave 9.
Verzin zelf nog drie deelgrafen van bovenstaande graaf.

Opgave 10.
Waarom is $(\{1,4,5\},\{\{1,4\},\{1,5\},\{3,4\}\})$ geen deelgraaf van $(\{1,2,3,4,5\},\{\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\},\{4,5\}\})$?

Opgave 11.
Bereken hoeveel deelgrafen er bestaan van de graaf $(\{1,2,3\},\{\{1,2\},\{2,3\}\})$.

Opgave 12.
Hoeveel grafen zijn er zowel deelgraaf van $G=(V,E)$ als deelgraaf van het complement $\overline{G}$ van G?

4 Wandelingen, Samenhang en Graden

Op het vorige hoofdstuk is de formele definitie van een graaf gegeven. Het blijkt dat een aantal begrippen uit de verzamelingenleer ook voor grafen kunnen worden geformuleerd. Deze begrippen geven houvast als je iets over een graaf wilt zeggen. Hieronder worden nog een aantal definities behandeld waarmee we onze begrippenkader verder kunnen uitbreiden.

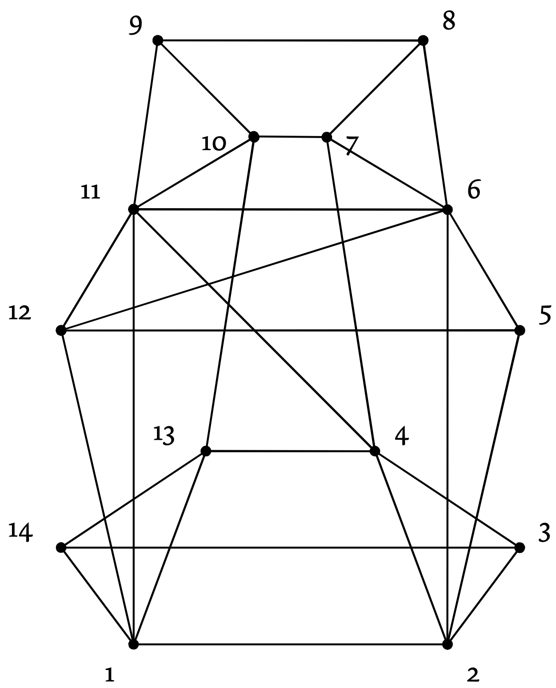
Een *wandeling* in een graaf is goed voor te stellen als een 'echte' wandeling. Je 'wandelt' over de lijnen van de graaf van punt naar punt. Je mag dus niet van een punt v_{i-1} naar v_i springen als er geen lijn $\{v_{i-1}, v_i\}$ in je parenverzameling E zit. *Wandeling*

Definitie 4: Paden en Wandelingen
Een wandeling in een graaf $G = (V, E)$ is een rij punten $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ zodanig dat v_{i-1} en v_i verbonden zijn voor elke $i = 1, \dots, k$.

Het getal k heet hier de *lengte* van de wandeling en is dus het totale aantal lijnen dat je passeert tijdens je wandeling.

We noemen een wandeling gesloten als begin- en eindpunt hetzelfde zijn. Gesloten wandelingen noemen we ook wel *circuits* of *cykels*.

Als in een wandeling $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ de punten $v_0, v_1, \dots, v_k$ verschillend zijn, dan noemt men de wandeling W ook wel een *pad*. Paden en wandelingen zullen bij de volgende definities een belangrijke rol spelen. *Pad*



Opgave 1.
In de figuur links is de graaf $G = (V, E)$ getekend. Volg daarin de wandeling $W = (14, 1, 2, 4, 13, 1, 14, 3, 4, 11, 10, 7, 6, 8, 9)$. Wat is de lengte van de wandeling? Geef in de graaf ook een (kort) pad aan dat loopt van 14 naar 9. Geef nu een pad aan van 14 naar 9 dat deel is van de wandeling W.

Opgave 2.
Beredeneer dat wanneer er in een graaf $G = (V, E)$ een wandeling van een punt $s \in V$ naar een punt $t \in V$ loopt (met $s \neq t$), er ook een pad van s naar t moet lopen.

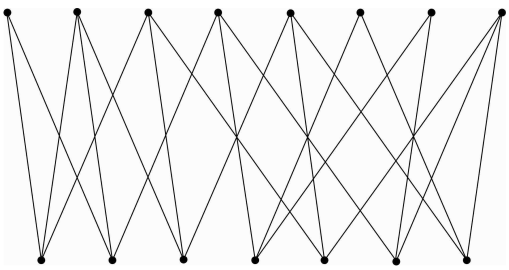
Je kunt in een graaf ook een afstandsbegrip definiëren. De *afstand* tussen twee punten v en w wordt gegeven door de lengte van het kortste pad tussen de twee punten. Er bestaan *Afstand* verscheidene methoden om het kortste pad tussen twee punten te vinden. De bekendste is het Dijkstra-algoritme. Het begrip afstand komt in de rest van de module niet meer voor, maar het is mogelijk dat je het in één van de eindopdrachten nog eens tegenkomt.

Samenhang

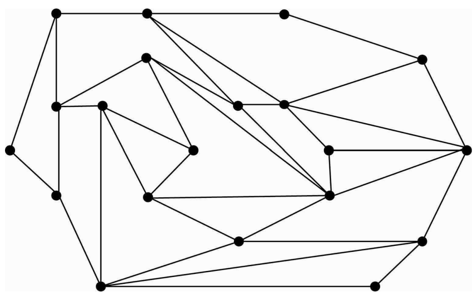
Een ander begrip dat gebruik maakt van paden in een graaf is *samenhang*. Ook samenhang zal intuïtief weinig problemen opleveren. Een graaf is samenhangend als de punten in de graaf via een pad met elkaar verbonden zijn. Je kunt dus vanuit elk punt in de graaf een wandeling maken naar ieder ander punt in de graaf.

Definitie 5: Samenhang
Een graaf $G = (V, E)$ heet samenhangend als er tussen elk tweetal punten een pad loopt.

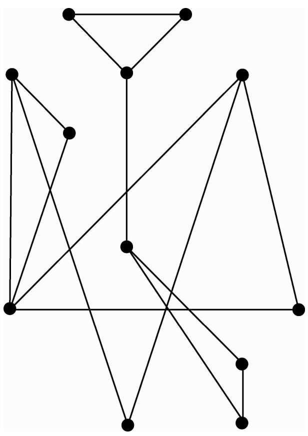
Opgave 3.
Hieronder zijn een aantal grafen getekend. Welke grafen zijn samenhangend? Waarom wel/niet?



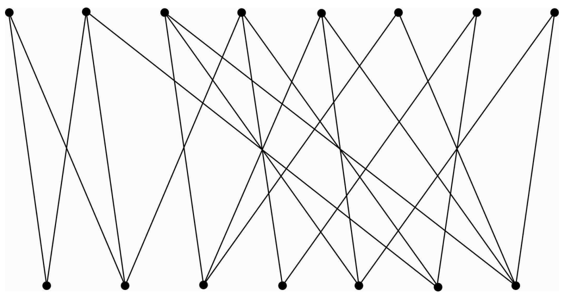
Graaf 1



Graaf 2



Graaf 3



Graaf 4

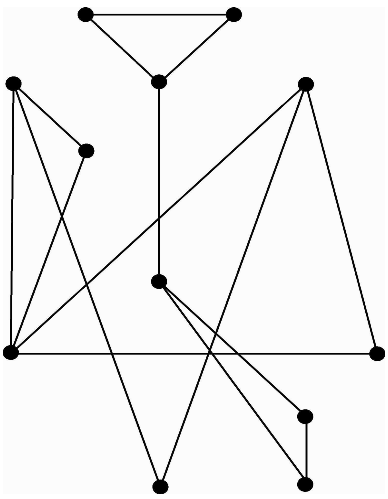
Opgave 4.
Bestaat er een samenhangende graaf op 6 punten met 4 lijnen? Waarom wel/niet?

Opgave 5.
Laat zien dat er voor iedere n er een samenhangende graaf $G = (V, E)$ bestaat waarbij V uit n punten bestaat en E uit n-1 paren.

Opgave 6.
Teken een samenhangende graaf waarvan het complement onsamenhangend is. Teken ook een samenhangende graaf waarvan het complement samenhangend is. Beredeneer nu waarom het complement van een onsamenhangende graaf altijd samenhangend moet zijn.

Voor een onsamenhangende graaf $G=(V,E)$ geldt dus dat er punten v_i en v_j zijn waarvoor geldt dat er geen pad bestaat dat begint in v_i en eindigt in v_j. We kunnen de puntenverzameling V dan in losse componenten opdelen.
Voor de punten binnen een *component* geldt dat er een pad bestaat dat loopt van het ene punt naar het andere punt, maar er bestaat geen pad dat van punten in het ene component naar punten in het andere component loopt. Een component op zich is dus samenhangend, maar er bestaan geen paden naar de rest van de graaf. *Component*
We geven een formele definitie. In deze definitie maken we gebruik van de begrippen deelgraaf en samenhang.

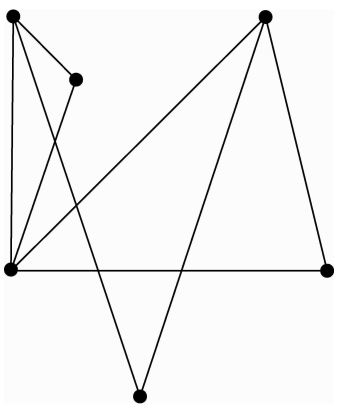
Definitie 6: Componenten
Een component van een graaf $G=(V,E)$ is een maximale samenhangende deelgraaf.



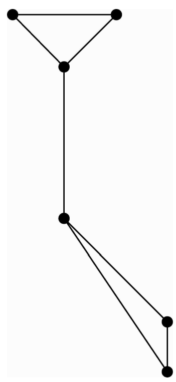
Een deelgraaf $G'=(V',E')$ van $G=(V,E)$ is een maximale samenhangende deelgraaf als G' samenhangend is en iedere andere deelgraaf G'' die G' bevat niet meer samenhangend is.

We bekijken nog eens *graaf 3* uit *opgave 3.* Als het goed is, heb je geconcludeerd dat deze graaf onsamenhangend is. We kunnen dan meer dan één component onderscheiden in deze graaf. Het is niet mogelijk om een pad te maken vanuit een punt in het ene component naar een punt in het andere component. Dit is duidelijk zichtbaar als beide componenten los van elkaar worden getekend. Hieronder staan beide componenten afzonderlijk getekend

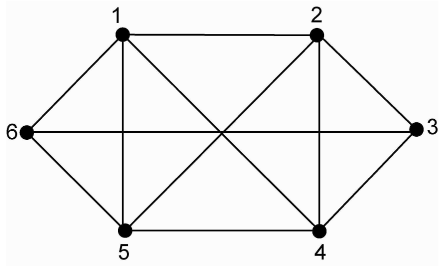
De bovenstaande (afzichtelijke) graaf bestaat uit de volgende twee componenten:



en



Opgave 7.
Teken het complement van de graaf die rechts is getekend. Wat zijn de componenten van het complement van de graaf?

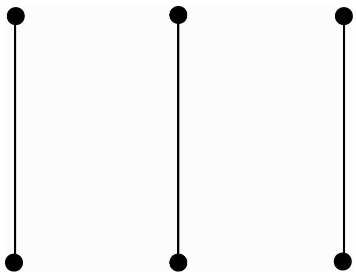


Opgave 8.
Beredeneer dat één punt niet in twee componenten kan zitten.

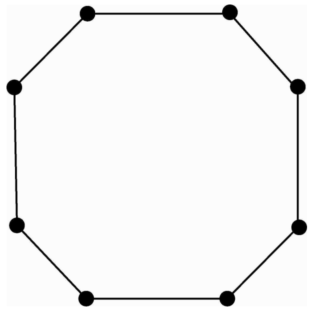
Een ander begrip dat helpt bij het praten over grafen is een eigenschap van afzonderlijke punten. Het aantal lijnen dat samenkomt in een punt v noemt men de *graad* of de *valentie* van dat punt. Omdat elk van deze lijnen v verbindt met een ander punt, is de graad van v ook het aantal buren van v. Dit houden we als formele definitie van de graad van een punt. *Graad/Valentie*

Definitie 7: Graden en Reguliere Grafen
De graad van het punt $v \in V$ is het aantal buren van v.

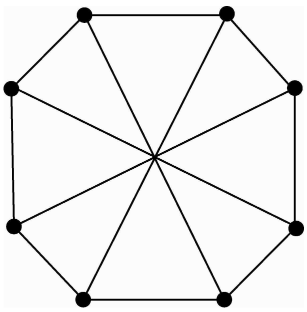
Een graaf heet regulier als alle punten dezelfde graad hebben. Een graaf waarvan alle punten graad k hebben heet k-regulier. Hieronder zijn een paar verschillende reguliere grafen getekend.



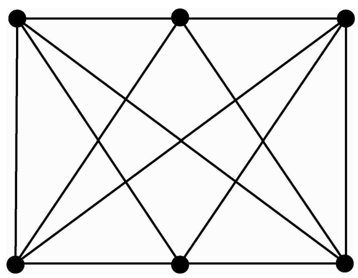
11 Een 1-reguliere graaf



12 Een 2-reguliere graaf



13 Een 3-reguliere graaf



14 Een 4-reguliere graaf

De maximum graad van een graaf $G=(V,E)$ wordt genoteerd met $\Delta(G)$. $\Delta(G)$ is de graad van de punten $v \in V$, waarvoor geldt dat ze de meeste buren hebben. De maximum graad is een eigenschap van de hele graaf G. Graden worden per punt gegeven.

De som van de graden van alle punten in een graaf $G=(V,E)$ is een even getal. Dit is namelijk altijd gelijk aan tweemaal het aantal lijnen in de graaf. Hou dit in je achterhoofd bij het maken van de volgende opgaven.

Opgave 9.
Teken een 3-reguliere graaf op 10 punten met de eigenschap dat elke twee punten die niet met elkaar verbonden zijn, een gemeenschappelijke buur hebben.

Opgave 10.
Zij $m > n$. Het aantal n-reguliere grafen op m punten is gelijk aan het aantal x-reguliere grafen op m punten. Wat is x?

Opgave 11.
Hoeveel 2-reguliere grafen $G = (V, E)$ bestaan er met $V = \{1,2,3,4,5\}$? En hoeveel 3-reguliere grafen?

Opgave 12.
Hoeveel 2-reguliere grafen $G = (V, E)$ bestaan er met $V = \{1,2,3,4,5,6\}$? En hoeveel 3-reguliere grafen?

Opgave 13.
Beredeneer waarom elke graaf een even aantal punten heeft van oneven graad. (Hint: stel dat er een oneven aantal punten oneven graad hebben. Hoeveel lijnen heeft de graaf dan in totaal? Kan dat?)

Opgave 14.
Wat is de hoogste graad dat een punt in een graaf $G = (V, E)$ op *n* punten kan hebben? Wat is de laagste graad? Beredeneer dan nu waarom elke graaf met tenminste 2 punten, 2 punten met dezelfde graad heeft. (Hint: duiventilprincipe. Stel je hebt *n* duiven en *m* hokjes. Als *n>m* en je zet alle duiven in een hokje, dan is er een hokje waar minstens twee duiven in zitten.)

Volledige graaf

We hebben bij het behandelen van het complement van een graaf al kennis gemaakt met de *volledige graaf*. In een volledige graaf zijn alle punten met elkaar verbonden. Volledige grafen zijn een belangrijke groep grafen die zelfs een eigen naam en notatie hebben.

Definitie 8: Volledige Grafen
Een graaf $G = (V, E)$ heet volledig als elk paar punten in *V* met elkaar verbonden is. Een volledige graaf op *n* punten noemen we K_n.

Opgave 15.
Op *pagina 9* is de K_8 getekend. Teken zelf de grafen K_1, K_2, K_3, K_4 en K_5?

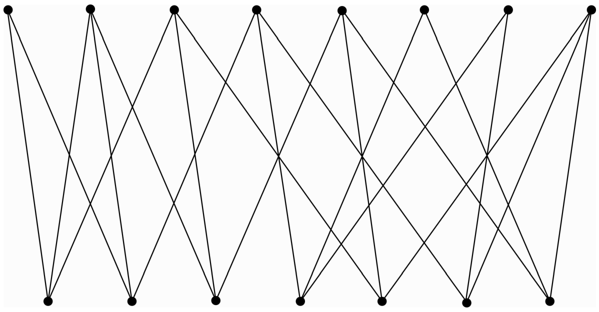
Opgave 16.
Wat is het complement van een volledige graaf K_n?

Opgave 17.
Hoeveel lijnen heeft een volledige graaf op *n* punten?

Een andere belangrijke groep grafen zijn de *bipartiete grafen* (bipartiet betekent 'in twee partities verdeeld'). We hebben al wat voorbeelden langs zien komen. *Bipartiete grafen*

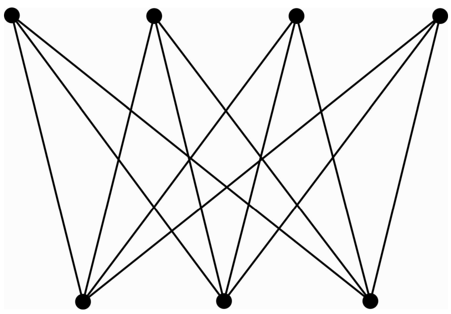
Definitie 9: Bipartiete Grafen

We noemen een graaf $G = (V, E)$ bipartiet als V in twee niet-lege klassen V_1 en V_2 kan worden verdeeld zodat punten in een klasse onderling niet met elkaar zijn verbonden. Een graaf heet volledig bipartiet als alle punten in de klasse V_1 zijn verbonden met alle punten in V_2.



Een voorbeeld van een bipartiete graaf. Kun je de klassen V_1 en V_2 aangeven?

Een goede notatie is het halve werk. Hier volgen een paar handige en veelgebruikte notaties. Als het aantal elementen in V_1 gelijk is aan *n*, wordt dat wel genoteerd als $|V_1| = n$. Als in een volledige bipartiete graaf $|V_1| = n$ en $|V_2| = m$, dan noteren we de graaf met $K_{n,m}$.



De graaf $K_{3,4}$

Opgave 18.

Hoeveel lijnen heeft de graaf $K_{n,m}$?

5 Euler-grafen en het Koningsberger Bruggenprobleem

We hebben inmiddels al een aardig begrippenkader ontwikkeld. Het wordt tijd om hier wat meer mee te doen. Zoals in het begin al werd opgemerkt, bestaan er veel toepassingen voor grafen. Andersom leveren praktische problemen interessante wiskunde op. Een historisch voorbeeld hiervan zullen we in dit hoofdstuk behandelen.

Eulergrafen

In dit hoofdstuk introduceren we *Euler-grafen*. Euler-grafen vormden de sleutel voor het beroemde *Koningsberger bruggenprobleem*. Euler definieerde dit type grafen als volgt:

Definitie 10: Euler-cykels en Euler-grafen
Een Euler-cykel in een graaf $G = (V, E)$ is een gesloten wandeling $W = (v_0, \ldots, v_k = v_0)$ met de eigenschap dat W elke lijn in G precies eenmaal doorloopt. Met andere woorden, voor elke lijn $e \in E$ bestaat er precies één $i \in \{1, \ldots, k\}$ zodat $e = \{v_{i-1}, v_i\}$. Een graaf G heet een Euler-graaf als G een Euler-cykel heeft.

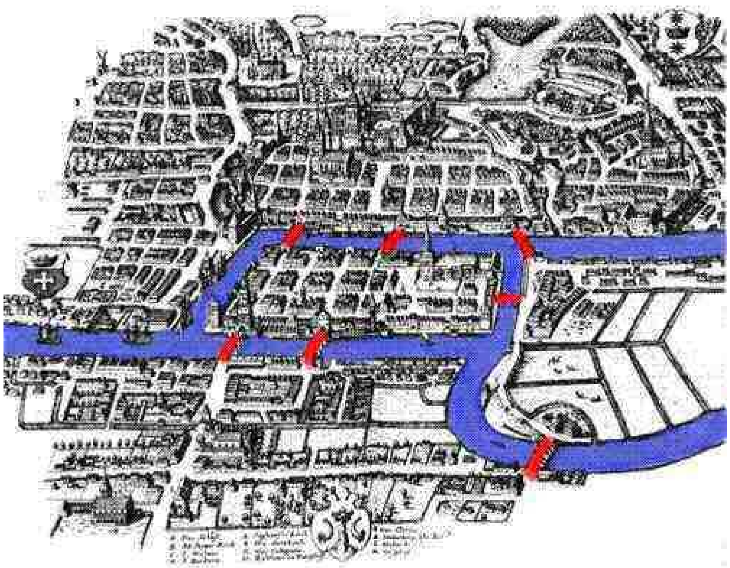
In een Euler-graaf is het dus mogelijk om een rondwandeling te maken die elke *lijn* in de graaf precies één keer doorloopt en weer terugkomt in het beginpunt. (Merk op dat geïsoleerde punten in een graaf niet relevant zijn voor het hebben van een Euler-cykel. Geïsoleerde punten zijn punten met graad 0.)

Leonhard Euler definieerde cykels met bovenstaande eigenschap als eerste. Dit is de reden dat ze Euler-cykels worden genoemd. Er is veel meer over deze wiskundige te vertellen.

Koningsberger uggenprobleem

Leonhard Euler (1707-1783) was een van de grootste wiskundigen ooit. In 1736 publiceerde hij een van zijn honderden artikelen. Het was de oplossing van het zogenaamde *Koningsberger bruggenprobleem.* Rond 1736 was Koningsbergen een grote Pruisische stad aan de monding van de rivier de Pregola in de Baltische Zee. In de rivier lag een klein eilandje dat met bruggen was verbonden met het vaste land. De inwoners van Koningsbergen vroegen zich af of het mogelijk was om een stadswandeling te maken die precies één keer over elk van de zeven bruggen ging.

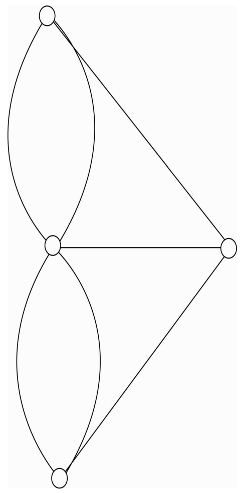
Koningsbergen heet inmiddels Kaliningrad en is een Russische enclave binnen de EU. Behalve om het bruggenprobleem stond Koningsbergen ook bekend als de geboortestad van de wiskundige David Hilbert (1862-1943) en de filosoof Immanuel Kant (1724-1804).



Euler representeerde het bruggenprobleem als een grafenprobleem door de

Multigraaf

stadsdelen voor te stellen als punten, en de bruggen als lijnen die de punten (=stadsdelen) met elkaar verbinden. De graaf is eigenlijk een *multigraaf*. In multigrafen is het mogelijk dat er meer dan één lijn tussen de punten lopen. De stadswandeling zou mogelijk zijn geweest als en alleen als deze graaf een Euler-graaf is.



Opgave 1.
Kun je in de graaf hiernaast een Eulercykel vinden?

Opgave 2.
Teken een Eulergraaf G die voldoet aan de volgende uitspraken. Als je denkt dat het niet kan, leg dan uit waarom je dat denkt.

- *a)* G is bipartiet
- *b)* G is onsamenhangend
- *c)* G heeft een oneven aantal punten
- *d)* G heeft een oneven aantal lijnen
- *e)* G is 2-regulier
- *f)* G is 3-regulier

We hebben in de vorige opgaven gezien dat Eulergrafen blijkbaar aan bepaalde eigenschappen moeten voldoen. Bijvoorbeeld in Opgave 12.f) heb je waarschijnlijk gevonden dat een 3-reguliere Eulergraaf niet bestaat. We zullen in dit hoofdstuk een bruikbare karakterisering vinden voor een Eulergraaf. Om deze te begrijpen, moeten we ons eerst door wat theorie heen worstelen. De volgende propositie leert ons dat ieder punt in een Eulergraaf even graad heeft.

Propositie 1
Zij $G=(V,E)$ een Eulergraaf en C de Euler-cykel van deze graaf. Voor elke $v\in V$ geldt dat de graad van v gelijk is aan tweemaal het aantal keer dat v in C voorkomt.
Bewijs.
Stel dat een willekeurige $v\in V$ in totaal k keer in C voorkomt. We bewijzen dat voor deze v geldt dat de graad van v minimaal gelijk is aan $2k$. Stel namelijk dat $\text{graad}(v)<2k$, dan zijn er lijnen die uit v vertrekken die vaker dan eenmaal door C worden doorlopen. Dit is in tegenspraak met de defintie van Euler-cykel.
Het bewijs dat de graad van v ook niet hoger kan zijn dan $2k$ is een opgave.

■

Opgave 3.
Zij $G=(V,E)$ een Eulergraaf en C de Euler-cykel van deze graaf. Bewijs dat voor elke $v\in V$ geldt dat de graad van v niet groter is dan tweemaal het aantal keer dat v in C voorkomt. (Hint: bewijs van propositie 1)

Opgave 4.
Bewijs dat een Eulergraaf zonder geïsoleerde punten samenhangend moet zijn.

We weten nu dat Eulergrafen (zonder geïsoleerde punten) samenhangend zijn en dat alle punten in een Eulergraaf even graad hebben. Dit zijn noodzakelijke eigenschappen van een Eulergraaf: als een graaf niet samenhangend is of punten met oneven graad hebben, mogen we vaststellen dat het niet om een Eulergraaf gaat.

Zijn deze eigenschappen ook voldoende om een Eulergraaf te herkennen? Met andere woorden, zijn alle samenhangende grafen met alle graden even Eulergrafen? De volgende propositie vertelt ons dat in een samenhangende graaf met alle graden even in ieder geval een wandeling bestaat die alle lijnen precies eenmaal doorloopt.

Propositie 2
Zij $G=(V,E)$ samenhangend en met alle graden even, dan bestaat er een wandeling W die alle lijnen precies eenmaal doorloopt.
Bewijs.
Maak een wandeling $W=(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ van *maximale lengte* die geen lijn vaker dan eenmaal doorloopt. Deze wandeling W is gesloten (zie Opgave 5).
Veronderstel nu dat er een lijn $f \in E$ bestaat die niet door W wordt doorlopen. Omdat G samenhangend is, bestaat er een pad $P=(w_0, w_1, \ldots, w_m)$ zodat $f=\{w_0, w_1\}$ en w_m in W voorkomt. Kies P zo kort mogelijk, zodat er gesteld mag worden dat er geen lijnen in P ook in W voorkomen (anders kunnen we P inkorten).
Omdat w_m in W voorkomt, bestaat er een i waarvoor $v_i = w_m$. Er geldt dan dat $W'=(w_0, w_1, \ldots, w_m = v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n = v_0, v_1, \ldots, v_i)$ een wandeling is, waarin elke lijn hoogstens eenmaal voorkomt. Bovendien geldt dat de lengte van W' gelijk is aan $n+m>n$ en dat is weer in tegenspraak met de aanname dat W maximale lengte had. We concluderen dat W alle lijnen precies eenmaal doorloopt.

■

Opgave 5.
Bewijs dat de wandeling W in het bewijs van propositie 2 gesloten is.

We kunnen nu het volgende bewijzen:

Stelling 1: De Stelling van Euler
Een graaf $G=(V,E)$ zonder geïsoleerde punten is een Euler-graaf $\Leftrightarrow$ G is samenhangend en alle graden van G zijn even.

Bewijs
Propositie 1, Opgave 3 en Opgave 4 geven ons de implicatie naar rechts. Propositie 2 en Opgave 5 geven ons de implicatie naar links.

■

Deze stelling geeft ons een handzaam argument om te bepalen of een graaf een Eulergraaf is of niet.

Opgave 6.
Voor welke n is K_n een Euler-graaf?

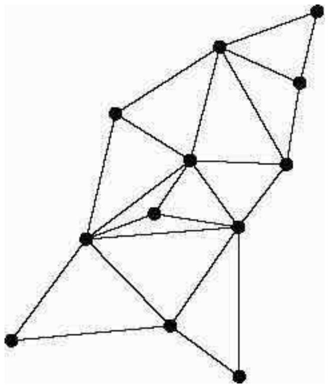
Opgave 7.
Geef een eenvoudig criterium om te bepalen of er in een graaf $G=(V,E)$ een wandeling bestaat (niet noodzakelijk een cykel) die alle lijnen precies eenmaal doorloopt. Waarom bestaat er geen wandeling door Koningsbergen die precies eenmaal over elk van de bruggen gaat?

6 Puntkleuring en Planaire Grafen

We hebben in de voorgaande hoofdstukken al gezien hoe een praktisch vraagstuk als het Konigsberger bruggenprobleem het onderzoek in de grafentheorie stimuleerde. Een ander bekend probleem waarvan de invloed in de grafentheorie erg groot is, is het *vierkleurenprobleem*. Sinds er landkaarten bestaan vraagt men zich af of het mogelijk is een landkaart te kleuren met slechts vier kleuren. Er is veel informatie over het vierkleurenprobleem te vinden op het internet. *Vierkleuren-probleem*

Ook het vierkleurenprobleem kan worden gemodelleerd als een grafenprobleem. Kijk bijvoorbeeld maar naar de kaart van Nederland. Stel je wilt de kaart inkleuren met zo min mogelijk kleuren. Provincies die aan elkaar grenzen mogen niet dezelfde kleur krijgen.

Het kleuren van de provincies zodat aan elkaar grenzende provincies niet dezelfde kleur krijgen, is hetzelfde als het kleuren van de punten in de graaf rechts, zodanig dat punten waartussen een lijn loopt, niet dezelfde kleur krijgen.



Het kleuren van grafen bleek interessante wiskunde op te leveren. Laten we het kleuren van grafen eerst maar eens formeel maken. Laat hiertoe K een verzameling kleuren zijn, bijvoorbeeld $K=\{\text{blauw,geel,groen,rood}\}$ en neem een graaf $G=(V,E)$ met $V=\{1,2,3,4,5\}$.
Het kleuren van de punten van een graaf kan worden gezien als een toewijzing van een kleur aan elk van de punten in V. Wiskundig gezien betekent dat dat een kleuring een functie is van de puntenvezameling V naar de kleurenverzamelingfunctie K.
Als de functie $f:V\rightarrow K$ het element $v\in V$ koppelt aan een element $k\in K$ geven we dat aan als $f(v)=k$. Een voorbeeld van zo'n functie wordt gegeven door de definitie $f(1)=\text{blauw},\ f(2)=\text{rood},\ f(3)=\text{blauw},\ f(4)=\text{geel},\ f(5)=\text{geel}$.
Zoals we in de inleiding hebben gezien, moet een kleuring ook aan de eis voldoen dat punten die buren van elkaar zijn niet dezelfde kleur mogen krijgen. Formeel kan een puntkleuring als volgt worden gedefinieerd.

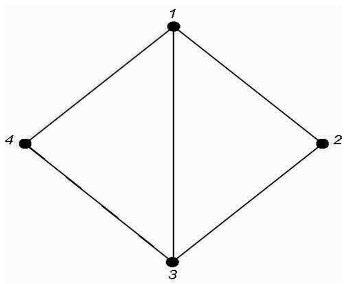
Definitie 11: Kleuring *Kleuring*

Een *kleuring* van een graaf $G=(V,E)$ is een functie $f:V\rightarrow K$ met de eigenschap dat als $\{u,v\}\in E$, dan $f(u)\neq f(v)$.

Het kleuren van de punten in een graaf kun je dus zien als een functie *f*, die een kleur *k* toekent aan een punt *v*. Vergelijk dat bijvoorbeeld met de functie $g:\mathrm{R}\mapsto\mathrm{R}^{+}$ gegeven door $g(x)=x^{2}$. Deze functie kent aan een getal $x\in\mathrm{R}$ het getal $x^2\in\mathrm{R}^{+}$ toe. De functie $h:N\rightarrow\{0,1\}$ met als voorschrift $h(n)=\begin{cases}1 \text{ als n een even getal is}\\ 0 \text{ als n een oneven getal is}\end{cases}$ kent aan een geheel getal de waarde 0 of 1 toe, afhankelijk van het even of oneven zijn van *n*.

Je kunt een functievoorschrift ook voor alle waarden die een variabele kan aannemen uitschrijven. Bijvoorbeeld de functie $k:\{1,2,3,4\} \mapsto \{5,6,7,8\}$ gegeven door $k(1)=7, k(2)=5, k(3)=8, k(4)=6$. Je kunt een functie ook weergeven door een verzameling geordende paren, bjivoorbeeld $k=\{(1,7),(2,5),(3,8),(4,6)\}$. Het komt op hetzelfde neer: je kunt aan een variabele slechts één waarde toekennen en in het functievoorschrift staat welke waarde dat zou moeten zijn.

Opgave 1.
Hoeveel kleuringen bestaan er bijvoorbeeld voor de volgende graaf $G=(V,E)$ als de kleurenverzameling $K=\{\text{blauw, geel, groen}\}$? En als $K=\{a,b,c,d\}$? En als $K=\{1,2,3,4,5\}$?



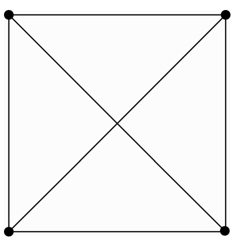
Kleurgetal

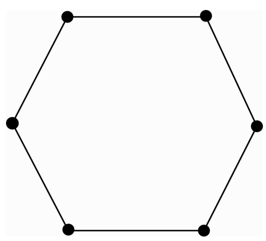
Als je verzameling kleuren maar groot genoeg is, kun je elke graaf wel een kleuring geven. Het is de kunst om zo min mogelijk kleuren te gebruiken. Het minimum aantal kleuren dat nodig is om een graaf te kleuren wordt het *kleurgetal* genoemd.

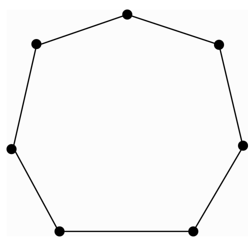
Definitie 12: Het Kleurgetal
Het kleurgetal van een graaf $G=(V,E)$ is het minimum aantal kleuren dat nodig is om de punten van *G* te kleuren. Het kleurgetal van G wordt genoteerd met $\chi(G)$.

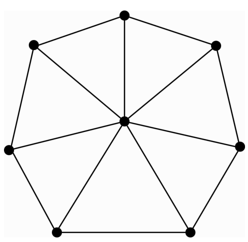
$\chi(G)$ spreek je uit als “de Chi van G”. Chi is de eerste letter van het Griekse woord ‘Chroma’ dat ‘kleur’ betekent.

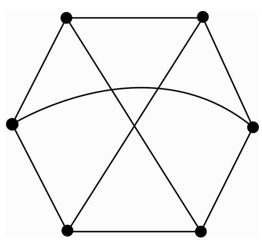
Opgave 2.
Bepaal het kleurgetal van de volgende grafen.

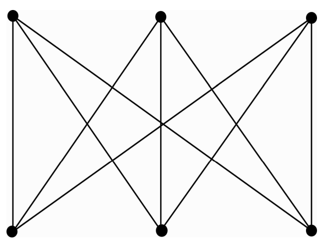

a


b


c


d


e


f

Opgave 3.
Wat is het kleurgetal van K_n ?

Opgave 4.
Wat is het kleurgetal van $K_{n,m}$?

Opgave 5.
Verzin een graaf $G=(V,E)$ op 5 punten waarvoor geldt dat $\chi(G)=|V|$. Zijn er nog meer grafen op 5 punten waarvoor dit geldt.

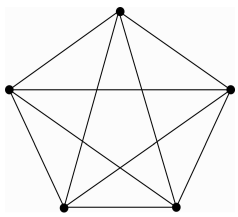
In 1941 bewees R.L. Brooks dat volledige grafen K_n en oneven circuit-grafen (2-reguliere samenhangende grafen met oneven aantal punten) de enige samenhangende grafen zijn met $\chi(G)=\Delta(G)+1$, waarbij we met $\Delta(G)$ weer de maximale graad van G bedoelen. Voor alle andere samenhangende grafen geldt dus $\chi(G)\leq\Delta(G)$.

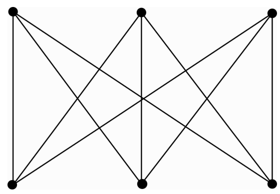
Planariteit

Een ander begrip uit de grafentheorie dat gerelateerd is aan het vierkleurenprobleem, is *planariteit*. De graaf die ontstaat door een landkaart als een graaf te modelleren, heeft geen lijnen die elkaar snijden. Grafen die in het platte vlak getekend kunnen worden zonder dat er lijnen zijn die elkaar snijden, noemen we planaire grafen.

Definitie 13: Planaire grafen
Een graaf $G=(V,E)$ heet planair (=vlak) als G in het platte vlak kan worden getekend zodat de lijnen elkaar niet raken of snijden, behalve in een gemeenschappelijk punt.

Niet iedere graaf is planair. Twee bekende en belangrijke voorbeelden van niet-planaire grafen zijn K_5 en $K_{3,3}$ hiernaast. Probeer ze zelf maar eens te tekenen zonder dat de lijnen elkaar snijden.



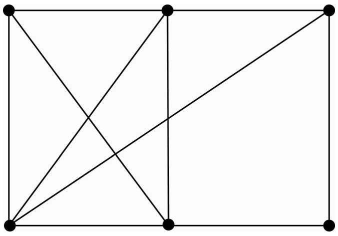


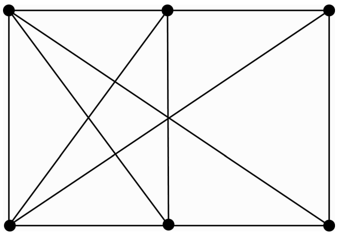
Opgave 6.
Laat zien dat K_5 en $K_{3,3}$ planair worden als je een lijn weglaat.

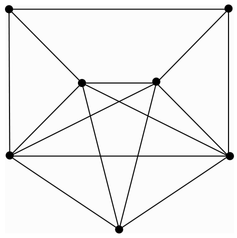
Opgave 7.
Het kruisingsgetal van een willekeurige graaf G is het kleinste aantal kruisingen dat nodig is om G te tekenen. Wat is het kruisingsgetal van K_5 en $K_{3,3}$?

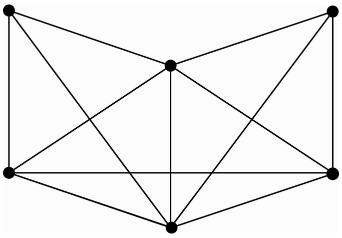
Opgave 8.
Laat zien dat het mogelijk is om 7 steden met elkaar te verbinden met snelwegen zonder splitsingen of kruisingen en met slechts één viaduct. Op of over een viaduct mogen meerdere wegen lopen.

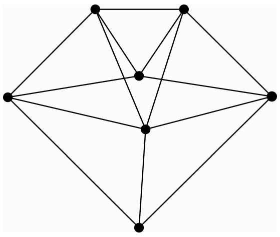
Opgave 9.
Onderzoek welke van de volgende grafen planair zijn. Geef het kruisingsgetal als een graaf niet planair is.

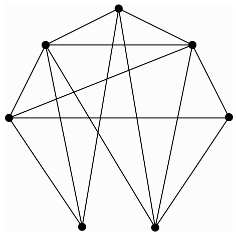

a


b


c

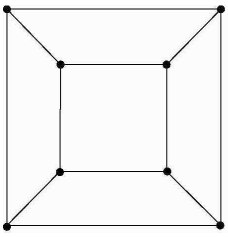

d

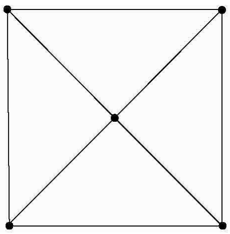

e

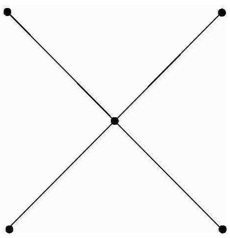

f

Definitie 14: Facetten
Als een planaire graaf G zonder doorsnijding van lijnen in het platte vlak getekend wordt, dan wordt het platte vlak in een aantal gebieden verdeeld. Deze gebieden noemen we de facetten van G.

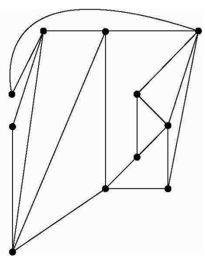
Opgave 10.
Bepaal voor elk van de volgende grafen het aantal punten n, het aantal lijnen m en het aantal facetten f. Kun je een verband ontdekken?


a


b


c

d


e

7 Inductie

Inductie is een krachtige techniek waarmee je allerlei wiskundige uitspraken kunt bewijzen. We hebben eerder gezien hoe je een uitspraak *deductief* kunt bewijzen. Wanneer je een uitspraak deductief bewijst, ga je van het meest algemene geval uit. Daarmee toon je aan dat de uitspraak voor bijzondere gevallen geldt. We hebben dit gezien in het bewijs van de stelling van Euler. In het bewijs werden alleen de eigenschappen gebruikt, die voor *alle* samenhangende grafen met even graden gelden.
Inductie is een techniek waarmee je op een slimme manier voor alle afzonderlijke gevallen een bewijs geeft van een uitspraak. Belangrijk in een inductief bewijs zijn de zogenaamde domino-principes.

Het wereldrecord dominostenen omgooien staat op 4.079.381 stenen. Het werd in november 2006 gevestigd te Leeuwarden. Je hebt het misschien wel gezien op tv: een grote hal met een enorm vloeroppervlak waarin dominostenen in allerlei verschillende thema's waren uitgezet. In totaal waren er 4,4 miljoen stenen geplaatst. Op een gegeven moment kreeg de eerste steen een duwtje, deze viel om en gaf de tweede steen een duwtje, zodat deze omviel en waardoor ook de derde steen omviel, enzovoort. Uiteindelijk vielen er dus ruim vier miljoen stenen om; net voldoende om het wereldrecord te vestigen en opgenomen te worden in het Guinness Book of Records.

Bewijs met Inductie

Inductie is een techniek waarmee je een bewijs geeft voor een stelling van de volgende vorm:

$$\textit{voor } n = 1,2,3,\ldots \textit{ is de uitspraak } P(n) \textit{ waar.}$$

We gebruiken de letter P voor een willekeurige uitspraak. Tijdens DisWis zal deze uitspraak P altijd gaan over de natuurlijk getallen $N = \{1,2,3,\ldots\}$. Voorbeelden van zo'n uitspraak zijn:

- $P(n) = "\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)"$.
- $P(n) =$ "de afgeleide van de functie $f(x) = x^n$ is gelijk aan nx^{n-1}".
- $P(n) =$ "voor elke x geldt dat $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{(1-x^{n+1})}{(1-x)}$".

Deze uitspraken zijn waar voor elke $n \in N$. Bij een inductief bewijs komt het erop neer dat je een bewijs van zo'n stelling geeft door de uitspraak voor alle afzonderlijke gevallen te bewijzen.

De meest voor de hand liggende stap is nu om te kijken of de uitspraak $P(n)$ klopt voor $n = 1,2,3,4,\ldots$ enz. Dit gaan we echter niet doen. Met deze aanpak zouden we namelijk veel te lang bezig zijn (oneindig). We gaan op een handige manier gebruik maken van de zogenaamde domino-principes.

Domino-principes
De essentie van domino is dat er zoveel mogelijk steentjes omvallen en dat je er zelf zo min mogelijk hoeft om te duwen. Het is de kunst om dominostenen zodanig neer te zetten dat, wanneer je het eerste dominosteentje omduwt, alle steentjes omvallen. Het eerste steentje valt tegen het tweede steentje aan, die op zijn beurt tegen het derde steentje aanvalt, enzovoorts. Je zet de steentjes dan ook zodanig achter elkaar, dat ieder steentje tegen zijn opvolger aan valt. We kunnen de principes voor een goed werkende domino opstellen:

Alle dominostenen vallen om als de dominostenen aan de volgende voorwaarden voldoen:
1. *Het eerste steenje moet omvallen, en*
2. *Als een willekeurig steentje omvalt, dan valt zijn opvolger ook om.*

We kunnen dit vertalen naar de wiskunde. We hebben de stelling die zegt dat de uitspraak $P(n)$ waar is voor elke $n \in N$. Dat betekent dat $P(1)$ waar is, en $P(2)$ is waar, evenals $P(3), P(4), P(5), \ldots$ enz. We krijgen een rijtje uitspraken die allemaal waar moeten zijn. Als we de stelling moeten bewijzen, zouden we voor elke uitspraak in de rij na moeten gaan of het waar is.
Als we de uitspraken zien als dominostenen en we laten een dominosteen omvallen als de uitspraak waar is, dan zouden we de domino-principes voor wiskundige stellingen als volgt kunnen formuleren:

Voor elke $n \in N$ is de uitspraak $P(n)$ waar als
1. *$P(1)$ is waar, en*
2. *voor willekeurige $m \in N$ geldt $P(m) \Rightarrow P(m+1)$*

Dus door aan te tonen dat beide principes gelden, bewijzen we de stelling.

Voorbeeld
Aan de hand van een voorbeeld zullen we duidelijk maken hoe dit kan worden toegepast. We gaan de volgende uitspraak bewijzen met inductie:

Voor alle $n \in N$ geldt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Met andere woorden, voor elke $n \in N$ geldt $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$. We zullen tijdens het bewijs de vergelijking met de omvallende dominostenen duidelijker maken.

We bewijzen $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$ door aan te tonen dat de gelijkheid geldt voor alle waarden die de variabele n kan aannemen. We beginnen bij $n = 1$. Dat de gelijkheid geldt voor $n = 1$, kan je zelf wel nagaan. De sommatie van $i = 1$ tot en met 1 is de som van alle getallen tussen 1 en 1. Het invullen van de waarde $n = 1$ geeft in zowel het linker- als het rechterlid van de vergelijking de waarde 1. We noemen deze eerste stap de *inductiebasis*. *Inductiebasis*

Laten we de dominostenen er eens bijhalen. We stellen ons een oneindige rij genummerde dominostenen voor. Op de eerste dominosteen staat “1”, op de tweede dominosteen staat “$1 + 2$”, op de derde steen staat “$1 + 2 + 3$”, enzovoorts. Meer algemeen staat op de m-de dominosteen de som $\sum_{i=1}^{m} i = 1+2+\cdots+m$. Dominosteen nummer m valt om als we hebben aangetoond dat de som $\sum_{i=1}^{m} i$ gelijk is aan $\frac{1}{2}m(m+1)$. We hebben er in de inductiebasis dus voor gezorgd dat de eerste dominosteen is omgevallen. Dit is basisprincipe 1 van het domino.

Opgave 1.
Bewijs dat voor $n=1$ geldt dat
a. de afgeleide van $f(x)=x^n$ gelijk is aan nx^{n-1}.
b. Voor elke x geldt dat $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{(1-x^{n+1})}{(1-x)}$.

We hebben gezien dat principe 1 van het domino geldt voor ons voorbeeld. We gaan aantonen dat principe 2 ook geldt.

We vertalen dit principe naar de gelijkheid die we moesten bewijzen: voor willekeurige waarde $n=m$ geldt

$$\sum_{i=1}^{m} i = \tfrac{1}{2}m(m+1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m+1} i = \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2).$$

De aanname dat een uitspraak waar is voor een willekeurige $n=m$ (de linkerkant van de implicatie), noemen we de *inductiehypothese*. Het afleiden van het geval $m+1$ (de rechterkant van de implicatie) uit de inductiehypothese, noemen we de *inductiestap*.

Inductie-hypo these

Inductiestap

We moeten dus $\sum_{i=1}^{m+1} i = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ afleiden uit de inductiehypothese. Hiervoor herschrijven we eerst de linkerzijde: $\sum_{i=1}^{m+1} i = \sum_{i=1}^{m} m + (m+1)$. In de nieuwe vorm herkennen we de linkerzijde van de inductiehypothese $\sum_{i=1}^{m} m$. Volgens de hypothese is deze opsomming gelijk aan $\frac{1}{2}m(m+1)$. Als we dit invullen, krijgen we

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} m + (m+1) &= \tfrac{1}{2}m(m+1) + (m+1)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(m(m+1) + 2(m+1)\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left((m+2)(m+1)\right)\end{aligned}$$

Hiermee hebben we aangetoond dat principe 2 van het domino ook voor ons voorbeeld geldt.

Door te bewijzen dat bovenstaande uitspraak klopt voor willekeurige m, hebben we bewezen dat de gelijkheid geldt voor alle waarden die n kan aannemen. We hebben namelijk in de inductiebasis (domino principe 1) al bewezen dat de gelijkheid waar is voor $n=1$. Met het basisprincipe 2 kunnen we nu concluderen dat de gelijkheid ook waar is voor $n=2$, want het geval $n=2$ is immers de opvolger van het geval $n=1$. De opvolger voor het geval $n=2$ is het geval waar $n=3$, enzovoort. We hebben nu in één keer bewezen dat de gelijkheid $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ waar is voor *alle n.*

Opgave 2.
Maak de bewijzen van *Opgave 1* af. De inductiebasis heb je daar al gegeven, stel de inductiehypothese op en leidt daaruit de inductiestap af.

Opgave 3.
Bewijs met inductie dat $9^n - 2^n$ een veelvoud is van zeven, voor elke $n \geq 1$.

Grafeninductie
We zullen in het vervolg zien dat we inductie ook kunnen gebruiken om stellingen over grafen te bewijzen. Je moet de grafen dan op zo'n manier op een rijtje zetten dat het domino-principe werkt. Dit is niet altijd even duidelijk. We nemen weer een voorbeeld.

$$\textit{Voor alle } n \in N \textit{ is de volgende uitspraak waar}$$
$$P(n) = \text{"voor alle grafen } G \text{ met maximaal } n \text{ punten geldt } \chi(G) \leq \Delta(G)+1\text{"}$$

We bekijken weer of beide principes uit het domino opgaan voor dit voorbeeld. Om aan te tonen dat principe 1 geldt voor dit voorbeeld, moeten we bewijzen dat de uitspraak $P(1)$ waar is: voor grafen G met helemaal geen punten of met 1 punt geldt dat $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.

Grafen zonder punten hebben kleurgetal 0. Je hebt immers geen punten om te kleuren. De maximum graad van deze grafen is ook 0, dus voor deze grafen is de uitspraak $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ waar. Grafen met één punt hebben kleurgetal 1 en maximum graad 0, dus ook voor deze grafen geldt $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$. We concluderen dat $P(1)$ waar is.

We vertalen principe 2 naar de ongelijkheid die we moesten bewijzen: voor willekeurige waarde $n = m$ geldt dat

Als voor alle grafen G met m punten geldt $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$,
dan geldt dat ook voor grafen G met $m+1$ punten.

Stel dat G een graaf is op $m+1$ punten en dat v een punt is met maximale graad $\Delta(G)$. De graaf *G-v* (is de graaf G zonder het punt v en alle lijnen die v bevatten) heeft n punten en we kunnen dus de inductiehypothes toepassen op *G-v*. Voor *G-v* geldt dat het kleurgetal $\chi(G-v)$ gelijk of kleiner is dan de maximum graad $\Delta(G-v)+1$.

Er zijn nu twee mogelijkheden:

1. $\Delta(G-v)=\Delta(G)$. In dat geval kunnen we de graaf G-v een kleuring geven met maximaal $\Delta(G)+1$ kleuren. Als we v weer aan de graaf toevoegen, zijn alle $\Delta(G)$ buren van v gekleurd en is er dus nog minstens 1 kleur over om v te kleuren.
2. $\Delta(G-v)<\Delta(G)$. In dat geval hebben we minder dan $\Delta(G)+1$ kleuren nodig om G-v te kleuren. In het bijzonder zijn alle buren van v gekleurd met minder dan $\Delta(G)+1$ kleuren. Als we v weer aan de graaf toevoegen, mogen we dus een nieuwe kleur voor v gebruiken zonder dat de ongelijkheid $\chi(G)\leq\Delta(G)+1$ wordt geschonden.

We hebben nu aangetoond dat principe 1 en principe 2 gelden voor dit voorbeeld en hebben daarmee bewezen dat voor elke graaf geldt dat $\chi(G)\leq\Delta(G)+1$.

Opgave 4.
Bewijs met inductie dat het aantal lijnen in K_n gelijk is aan $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Opgave 5.
Bewijs met inductie dat het aantal lijnen in $K_{n,m}$ gelijk is aan $n\cdot m$.

Opgave 6.
Een bos is een graaf zonder cykels. Een boom is een samenhangend bos. Bewijs dat een boom met minstens één lijn, altijd een punt heeft met graad 1. Gebruik dit om vervolgens met inductie te bewijzen dat een bos kleurgetal maximaal 2 heeft.

Opgave 7.
Bewijs met inductie dat een boom op n punten $n-1$ lijnen heeft.

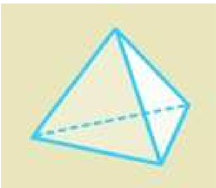
8 De Euler-formule

Een planaire graaf heeft de eigenschap dat er een verband bestaat tussen het aantal lijnen, het aantal punten en het aantal facetten. Dit verband geldt voor *alle* planaire grafen. We gaan dit verband nader onderzoeken aan de hand van regelmatige veelvlakken en uiteindelijk bewijzen. We maken in het bewijs gebruik van inductie zoals we dat in het vorige hoofdstuk hebben behandeld.

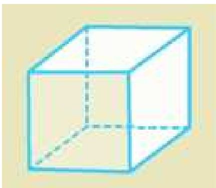
Regelmatige Veelvlakken

Regelmatige veelvlakken

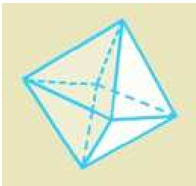
Regelmatige veelvlakken 'bestaan' al een tijdje. Plato en zijn vrienden waren al bekend met deze ruimtelijke figuren en beschouwden ze zelfs als de bouwstenen van het universum. Ze brachten de veelvlakken in verband met de vier elementen: vuur, lucht, water en aarde. De tetraëder stond voor vuur vanwege de scherpe punten. De icosaëder stond voor water vanwege de stompe (= gladde) hoeken. Lucht zit tussen water en vuur, daarom is lucht de octaëder die immers tussen de tetraëder (drie driehoeken in een hoekpunt) en de icosaëder (vijf driehoeken in een hoekpunt) in zit. Tenslotte stond de kubus voor aarde, omdat hij stevig als een berg is. De overblijvende dodecaëder stond voor het hemelgewelf, omdat hij er het meest bolvormig uitziet. Sindsdien worden deze vijf veelvlakken de Platonische lichamen of Platonische veelvlakken genoemd. Hieronder staan de vijf Platonische lichamen getekend. Ga voor jezelf na dat de uitslagen van deze veelvlakken planaire grafen zijn.



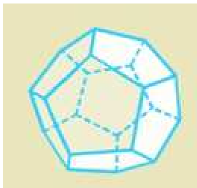
De tetraëder, dit betekent letterlijk het 'viervlak'



De kubus heeft zes vlakken.



De octaëder. 'Octo' is Grieks voor 'acht'. Een achtvlak dus.



De dodecaëder, ook wel een twaalfvlak.

De icosaëder heeft twintig vlakken.

Opgave 1.

Bekijk de regelmatige veelvlakken en vul het schemaatje in.

	Tetraëder	Kubus	Octaëder	Dodecaëder	Icosaëder
Randen (=ribben)					
Zijvlakken					
Hoekpunten					

Hoeveel is het aantal zijvlakken plus het aantal hoekpunten min het aantal randen? Als je de veelvlakken 'uitvouwt' tot bouwplaten in het platte vlak, gaat dit verband dan ook nog op?

Het verband dat in *opgave 1* wordt genoemd blijkt behalve voor de Platonische lichamen, ook voor planaire grafen te gelden. Het was wederom Euler die voor het eerst dit verband tussen de punten, randen en facetten van planaire grafen beschreef. In 1750 verscheen *Elementa Doctrinae Solidorum*. Hierin was te lezen:

PROPOSITIO IV.

$n+f=m+2$

§. 33. *In omni ſolido hedris planis incluſo aggregatum ex numero angulorum ſolidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

Vrij vertaald komt deze propositie van Euler neer op onderstaande stelling.

Stelling 2: De Euler-formule
Voor elke samenhangende niet-lege planaire graaf G met n punten, m lijnen en f facetten geldt

$$n+f=m+2\,.$$

Opgave 2.
Een boom is een samenhangende graaf zonder circuits. Bewijs dat de Euler-formule geldt voor bomen. (Hint:Opgave 7 van hoofdstuk 7)

We bewijzen de Euler-formule met inductie naar het aantal lijnen. We bewijzen

Voor elke $k\in N$ is de volgende uitspraak waar
$P(k)=$" Voor alle samenhangende planaire grafen met n punten, f facetten en k lijnen geldt
$n+f=k+2$"

Inductiebasis

We bewijzen dat de Euler-formule geldt voor samenhangende, planaire grafen met 1 lijn. Zulke grafen hebben precies 2 punten en 1 facet. Als we deze waarden invullen in de formule, krijgen we $2+1=1+2$. We hebben de inductiebasis aangetoond.

Nu bewijzen we dat voor willekeurige $k\in N$ geldt $P(k)\Rightarrow P(k+1)$.

Inductiestap voor grafen met circuits

We maken nu onderscheid tussen grafen zonder circuits en grafen met circuits. Voor grafen zonder circuits heb je in Opgave 1 aangetoond dat de Euler-formule klopt. We zullen aantonen dat de formule ook klopt voor de rest van de samenhangende, planaire grafen. Hiervoor nemen we een samenhangende, planaire graaf met $k+1$ lijnen, n punten en $f\geq 2$ facetten.

Kies een willekeurige lijn in de graaf die bevat is in een circuit. Laten we deze lijn $\{u,v\}$ noemen. We verwijderen deze lijn $\{u,v\}$. De graaf die zo wordt verkregen is nog steeds samenhangend.

Het aantal facetten is met 1 afgenomen. De twee facetten die van elkaar worden gescheiden door de lijn $\{u,v\}$ zijn namelijk na het verwijderen van $\{u,v\}$ samengevloeid. Voor deze nieuwe graaf geldt nu dat het aantal lijnen gelijk is aan *k*, het aantal facetten $f-1$ en het aantal punten blijft *n*. Er zijn nu twee mogelijkheden:

1. De nieuwe graaf is een boom. Voor bomen weten we dat de Eulerformule klopt, dus er geldt $n+(f-1)=k+2$. Als we nu de verwijderde lijn $\{u,v\}$ weer toevoegen, krijgen we $n+(f-1)+1=k+1+2$ en we concluderen dat de uitspraak $P(k+1)$ klopt.

2. De nieuwe graaf heeft een circuit. We kunnen dan de inductiehypothese toepassen. Er geldt voor deze graaf $n+(f-1)=k+2$. Hieruit volgt direct dat de Euler-formule ook klopt voor onze oorspronkelijke graaf.

■

Planaire Grafen

We hebben de Euler-formule nu bewezen. We kunnen aan de hand van de Euler-formule een aantal bruikbare eigenschappen van planaire grafen geven. Zo kunnen we een bovengrens voor het aantal facetten (*opgave 2*), een bovengrens voor het aantal lijnen (*opgave 3*) en een ondergrens voor het aantal lijnen (*opgave 4*) geven. Door deze resultaten te combineren, kunnen we stellen dat *alle* planaire grafen minstens één punt bevatten met graad 5 of lager. Dit resultaat blijkt goed van pas te komen in het bewijs van een andere stelling, de vijfkleurbaarheid van planaire grafen.

Opgave 3.

Leg uit waarom voor planaire grafen met minstens 2 lijnen altijd geldt dat $f \leq \frac{2}{3} m$, dus het aantal facetten kan niet groter zijn dan tweederde maal het aantal lijnen.

Opgave 4.

Combineer nu de Eulerformule en de vorige opgave. Bereken dat voor planaire grafen met minstens 2 lijnen geldt dat $|E| \leq 3|V|-6$. Met $|E|$ bedoelen we weer het aantal lijnen en met $|V|$ bedoelen we het aantal punten.

Opgave 5.

Stel dat voor een graaf $G=(V,E)$ geldt dat de graad van elk punt tenminste *k* is. Er komen dan in elk punt tenminste *k* lijnen samen. Geef aan waarom $|E| \geq \frac{1}{2} k|V|$.

Opgave 6.

Bewijs met de resultaten van de laatste twee opgaven aan dat voor niet-lege planaire grafen geldt dat er altijd een punt is met graad 5 of kleiner. Bewijs dit vanuit het ongerijmde. Met andere woorden stel dat er een niet-lege planaire graaf bestaat waarvan alle punten graad 6 of hoger hebben. Wat gaat er dan mis?

9 De Stelling van König

We hebben al eerder gezien dat het kleuren van de punten van een graaf veel interessante wiskunde oplevert. Puntkleuring heeft ook veel toepassingsmogelijkheden. Behalve de punten van een graaf, kunnen ook de lijnen gekleurd worden. De definitie van een lijnkleuring is vergelijkbaar met die van een puntkleuring.

Bij het kleuren van de punten in een graaf mochten punten die een lijn gemeenschappelijk hadden niet dezelfde kleur krijgen. Bij lijnkleuring mogen lijnen die een punt gemeenschappelijk hebben niet dezelfde kleur krijgen. Lijnkleuring definiëren we als een functie van de verzameling lijnen E naar de verzameling kleuren K.

Definitie 15: Lijnkleuring

Lijnkleuring

De lijnkleuring van een graaf $G=(V,E)$ is een functie $f: E \to \{1,\ldots,k\}$ zodanig dat voor elke twee lijnen e en $\acute{e}$ met $e \neq \acute{e}$ en $e \cap \acute{e} \neq \emptyset$ geldt dat $f(e) \neq f(\acute{e})$.

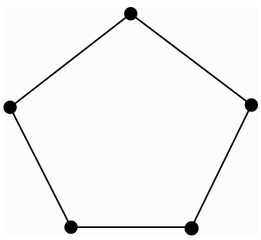
Merk op dat als twee lijnen $e=\{v,w\}$ en $\acute{e}=\{v,w'\}$ in hetzelfde punt v samenkomen, dat dan de doorsnede van de twee lijnen gelijk is aan $\{v\}$. Dat noteren we als $e \cap e'=\{v\}$. In een geldige lijnkleuring kunnen dus geen twee lijnen dezelfde kleur krijgen als ze in hetzelfde punt samenkomen.

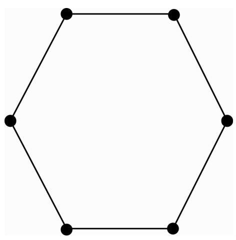
Het is, net als bij puntkleuringen, de kunst om zo min mogelijk kleuren te gebruiken. Het minimale aantal kleuren dat nodig is, noemen we het lijnkleurgetal. We noteren het lijnkleurgetal van G met $\chi'(G)$. We hadden de χ al gebruikt voor het *punt*kleurgetal, dus om aan te geven dat we het hier over het *lijn*kleurgetal hebben, hangen we er een accentje aan.

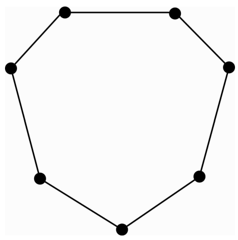
Een graaf G heet k-lijnkleurbaar als $\chi'(G) \leq k$.

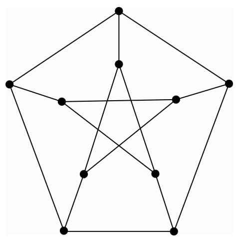
Opgave 1.

Bepaal het lijnkleurgetal van de volgende grafen.


a.


b.


c.


d.

Opgave 2.

Bepaal het lijnkleurgetal van K_n voor alle n.

Opgave 3.

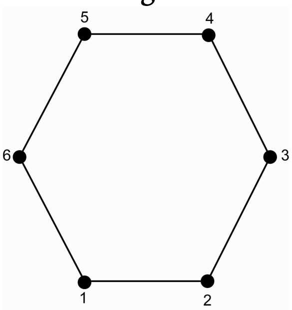
Voor elke graaf G geldt dat $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Met $\Delta(G)$ bedoelen we de maximum graad van een graaf. Bewijs dit vanuit het ongerijmde. Met andere woorden, stel dat $\chi'(G) < \Delta(G)$ en redeneer naar een tegenspraak.

Opgave 4.
Geef een voorbeeld van een graaf waarbij het lijnkleurgetal $\chi'(G)$ strikt groter is dan de maximum graad $\Delta(G)$ van de graaf G.

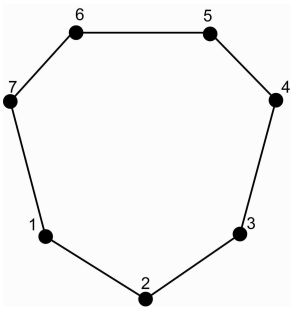
Het kleuren van de lijnen van een bipartiete graaf heeft veel toepassingsmogelijkheden. Er is ook veel theorie over te vinden. We behandelen verderop de stelling van König. König bewees in 1916 een algemene lijnkleuringsstelling voor bipartiete grafen. We hebben bij de opgaven al gezien dat voor alle grafen geldt dat $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. König bewees dat voor bipartiete grafen gelijkheid geldt.

ipartiete grafen

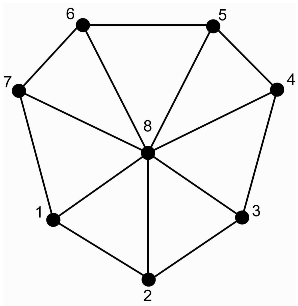
Opgave 5.
Welke van de volgende grafen zijn bipartiet? Geef voor de bipartiete grafen aan wat de verzamelingen U en W zijn.



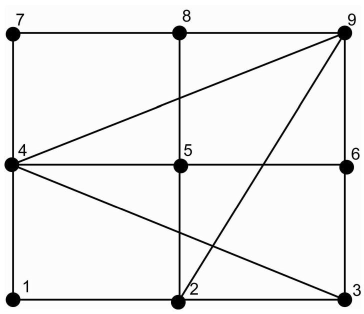
a.



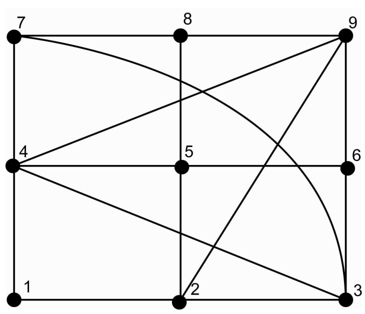
b.



c.



e.



f.

Opgave 6.
Bewijs dat als een willekeurige graaf G bipartiet is, het (punt-)kleurgetal $\chi(G) \leq 2$.

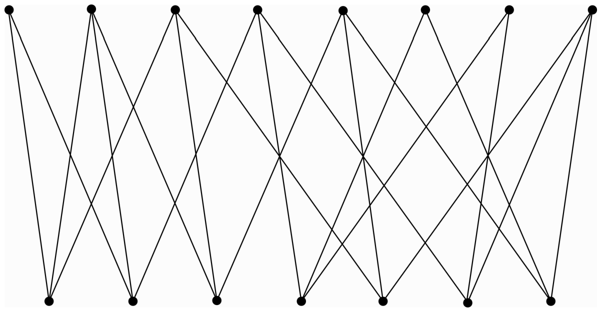
Opgave 7.
Bewijs ook andersom dat wanneer voor een willekeurige graaf G het (punt-)kleurgetal $\chi(G) \leq 2$, dat dan G een bipartiete graaf is.

Opgave 8.
Bewijs aan de hand van de vorige opgave, dat een graaf G bipartiet is als en alleen als elk circuit in G een even lengte heeft.

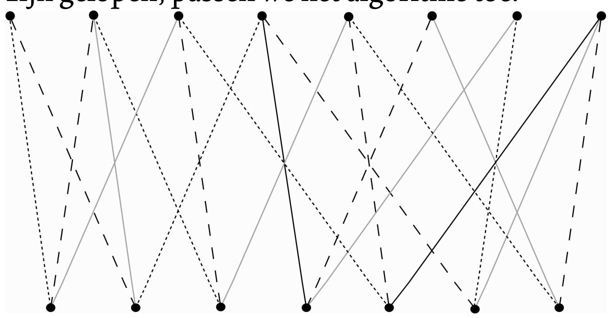
Stelling van König

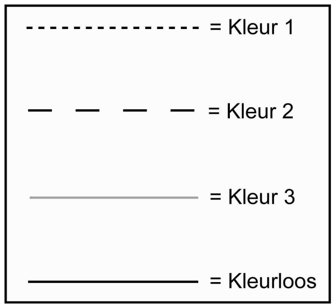
Dan volgt nu de stelling van König over het lijnkleurgetal van bipartiete grafen. De basis van het bewijs van de stelling is een algoritme dat systematisch de lijnen kleurt. Een algoritme is een werkschema dat de stappen beschrijft die tot een oplossing leiden. Onderstaand algoritme leent zich erg goed voor toepassingen. Eén van die toepassingen is het inkleuren van het roosterpuzzeltje uit de eerste les.

Stelling 3: König's stelling
Voor elke bipartiete graaf G geldt $\chi'(G) = \Delta(G)$.



We gaan de stelling bewijzen door een manier te geven waarmee we elke bipartiete graaf G kunnen kleuren met k kleuren, waarbij geldt $k = \Delta(G)$. We gebruiken hier een nieuwe letter omdat het duidelijk om een ander begrip gaat. We maken deze methode inzichtelijk door het gelijk toe te passen op het onderstaande voorbeeld. De maximum graad van onze graaf is drie, dus we zouden de graaf met drie kleuren moeten kunnen kleuren. In principe is het mogelijk om met het algoritme lijn voor lijn de graaf te kleuren. Dit is vrij omslachtig en we helpen het algoritme een eindje op weg door eerst zelf *zo veel mogelijk* lijnen te kleuren. Pas als we met onze kleuring vast zijn gelopen, passen we het algoritme toe.

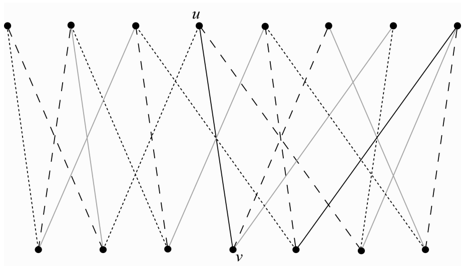




We mogen maar drie kleuren gebruiken en de lijnen moeten wel correct gekleurd worden. Dat wil zeggen, geen twee lijnen die in een willekeurig punt v samen komen mogen dezelfde kleur hebben. We mogen ervan uitgaan dat het niet lukt om alle lijnen te kleuren, omdat anders de stelling bewezen zou zijn.

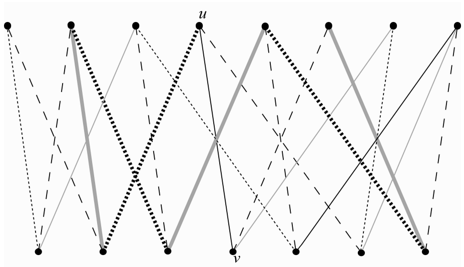
Er blijven dus lijnen ongekleurd. Laat e zo'n lijn zijn, waarbij geldt dat $e = \{u, v\}$. In de tekening hebben we ook zo'n ongekleurde lijn aangegeven. Er kunnen ten hoogste k lijnen in u samenkomen en de lijn e is nog niet gekleurd. Er moet dus nog een kleur zijn die niet gebruikt is voor de in u samenkomende lijnen. Laten we deze kleur i noemen. In onze graaf hebben we i = ____ (kleur 3)
Evenzo bestaat er een kleur die niet gebruikt is voor de in v samenkomende lijnen. Deze kleur noemen we j. In onze graaf j =........ (kleur 1)

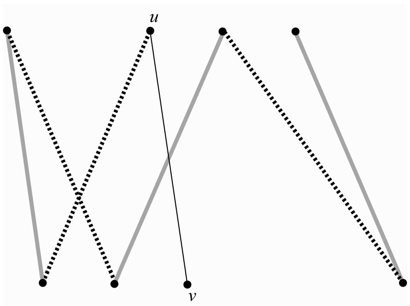
Opgave 9.
Waarom geldt er altijd $i \neq j$?



We gaan nu vanuit u een pad maken dat afwisselend lijnen met de kleuren j en i doorloopt. We willen dat dit pad maximale lengte heeft. Noem dit langste pad P. In de tekening hebben we het langste pad met dikke lijnen aangegeven.

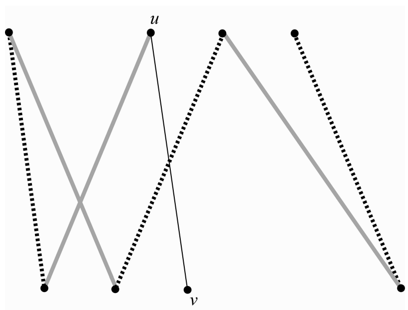
Opgave 10.
Ga na dat dit inderdaad het langste pad is met afwisselend de kleuren i en j. Waarom kan dit pad nooit in het punt v eindigen?



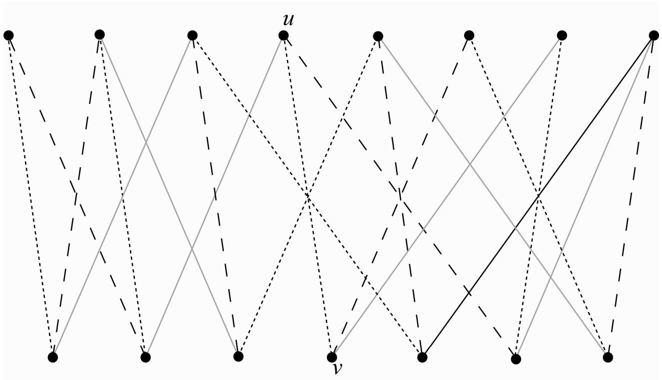


We lichten het pad P eruit. Het is nu mogelijk om de kleuren in P om te wisselen. De lijnen die eerst kleur j hadden, krijgen kleur i en wat kleur i had, krijgt kleur j.

De kleuring van de graaf blijft op deze manier correct. Stel dat er een foute kleuring zou ontstaan door het verwisselen van de kleuren langs P. Er zou dan in de nieuwe kleuring in minstens één van de punten dus twee keer een lijn met dezelfde kleur moeten samenkomen. Dat zou echter betekenen dat het pad P met een lijn verlengd had kunnen worden en dat is in tegenspraak met de aanname dat P maximale lengte heeft. Ga na dat de kleuring in onderstaande figuur inderdaad correct is.



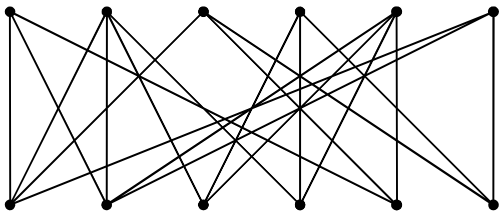
We zien nu dat er een kleur vrij is gekomen om e te kleuren. We kunnen e de kleur j=........ (kleur 1) geven.



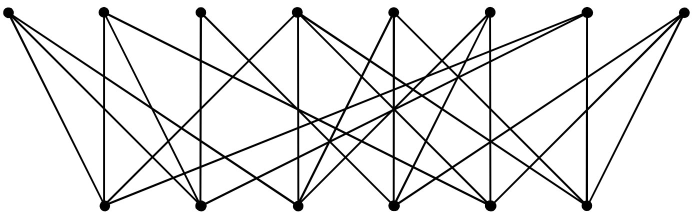
Op deze manier hebben we een lijn meer kunnen kleuren. Deze methode kunnen we gebruiken om alle ongekleurde lijnen te kleuren. Uiteindelijk zullen we een correcte kleuring met k kleuren vinden voor alle lijnen.

Opgave 11.
Maak zelf de kleuring van bovenstaande graaf compleet.

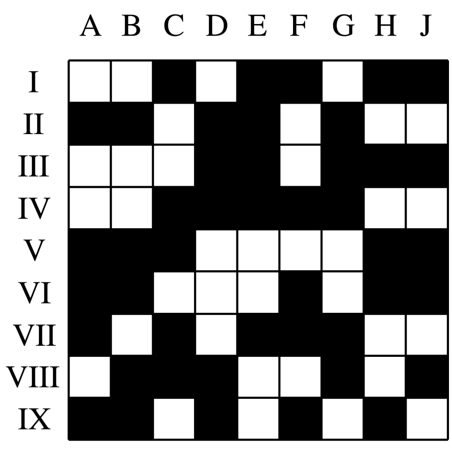
Opgave 12.
Wat is het lijnkleurgetal van onderstaande grafen? Kleur de grafen met zo min mogelijk kleuren.



b.

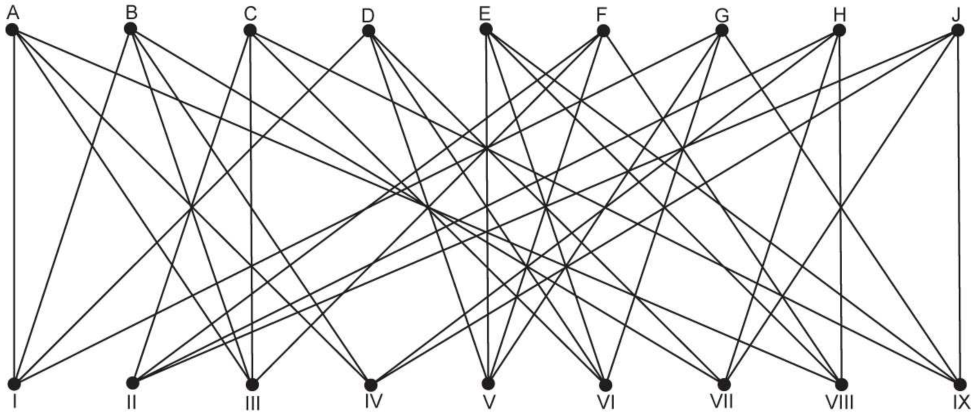


Roosterpuzzels
Zoals we in hoofdstuk 3 hebben gezien, is er een verband tussen roosterpuzzeltjes en grafen. Hieronder hebben we nogmaals een roosterpuzzel weergegeven.

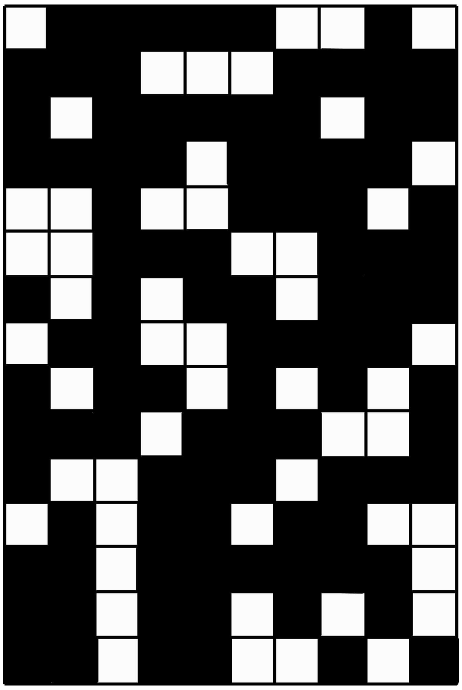


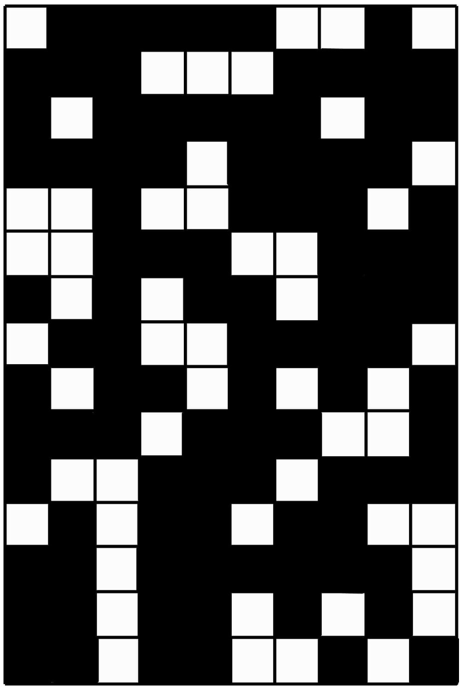
Als we nu een graaf maken met als puntenverzameling de rijen en de kolommen van dit rooster, dus
$V=\{A,B,C,D,E,F,G,H,J,I,II,III,IV,V,VI,VII,VIII,IX\}$.
Als een vakje (X, Y) in het rooster wit is, dan zijn de punten X en Y verbonden met een lijn. We krijgen dan een bipartiete graaf.

Het invullen van de roosterpuzzel komt dan overeen met het kleuren van de lijnen van de graaf. Hiervoor heb je zojuist een handig algoritme gezien.



Opgave 13.
Los de volgende roosterpuzzels op met behulp van het algoritme uit het bewijs van de stelling van König.





Samenvatting/Bewijs

Kleur zoveel lijnen van G als mogelijk met $\Delta(G)$ kleuren, zonder lijnen die een punt gemeen hebben dezelfde kleur te geven. Als het lukt om alle lijnen te kleuren, zouden we klaar zijn. We gaan er dus vanuit dat er een ongekleurde lijn $\{u,v\}$ is. Er is minstens één kleur, zeg kleur i, die niet wordt gebruikt voor de lijnen die in u uitkomen. Zo is er ook een kleur, zeg kleur j, die niet wordt gebruikt voor de lijnen die in v uitkomen. Dit zijn niet dezelfde kleuren anders hadden we $\{u,v\}$ deze kleur kunnen geven.

Maak nu een pad P van maximale lengte dat begint in u en afwisselend lijnen doorloopt van de kleuren kleur j en kleur i. Dit pad kan niet eindigen in v, omdat kleur j niet werd gebruikt voor lijnen die in v uitkomen.

De kleuring blijft correct als de kleuren van de lijnen in P worden verwisseld. Na verwisseling is kleur j de kleur die niet meer voorkomt bij de lijnen die in u uitkomen en kan de lijn $\{u,v\}$ dus met kleur j gekleurd worden. Op deze manier kunnen alle ongekleurde lijnen gekleurd worden.

10 Notatieblad

Hieronder staan puntsgewijs een aantal gebruikte notaties kort uitgelegd die in deze lesmodule worden gebruikt.

- We gebruiken over het algemeen hoofdletters om verzamelingen aan te geven en kleine letters om elementen van die verzamelingen aan te geven. De lege verzameling geven we aan met $\emptyset$. Er zitten geen elementen in $\emptyset$.

- $x_i \in X$ betekent dat x_i een element is van *X*.

- $Y \subset X$ betekent dat *Y* een deelverzameling is van *X*. Alle elementen van *Y* zitten ook in *X*. Merk op dat $\emptyset \subset X$ voor iedere verzameling *X*.

- $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ is een *ongeordende* verzameling. Dit betekent dat een andere volgorde waarin de elementen x_i worden genoteerd tussen de haken *geen* andere verzameling geeft. De elementen van *X* zijn $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is een *geordende* verzameling. Dit betekent dat een andere volgorde waarin de elementen x_i worden genoteerd tussen de haken *wel* een andere verzameling geeft. De elementen van *X* zijn ook hier $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- In de grafentheorie hebben we het vaak over punten en lijnen. In het Engels zijn dit *vertices* en *edges*. Om deze reden wordt de puntenverzameling vaak met *V* genoteerd en de lijnenverzameling met *E*. Met $v \in V$ bedoelen we dat *v* een (willekeurig) punt is uit de puntenverzameling *V* en met $e \in E$ bedoelen we dat *e* een (willekeurige) lijn uit de lijnenverzameling *E* is.

- $\sum_{i=1}^{n} x_i$ is de notatie voor de sommatie van alle x_i voor $i = 1, \ldots, n$. Je gebruikt deze notatie, omdat het sneller en duidelijker is op te schrijven dan $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$.

- Veronderstel dat *A* en *B* twee uitspraken zijn. $A \Rightarrow B$ betekent "Als uitspraak *A* waar is, dan is uitspraak *B* ook waar". $A \Leftarrow B$ betekent "Als uitspraak *B* waar is, dan is uitspraak *A* ook waar". $A \Leftrightarrow B$ betekent dat zowel $A \Rightarrow B$, als $A \Leftarrow B$ waar is.

- Neem twee verzamelingen *X* en *Y* in gedachte. $X \cup Y$ is de *vereniging* van *X* en *Y*. Dit betekent dat voor een element $x \in X \cup Y$, geldt dat $x \in X$ en/of $x \in Y$. Andersom geldt dat alle elementen uit *X* en *Y* in de vereniging zitten. $X \cap Y$ is de *doorsnede* van *X* en *Y*. Dit betekent dat voor een element $x \in X \cap Y$, geldt dat $x \in X$ én $x \in Y$. De elementen in de doorsnede van *X* en *Y* zijn dus de elementen die *X* en *Y* gemeenschappelijk hebben.

- We hebben weer een verzameling *X*. De cardinaliteit van *X* is het aantal elementen dat in *X* zit. We noteren de cardinaliteit met $|X|$.

11 Index