Examen VWO

2016

tijdvak 1
woensdag 18 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

De visstand in het IJsselmeer

Om te onderzoeken hoeveel vis er in het IJsselmeer aanwezig is, wordt op verschillende tijden en plaatsen met een sleepnet gevist dat tussen twee boten is bevestigd. Doordat de boten een vaarsnelheid van slechts 5 km per uur hebben, kan een deel van de vis ontsnappen door snel weg te zwemmen. Hoe sneller de vissoort is, hoe kleiner het percentage van de vis van die soort dat gevangen wordt. Hiervoor maakt men een wiskundig model. In de tabel staat informatie hierover.

tabel

verhouding x viszwemsnelheid t.o.v. vaarsnelheid boten (5 km/u)	0,5	1	2	3	4
percentage p gevangen vis t.o.v. aanwezige vis	95	50	25	10	5

In de tabel kun je bijvoorbeeld aflezen dat als de vissoort half zo snel $(x = 0{,}5)$ is als de boten er 95% wordt gevangen. Van een vissoort die vier keer zo snel $(x = 4)$ is als de boten wordt slechts 5% gevangen. Om voor alle zwemsnelheden het percentage dat gevangen wordt te berekenen, stelt men een exponentiële formule op van de vorm: $p = b \cdot g^x$. Hierin is p het percentage gevangen vis en x de verhouding van de snelheid van de vissoort ten opzichte van de vaarsnelheid van de boten (5 km per uur) en b en g constanten.

4p **1** Bereken de waarde van b en g in deze formule op basis van de gegevens in tabel 2 voor $x = 1$ en $x = 4$.

In werkelijkheid gebruikten de onderzoekers de volgende formule:

$$p = 128{,}5 \cdot 0{,}437^x$$

Voor $x = 0$ is deze formule niet realistisch, omdat er dan volgens de formule 128,5% van de aanwezige vis gevangen wordt.

4p **2** Bereken tot welke viszwemsnelheid in km per uur de formule in elk geval niet realistisch kan zijn.

De viszwemsnelheid bij het onderzoek werd bepaald op basis van de soort en de lengte van de vis. Een bepaalde vissoort van 18 cm lang heeft een zwemsnelheid van 0,66 meter per seconde.

3p **3** Bereken hoeveel procent van de werkelijk aanwezige hoeveelheid van deze vissoort volgens de formule van de onderzoekers gevangen werd.

Fietsen en energie

De formules voor het **basisenergieverbruik**, de energie die iemand per dag nodig heeft voor alle activiteiten van een lichaam in rust, zoals hartwerking, ademhaling, enzovoort, staan in tabel 1. In deze formules is B het basisenergieverbruik in kcal (kilocalorieën) per dag en G het lichaamsgewicht van de persoon in kg.

tabel 1

basisenergieverbruik

leeftijdsgroep	**formule**
18-30 jaar (jongvolwassen)	$B = 15,3G + 679$
31-60 jaar (ouder)	$B = 11,6G + 879$

Er gelden verschillende formules voor jongvolwassen en voor oudere personen. We vragen ons af welke van deze twee groepen het laagste basisenergieverbruik heeft. Dit hangt volgens de formules in tabel 1 af van het lichaamsgewicht van een persoon.

4p **4** Onderzoek bij welke lichaamsgewichten tussen 40 en 120 kg de jongvolwassenen een lager basisenergieverbruik hebben dan de ouderen.

Als iemand sport, is de totale energie die hij of zij nodig heeft groter dan het basisenergieverbruik. De formule voor de totale energie T per dag is $T = 1,3B + S$. Hierbij is B het basisenergieverbruik per dag en S het energieverbruik voor het sporten per dag zoals fietsen, zwemmen en hardlopen.
In tabel 2 staat het energieverbruik in kcal per kg lichaamsgewicht per uur bij fietsen bij een aantal snelheden. Neem aan dat het energieverbruik **tussen** de aangegeven snelheden in lineair verloopt.

tabel 2

energieverbruik bij fietsen

snelheid (km/uur)	14	17	20	24	28	35	42
energieverbruik (kcal/kg/uur)	4	6	8	10	12	16	20

Frits is 58 jaar en weegt 70 kg. Hij doet mee aan de fietselfstedentocht in Friesland, een tocht waarbij op één dag 240 km gefietst wordt. We nemen aan dat hij de hele tocht rijdt met een snelheid van 25 km/uur.

4p **5** Bereken het totale energieverbruik van Frits op deze dag.

Bij een hogere snelheid wordt per uur een grotere afstand afgelegd. Je kunt voor elke snelheid die in tabel 2 vermeld wordt, het energieverbruik per kg lichaamsgewicht bij het fietsen per afgelegde kilometer berekenen. Alex beweert dat dit voor elke snelheid gelijk is. Bert zegt dat dit hoger is bij hogere snelheden en Carolien beweert dat dit lager is bij hogere snelheden. Eén van deze drie personen heeft gelijk.

4p **6** Onderzoek met behulp van tabel 2 wie van de drie gelijk heeft.

Bij een duatlon wordt er gefietst en hardgelopen[1]. Er zijn verschillende afstanden mogelijk voor de twee onderdelen. Zo bestaat de Powermanduatlon uit 60 km fietsen en 20 km hardlopen. De Zwitserse duatlon echter, gaat over 150 km fietsen en 40 km hardlopen.

Je zou een duatlon kunnen samenstellen waarbij voor elk onderdeel het energieverbruik voor het sporten even groot is. We gaan daarbij uit van een atleet die met een dusdanige snelheid hardloopt, dat zijn energieverbruik 1 kcal per afgelegde kilometer is. De atleet fietst met een snelheid waarbij hij 0,4 kcal per km verbruikt. De genoemde waarden voor het energieverbruik gelden steeds per kg lichaamsgewicht.

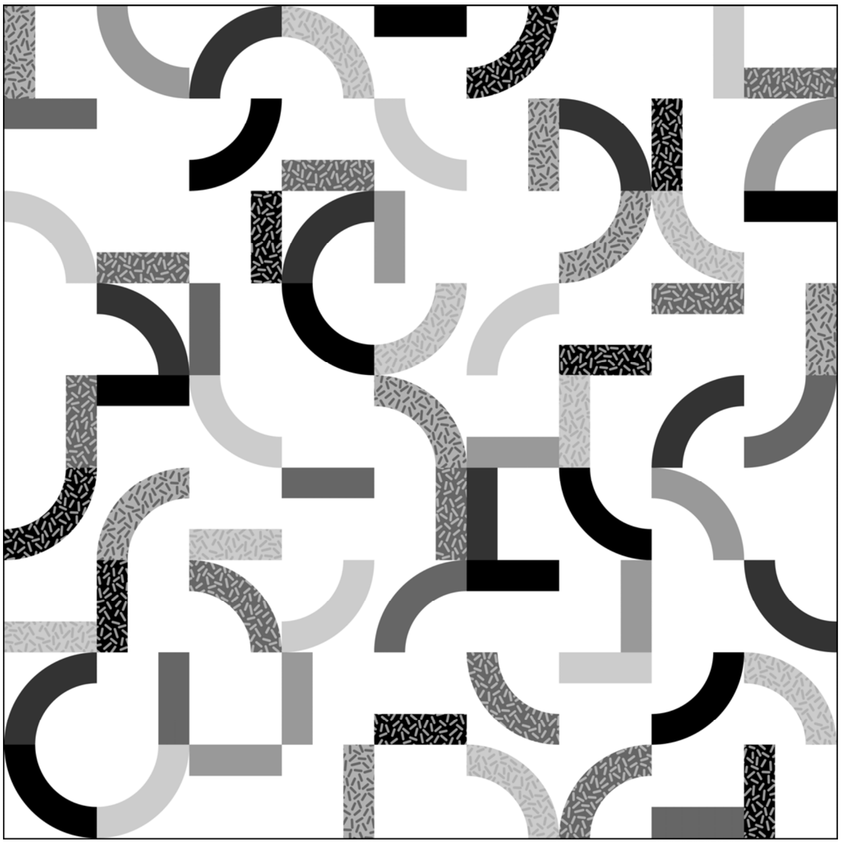
5p **7** Bereken de afstanden voor het fietsen en het hardlopen in een duatlon van in totaal 21 km waarbij het energieverbruik van deze atleet voor elk onderdeel steeds even groot is.

noot 1 Het hardlopen bij een duatlon wordt verdeeld in een stuk voor en een stuk na het fietsen maar dat is voor deze opgave niet van belang.

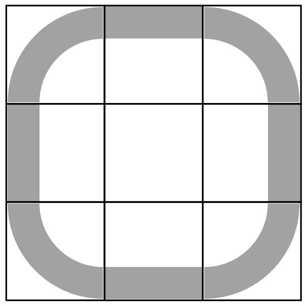
Panelen van Panhuysen

In figuur 1 zie je (een bewerking van) een paneel van een kunstwerk van Paul Panhuysen. Het vierkante paneel is opgebouwd uit 9 bij 9 vakjes, in totaal 81.

figuur 1



figuur 2



Voor de vulling van de vakjes heeft Panhuysen gebruikgemaakt van negen verschillende vormen.
In figuur 2 zie je welke negen vormen gebruikt zijn: acht stukken van een vierkant met afgeronde hoeken en een leeg vlakje in het midden.

Op elke rij van figuur 1 komt elk van deze negen vormen precies één keer voor.

3p **8** Bereken hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn om negen verschillende vormen op één rij te zetten.

De kunstenaar heeft niet alleen negen verschillende vormen gebruikt, maar ook negen verschillende kleuren. De vormen kunnen dus in negen verschillende kleuren voorkomen. Bij een leeg vakje is geen kleur te zien.

3p **9** Bereken hoeveel **zichtbaar** verschillende mogelijkheden er zijn voor het eerste vakje linksboven van een paneel.

De kunstenaar heeft zichzelf de volgende beperkingen opgelegd: in een rij en in een kolom mag niet twee keer dezelfde vorm voorkomen. Hetzelfde geldt voor de kleuren.
Panhuysen heeft een handige manier gebruikt om de 81 vakjes op die manier te vullen: door middel van sudoku's. In figuur 3 zie je een voorbeeld van een sudoku.

figuur 3

8	6	2	7	9	1	5	3	4
5	7	9	4	3	8	2	1	6
3	4	1	2	6	5	8	7	9
6	2	5	9	7	3	1	4	8
4	9	3	1	8	6	7	2	5
1	8	7	5	4	2	9	6	3
7	1	4	3	5	9	6	8	2
2	5	8	6	1	4	3	9	7
9	3	6	8	2	7	4	5	1

In een sudoku worden de cijfers 1 tot en met 9 gebruikt en elk cijfer komt in elke rij **en** elke kolom precies één keer voor[1)]. Panhuysen nummerde de kleuren als volgt: 1 = donkerrood, 2 = lichtrood, 3 = oranje, 4 = geel, 5 = groen, 6 = lichtblauw, 7 = donkerblauw, 8 = crème en 9 = zwart. De volgorde van de kleuren op het paneel van figuur 1 liet hij corresponderen met die in de sudoku van figuur 3.
Voor de vormen gebruikte hij dezelfde procedure.

3p **10** Onderzoek of hij voor de volgorde van de vormen van figuur 1 ook de sudoku van figuur 3 heeft gebruikt.

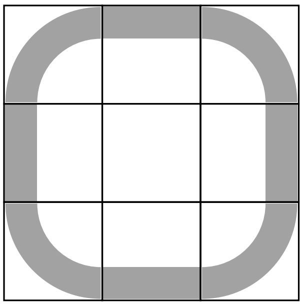
noot 1 Ook in de negen blokken van 3 bij 3 waarin de sudoku verdeeld kan worden, komen de cijfers 1 tot en met 9 één keer voor, maar dat is voor de vragen 10 en 11 niet van belang.

Het totale kunstwerk van Panhuysen bestaat uit een serie van acht verschillende panelen van elk 81 vakjes. Al die panelen zijn door middel van sudoku's opgebouwd. In de figuur op de uitwerkbijlage zie je een ander paneel uit de serie van Panhuysen. In een aantal vakjes is met een cijfer de kleur aangegeven. Het vakje rechtsonder is afgedekt met een grijs vakje.

3p **11** Teken de juiste vorm in het afgedekte vakje en geef aan welke kleur die vorm heeft. Licht je antwoord toe.

Een sudoku kun je in negen blokken verdelen van elk 3 bij 3 vakjes. Zie figuur 3. Ook in elk van die blokken komt elk getal precies één keer voor. In de kleuren en de vormen op de panelen van Panhuysen is dat ook terug te zien. Op een paneel komt weinig symmetrie voor, maar het is wél mogelijk om een blok van 3 bij 3 vakjes symmetrisch te vullen, bijvoorbeeld als je alleen naar de vormen kijkt.
Je kunt zo'n blok zo vullen met de negen verschillende vormen dat er een symmetrische figuur ontstaat. Zie figuur 4.

figuur 4



Figuur 4 is één mogelijkheid, maar er zijn nog andere mogelijkheden om een symmetrische figuur te krijgen.

4p **12** Teken op de uitwerkbijlage twee van die mogelijkheden en noteer waarom deze blokken symmetrisch zijn.

Weekendje Winterberg

Op een toeristische website van de Duitse regio Sauerland staat de volgende tekst:

> We hebben een huisje in Winterberg in het Sauerland.
> Als we geen verplichtingen hebben, gaan we daar - als er sneeuw ligt of als er mooi weer wordt voorspeld - in het weekend naar toe.

De tekst bestaat, afgezien van de eerste zin, uit vier uitspraken die samen een logische redenering vormen.
De uitspraken zijn:

- A We hebben verplichtingen;
- B Er ligt sneeuw in Winterberg;
- C Er wordt voor Winterberg mooi weer voorspeld;
- D We gaan in het weekend naar ons huisje in Winterberg.

3p **13** Schrijf de logische redenering uit de tekst met behulp van de letters A, B, C en D en de logische symbolen.

Bekijk de volgende zin:

> Als we in het weekend niet naar Winterberg gaan, dan hebben we verplichtingen of er ligt geen sneeuw en er wordt geen mooi weer voorspeld.

Deze zin is op verschillende manieren te schrijven:

$$\neg D \Rightarrow (A \vee \neg B) \wedge \neg C$$

of

$$\neg D \Rightarrow A \vee (\neg B \wedge \neg C)$$

4p **14** Onderzoek welke van beide manieren in overeenstemming is met de tekst op de website. Licht je antwoord toe.

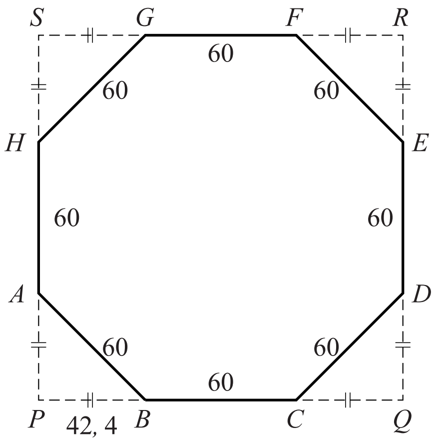
Plantenbak

In het Belgische Samrée staan de plantenbakken van de foto. De plantenbakken zijn naast elkaar gezet met een aflopende hoogte.

foto

De vorm van de plantenbakken is een prisma met een regelmatig achthoekig grondvlak. De zijden van de achthoek zijn 60 cm. In de figuur is het vierkant $PQRS$ dat er precies omheen past, getekend. Om de oppervlakte van het achthoekige grondvlak $ABCDEFGH$ te berekenen, is het handig om de lengte PB in de gelijkbenige driehoek PBA te gebruiken. Deze lengte is 42,4 cm. De houten plankjes zijn 20 cm hoog. De dikte van de bodem en van de houten plankjes mag je hier verwaarlozen.

figuur



Een hovenier komt met zijn vrachtwagen met 3 m^3 potgrond om de plantenbakken te vullen.

5p **15** Bereken of 3 m^3 voldoende is voor de drie plantenbakken.

Op de uitwerkbijlage moet het achthoekige grondvlak $ABCDEFGH$ (zie de figuur) van de plantenbak in perspectief getekend worden. De zijden AB, BC en het vierkant $PQRS$ zijn al getekend.

6p **16** Maak de perspectieftekening af op de uitwerkbijlage.

Wereldbevolking

Op dit moment leven er op aarde ruim 7 miljard mensen. De groei van de wereldbevolking wordt regelmatig onderzocht.

In 1650 waren er ongeveer 500 miljoen mensen op aarde en in 1850 ongeveer 1,3 miljard. In de periode 1850-2000 steeg de wereldbevolking tot 6,4 miljard.

We nemen aan dat de wereldbevolking tussen 1650 en 1850 lineair gegroeid is. Als we veronderstellen dat deze lineaire groei zich voort had gezet tot het jaar 2000, dan zouden we voor dat jaar slechts op een klein percentage van het werkelijke aantal van 6,4 miljard mensen uitkomen.

3p **17** Bereken dit percentage.

De tabel geeft een overzicht van de wereldbevolking in miljoenen mensen.

tabel

jaar	1650	1750	1804	1850	1900	1950	2000	2015
bevolking in miljoenen	500	795	1000	1265	1656	2516	6400	7300

Uit de gegevens van de tabel blijkt dat de wereldbevolking in de periode 1650-1850 niet lineair toegenomen is.

3p **18** Bereken de gemiddelde verandering per jaar in de perioden 1650-1750, 1750-1804 en 1804-1850 en toon hiermee aan, dat er geen sprake is van een lineaire groei.

3p **19** Onderzoek met behulp van de gegevens in de tabel, of de wereldbevolking gedurende de gehele periode 1850-2000 exponentieel gegroeid kan zijn.

Men veronderstelt dat in de toekomst de groei van de wereldbevolking zal afnemen. Iemand heeft een recursief model opgesteld voor de ontwikkeling van de wereldbevolking:

$$N(t+1) = 1{,}02 \cdot N(t) - 0{,}0015\left(N(t)\right)^2 \text{ met } N(0) = 7{,}3$$

Hierin is t de tijd in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met 31 december in het jaar 2015, en N de wereldbevolking in miljarden.

4p **20** Onderzoek in welk jaar de wereldbevolking volgens dit model voor het eerst meer dan 7,6 miljard zal zijn.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

De ontwikkeling van de wereldbevolking kan ook met een directe formule worden gegeven. Een formule die in de buurt komt van het model dat beschreven is door het recursieve model, is:

$$D(t)=\frac{13,33}{1+0,826\cdot 0,98^{t}}$$

Hierin is t de tijd in jaren, waarbij $t=0$ overeenkomt met het jaar 2015, en D de wereldbevolking in miljarden. Volgens dit model nadert de wereldbevolking op den duur een grenswaarde.

3p **21** Beredeneer aan de hand van de formule, hoe groot deze grenswaarde is.