# Correctievoorschrift VWO

# 2023

tijdvak 1

## wiskunde B

Het correctievoorschrift bestaat uit:
1 Regels voor de beoordeling
2 Algemene regels
3 Vakspecifieke regels
4 Beoordelingsmodel
5 Aanleveren scores
6 Bronvermeldingen

## 1 Regels voor de beoordeling

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 3.21, 3.24 en 3.25 van het Uitvoeringsbesluit WVO 2020.
Voorts heeft het College voor Toetsen en Examens op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet College voor toetsen en examens de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.
Voor de beoordeling zijn de volgende aspecten van de artikelen 3.21 t/m 3.25 van het Uitvoeringsbesluit WVO 2020 van belang:

1. De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Toetsen en Examens.
2. De directeur doet de van de examinator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de directeur van de school van de gecommitteerde toekomen. Deze stelt het ter hand aan de gecommitteerde.

3 De gecommitteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Toetsen en Examens.
De gecommitteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommitteerde.
4 De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het behaalde aantal scorepunten voor het centraal examen vast.
5 Indien de examinator en de gecommitteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommitteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke corrector aanwijzen. De beoordeling van deze derde corrector komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

## 2 Algemene regels

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Toetsen en Examens van toepassing:
1 De examinator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.
2 Voor het antwoord op een vraag worden door de examinator en door de gecommitteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met correctievoorschrift. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.
3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:
3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;
3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend in overeenstemming met het beoordelingsmodel;
3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;
3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;
3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;
3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;

3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;

3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;

3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.

4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Als het antwoord op een andere manier is gegeven, maar onomstotelijk vaststaat dat het juist is, dan moet dit antwoord ook goed gerekend worden. Voor het juiste antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal scorepunten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.

5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

7 Indien de examinator of de gecommitteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Toetsen en Examens.
Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.

8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.

9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen.
Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur.
De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.

NB1 *T.a.v. de status van het correctievoorschrift:*
Het College voor Toetsen en Examens heeft de correctievoorschriften bij regeling vastgesteld. Het correctievoorschrift is een zogeheten algemeen verbindend voorschrift en valt onder wet- en regelgeving die van overheidswege wordt verstrekt. De corrector mag dus niet afwijken van het correctievoorschrift.

NB2 *T.a.v. het verkeer tussen examinator en gecommitteerde (eerste en tweede corrector):*
Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht. Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten. Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht. Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

NB3 *T.a.v. aanvullingen op het correctievoorschrift:*
Er zijn twee redenen voor een aanvulling op het correctievoorschrift: verduidelijking en een fout.
*Verduidelijking*
Het correctievoorschrift is vóór de afname opgesteld. Na de afname blijkt pas welke antwoorden kandidaten geven. Vragen en reacties die via het Examenloket bij de Toets- en Examenlijn binnenkomen, kunnen duidelijk maken dat het correctievoorschrift niet voldoende recht doet aan door kandidaten gegeven antwoorden. Een aanvulling op het correctievoorschrift kan dan alsnog duidelijkheid bieden.
*Een fout*
Als het College voor Toetsen en Examens vaststelt dat een centraal examen een fout bevat, kan het besluiten tot een aanvulling op het correctievoorschrift.

Een aanvulling op het correctievoorschrift wordt door middel van een mailing vanuit Examenblad.nl bekendgemaakt. Een aanvulling op het correctievoorschrift wordt zo spoedig mogelijk verstuurd aan de examensecretarissen.
Soms komt een onvolkomenheid pas geruime tijd na de afname aan het licht. In die gevallen vermeldt de aanvulling:

– Als het werk al naar de tweede corrector is gezonden, past de tweede corrector deze aanvulling op het correctievoorschrift toe.
  en/of
– Als de aanvulling niet is verwerkt in de naar Cito gezonden Wolf-scores, voert Cito dezelfde wijziging door die de correctoren op de verzamelstaat doorvoeren.

Dit laatste gebeurt alleen als de aanvulling luidt dat voor een vraag alle scorepunten moeten worden toegekend.

Als een onvolkomenheid op een dusdanig laat tijdstip geconstateerd wordt dat een aanvulling op het correctievoorschrift ook voor de tweede corrector te laat komt, houdt het College voor Toetsen en Examens bij de vaststelling van de N-term rekening met de onvolkomenheid.

## 3 Vakspecifieke regels

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

1. Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
2. De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de grafische rekenmachine gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR hebben gebruikt.

3a Als bij een vraag doorgerekend wordt met tussenantwoorden die afgerond zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, wordt bij de betreffende vraag één scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond genoteerd worden.

3b Uitzondering zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## 4 Beoordelingsmodel

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Een gebroken functie

**1 maximumscore 3**

- $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$ 1
- $f'(x) = 0$ voor $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ($x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ voldoet niet) 1
- $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ (dus het minimum van $f$ is $2\sqrt{2}$) (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

**2 maximumscore 5**

- ($\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ dus) een vergelijking van de asymptoot $k$ is $y = 2x$ 1
- De integraal $\displaystyle\int_a^{2a} \left(2x + \frac{1}{x} - 2x\right)\mathrm{d}x = \int_a^{2a} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ moet worden berekend 1
- Een primitieve van $\dfrac{1}{x}$ is $\ln(x)$ ($x > 0$) 1
- De oppervlakte is $\ln(2a) - \ln(a)$ 1
- $\ln(2a) - \ln(a) = \ln(2)$ (en dat is onafhankelijk van $a$) 1

of

- ($\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ dus) een vergelijking van de asymptoot $k$ is $y = 2x$ 1
- De integraal $\displaystyle\int_a^{2a} \left(2x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ min de oppervlakte van het trapezium (ingesloten door de $x$-as, de asymptoot en de lijnen $x = a$ en $x = 2a$) moet worden berekend 1
- Een primitieve van $f$ is $x^2 + \ln(x)$ ($x > 0$) 1
- De oppervlakte is $4a^2 + \ln(2a) - a^2 - \ln(a) - \frac{1}{2}a(2a + 4a)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Dit herleiden tot $\ln(2a) - \ln(a) = \ln(2)$ (en dat is onafhankelijk van $a$) 1

**3 maximumscore 4**

- $2x+\frac{1}{x}=3$ geeft $x=0{,}5$ en $x=1$ 1
- Het inzicht dat de grafiek van $f(x)-3$ gewenteld moet worden om de $x$-as 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam kan berekend worden met $\pi\int_{0,5}^{1}\left(\left(f(x)-3\right)^2\right)\mathrm{d}x$ 1
- De gevraagde inhoud is 0,02 1

## Buigen van metalen platen

**4 maximumscore 5**

- $P'Q'=\frac{45}{360}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2{,}4d=\frac{3}{5}d\cdot\pi$ 1
- Oppervlakte $ABCD=\frac{3}{5}d\cdot\pi\cdot d=\frac{3}{5}\pi\cdot d^2$ 1
- Oppervlakte $A'B'C'D'=\frac{45}{360}\cdot\pi\cdot\left(3d\right)^2-\frac{45}{360}\cdot\pi\cdot\left(2d\right)^2=\frac{5}{8}\pi\cdot d^2$ 1
- $\dfrac{\frac{5}{8}\pi\cdot d^2}{\frac{3}{5}\pi\cdot d^2}=1{,}041...$ 1
- Het gevraagde percentage is 4 1

**5 maximumscore 3**

- De vergelijking $420=\frac{R\cdot 10^2}{200}\left(1+\frac{40}{200}\right)$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $R=700$ 1
- Dus $F=980$ (kN/m) 1

**6 maximumscore 4**

- Substitutie van formule 2 in formule 1 geeft $F=R\cdot d^{\,0,25}+4R\cdot d^{\,-0,5}$ 1
- $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}d}=0{,}25R\cdot d^{\,-0,75}-2R\cdot d^{\,-1,5}$ 1
- $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}d}=0$ als $d^{\,0,75}=8$ 1
- Dit geeft $d=16$ 1

## Gedraaide parabool

**7 maximumscore 3**

- $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} t + t^2 \\ t^2 - t \end{pmatrix}$ (dus $x_Q(t) = t + t^2$ en $y_Q(t) = t^2 - t$ ) 1

**8 maximumscore 3**

- $\begin{pmatrix} x_Q{}'(t) \\ y_Q{}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$ 1
- De snelheid van $Q$ is $\sqrt{(1+2t)^2 + (2t-1)^2} = \sqrt{2+8t^2}$ 1
- $\sqrt{4+16t^2} = \sqrt{2(2+8t^2)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+8t^2}$ (dus $c = \sqrt{2}$ ) 1

*Opmerking*
*Als in het tweede en derde antwoordelement een specifieke waarde van t is genomen, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

**9 maximumscore 3**

- $L=\sqrt{\left(t+t^2-2t\right)^2+\left(t^2-t-2t^2\right)^2}$ 1
- Dit herschrijven tot $L=\sqrt{2t^4+2t^2}$ 1
- Dus $L=\sqrt{t^2}\cdot\sqrt{2t^2+2}=|t|\cdot\sqrt{2t^2+2}$ 1

of

- (Omdat $M$ het midden is van $OP$ en $\overrightarrow{MQ}\perp\overrightarrow{OP}$ geldt) $PQ=OQ$ dus $L=\sqrt{\left(t+t^2\right)^2+\left(t^2-t\right)^2}$ 1
- Dit herschrijven tot $L=\sqrt{2t^4+2t^2}$ 1
- Dus $L=\sqrt{t^2}\cdot\sqrt{2t^2+2}=|t|\cdot\sqrt{2t^2+2}$ 1

of

- $PQ^2=MP^2+MQ^2$ geeft $\left(t^2-t\right)^2+\left(-t^2-t\right)^2=\left(t^2\right)^2+t^2+\left(t^2\right)^2+\left(-t\right)^2$ 1
- Dit herschrijven tot $L^2=2t^4+2t^2$ 1
- Dus $L=\sqrt{t^2}\cdot\sqrt{2t^2+2}=|t|\cdot\sqrt{2t^2+2}$ 1

**10 maximumscore 4**

- Voor $t<0$ geldt $L=-t\cdot\sqrt{2t^2+2}$ 1
- De afgeleide van $\sqrt{2t^2+2}$ is $\dfrac{4t}{2\sqrt{2t^2+2}}$ 1
- $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2t^2+2}-t\cdot\dfrac{4t}{2\sqrt{2t^2+2}}$ 1
- $\lim\limits_{t\uparrow 0}\left(\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)=-\sqrt{2}-0=-\sqrt{2}$ (dus de helling van de grafiek van $L$ nadert tot $-\sqrt{2}$ als $t$ vanaf links tot 0 nadert) 1

of

- Voor $t>0$ geldt $L=t\cdot\sqrt{2t^2+2}$ 1
- De afgeleide van $\sqrt{2t^2+2}$ is $\dfrac{4t}{2\sqrt{2t^2+2}}$ 1
- $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2t^2+2}+t\cdot\dfrac{4t}{2\sqrt{2t^2+2}}$ en $\lim\limits_{t\downarrow 0}\left(\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)=\sqrt{2}+0=\sqrt{2}$ 1
- Vanwege symmetrie nadert de helling van de grafiek van $L$ dan tot $-\sqrt{2}$ als $t$ vanaf links tot 0 nadert 1

## Absolute sinus

**11 maximumscore 3**

- De $y$-coördinaat van $A$ is $1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en de $y$-coördinaat van $B$ is $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (want $-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}<0$) 1
- Het gemiddelde van $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is 1 dus $a=1$ 1
- Dus $b=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1

**12 maximumscore 5**

- $f\left(x\right)=0$ als $\sin(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1
- Dit geeft $x=\frac{4}{3}\pi\,(+k\cdot 2\pi)$ en $x=\frac{5}{3}\pi\,(+k\cdot 2\pi)$ 1
- De oppervlakte van een klein vlakdeel kan berekend worden met behulp van $\int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi}\left(\sin(x)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\sin(x)+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is $-\cos(x)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot x$ 1
- De gevraagde oppervlakte is $1-\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot\pi$ 1

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Logaritmische functies

**13 maximumscore 6**

- Uit $f(x) = g(x)$ volgt $(1+\mathrm{e}^2)\cdot\ln(x) = 1+\mathrm{e}^2$ — 1
- Dit geeft $\ln(x) = 1$ dus $x = \mathrm{e}$ — 1
- $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ — 1
- $g'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^2}{x}$ — 1
- $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ en $g'(\mathrm{e}) = -\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}} = -\mathrm{e}$ — 1
- $f'(\mathrm{e})\cdot g'(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\cdot -\mathrm{e} = -1$ dus de grafieken snijden elkaar loodrecht — 1

of

- $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ — 1
- $g'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^2}{x}$ — 1
- Er moet gelden: $f'(x)\cdot g'(x) = -1$ — 1
- Dit geeft $-\dfrac{\mathrm{e}^2}{x^2} = -1$ — 1
- Dit geeft $x = \mathrm{e}$ ($x = -\mathrm{e}$ is geen oplossing) — 1
- $f(\mathrm{e}) = 1$ en $g(\mathrm{e}) = 1$ (dus de grafieken snijden elkaar in $(\mathrm{e}, 1)$) en dus snijden de grafieken elkaar loodrecht — 1

**14 maximumscore 4**

- $x_A = p$ en $x_B = p+3$ — 1
- Voor $p$ moet gelden $1+\mathrm{e}^2\cdot(1-\ln(p)) = \ln(p+3)$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden — 1
- De gevraagde waarde van $q$ is 1,7 — 1

of

- $f(x_B) = q$ dus $x_B = \mathrm{e}^q$ — 1
- $g(x_A) = q$ dus $x_A = \mathrm{e}^{1-\frac{q-1}{\mathrm{e}^2}}$ — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\mathrm{e}^q - \mathrm{e}^{1-\frac{q-1}{\mathrm{e}^2}} = 3$ opgelost kan worden — 1
- De gevraagde waarde van $q$ is 1,7 — 1

## Bissectrice in een rechthoek

**15 maximumscore 5**

- Een vergelijking van $AC$ is $x+2y=8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van $PF$ is $x-2y=4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Dan volgt dat de coördinaten van $D$ $(6,1)$ zijn 1
- $\overrightarrow{EP}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{ED}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ 1
- $\cos(\angle(\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EF}))=\dfrac{\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{6}{\sqrt{52}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ en

  $\cos(\angle(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF}))=\dfrac{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ (dus $\angle(\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EF})=\angle(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF})$

  waaruit volgt dat de lijn door $E$ en $F$ de bissectrice is van hoek $PED$) 1

of

- Een vergelijking van $AC$ is $x+2y=8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van $PF$ is $x-2y=4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De coördinaten van $D$ zijn $(6,1)$ 1
- $\overrightarrow{EP}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{ED}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ 1
- Dus de lijn door $E$ en $P$ en de lijn door $E$ en $D$ zijn elkaars beeld bij spiegelen in de lijn $EF$, dus de lijn door $E$ en $F$ is de bissectrice van hoek $PED$ 1

of

- Een vergelijking van $AC$ is $x + 2y = 8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van $PF$ is $x - 2y = 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De coördinaten van $D$ zijn $(6, 1)$ 1
- $\angle PEF = \angle EPC$ (Z-hoeken) dus $\tan(\angle PEF) = \tan(\angle EPC) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 1
- In driehoek $D'ED$ (met $D'$ de loodrechte projectie van $D$ op $EF$) geldt: $\tan(\angle D'ED) = \dfrac{D'D}{D'E} = \frac{2}{3}$ (dus $\angle D'ED = \angle PEF$ waaruit volgt dat de lijn door $E$ en $F$ de bissectrice is van hoek $PED$) 1

of

- Uit de gelijkvormigheid van driehoek $AOC$ met driehoek $FOP$ volgt dat driehoek $CPD$ gelijkbenig is, dus $DC = DP$ 1
- Hieruit volgt $y_D = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ 1
- De coördinaten van $D$ zijn $(6, 1)$ 1
- In driehoek $P'EP$ (met $P'$ de loodrechte projectie van $P$ op het verlengde van $EF$) geldt: $\tan(\angle P'EP) = \dfrac{P'P}{P'E} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 1
- In driehoek $D'ED$ (met $D'$ de loodrechte projectie van $D$ op $EF$) geldt: $\tan(\angle D'ED) = \dfrac{D'D}{D'E} = \frac{2}{3}$ (dus $\angle D'ED = \angle P'EP$ waaruit volgt dat de lijn door $E$ en $F$ de bissectrice is van hoek $PED$) 1

**16 maximumscore 6**

- Een vergelijking van $c$ is $(x-4)^2+(y-2)^2=4$ en een vergelijking van $AC$ is $y=-\frac{1}{2}x+4$ 1
- $c$ snijden met $AC$ geeft $(x-4)^2+\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2=4$ dus $1\frac{1}{4}x^2-10x+16=0$ 1
- Dit geeft $D\left(4+\frac{4}{5}\sqrt{5}, 2-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$ 1
- Driehoek $FDD''$ (met $D''$ de loodrechte projectie van $D$ op $OA$) is gelijkvormig met driehoek $FPO$ dus $\frac{PO}{FO}=\frac{DD''}{FD''}$ 1
- Dit geeft $\frac{-p}{4}=\frac{2-\frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{4}{5}\sqrt{5}}$ ofwel $\frac{-p}{4}=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}$ 1
- Dus $p=2-2\sqrt{5}$ 1

of

- Een vergelijking van $PF$ is $y=-\frac{1}{4}px+p$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Punt $D$ is het snijpunt van $AC$ met $PF$, dus moet gelden $-\frac{1}{4}px+p=-\frac{1}{2}x+4$ 1
- Dit geeft $D\left(\frac{4p-16}{p-2}, \frac{2p}{p-2}\right)$ 1
- $MD=2$ dus $\left(\frac{4p-16}{p-2}-4\right)^2+\left(2-\frac{2p}{p-2}\right)^2=2^2$ 1
- Herleiden tot (bijvoorbeeld) $\frac{64}{(p-2)^2}+\frac{16}{(p-2)^2}=4$ 1
- $p=2-\sqrt{20}$ ( $p=2+\sqrt{20}$ voldoet niet) 1

of

- $rc_{ED}=-rc_{EP}=-\frac{4-p}{4}=\frac{p-4}{4}$ 1
- $rc_{PF}=\frac{-p}{4}$ 1
- Punt $M$ is het midden van $EF$, dus $EF$ is de middellijn van de cirkel 1
- $D$ ligt op de cirkel, dus geldt $\angle FDE=90°$ 1
- Er moet dus gelden dat $rc_{ED}\cdot rc_{PF}=\frac{p-4}{4}\cdot\frac{-p}{4}=-1$ 1
- Dan volgt $p=2-\sqrt{20}$ ( $p=2+\sqrt{20}$ voldoet niet) 1

of

- Driehoek $AOC$ is gelijkvormig met driehoek $DD'M$ (met $D'$ de loodrechte projectie van $D$ op $EF$), dus $\dfrac{AO}{AC}=\dfrac{DD'}{DM}$ en $\dfrac{CO}{CA}=\dfrac{MD'}{MD}$ 1
- $DM=2$ en $AC=\sqrt{80}$ geeft $D'M=\frac{2}{5}\sqrt{5}$ en $D'D=\frac{4}{5}\sqrt{5}$ 1
- $D\left(4+\frac{4}{5}\sqrt{5},2-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door $F$ en $D$ is $\dfrac{2-\frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{4}{5}\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ 1
- Een vergelijking van de lijn door $F$ en $D$ is $y=(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2})(x-4)$ 1
- Het snijpunt met de $y$-as is $P\left(0,2-2\sqrt{5}\right)$ en dus is $p=2-2\sqrt{5}$ 1

of

- Een vectorvoorstelling van $AC$ is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ en een vectorvoorstelling van $PF$ is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}-4\\p\end{pmatrix}$ 1
- Voor het snijpunt $D$ geldt: $\begin{cases}8-2t=4-4v\\t=p\cdot v\end{cases}$ 1
- Hieruit volgt dat voor de coördinaten van $D$ geldt $\left(4+\dfrac{16}{4-2p},\dfrac{-4p}{4-2p}\right)$ ofwel $\left(\dfrac{16-4p}{2-p},\dfrac{-2p}{2-p}\right)$ 1
- $MD=2$ dus $\left(\dfrac{16-4p}{2-p}-4\right)^2+\left(2-\dfrac{-2p}{2-p}\right)^2=2^2$ 1
- Herleiden tot (bijvoorbeeld) $\dfrac{64}{(2-p)^2}+\dfrac{16}{(2-p)^2}=4$ 1
- $p=2-\sqrt{20}$ ( $p=2+\sqrt{20}$ voldoet niet) 1

## Exponentiële breuk

**17 maximumscore 3**

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ en $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$ 1
- Een exacte berekening waaruit de vergelijking van de eerste asymptoot volgt 1
- Een exacte berekening waaruit de vergelijking van de tweede asymptoot volgt, dus de gevraagde afstand is 1 1

of

- Als $x$ onbeperkt afneemt, dan nadert $e^x$ naar 0 en als $x$ onbeperkt toeneemt, dan neemt $e^x$ onbeperkt toe 1
- Als $x$ onbeperkt afneemt, dan nadert $\frac{1}{1+e^x}$ naar 1 1
- Als $x$ onbeperkt toeneemt, dan nadert $\frac{1}{1+e^x}$ naar 0 en dus is de gevraagde afstand 1 1

**18 maximumscore 3**

- $F'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- $1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$ $(= f(x))$
  (dus is $F(x)$ een primitieve van $f(x)$) 1

*Opmerking:*
*Als in het eerste antwoordelement de kettingregel niet is gebruikt, mogen voor dit antwoordelement geen scorepunten worden toegekend. Als de kettingregel wel is gebruikt, maar niet correct, mag voor dit antwoordelement hoogstens 1 scorepunt worden toegekend op basis van vakspecifieke regel 1.*

**19 maximumscore 4**

- De oppervlakte van het vlakdeel kan worden berekend met $\int_0^a \frac{1}{e^x+1}\,dx$ 1
- $F(a) - F(0) = a - \ln\left(e^a+1\right) + \ln(2)$ 1
- $\ln\left(e^a+1\right) > \ln\left(e^a\right) = a$, dus $a - \ln(e^a+1) < 0$ (of een gelijkwaardige redenering) 1
- Hieruit volgt dat $F(a) - F(0) < \ln(2)$ 1

## 5 Aanleveren scores

Verwerk de scores van de alfabetisch eerste vijf kandidaten per examinator in de applicatie Wolf. Cito gebruikt deze gegevens voor de analyse van de examens.
Om de gegevens voor dit doel met Cito uit te wisselen dient u ze uiterlijk op 25 mei te accorderen.

Ook na 25 mei kunt u nog tot en met 13 juni gegevens voor Cito accorderen. Deze gegevens worden niet meer meegenomen in de hierboven genoemde analyses, maar worden wel meegenomen bij het genereren van de groepsrapportage.

Na accordering voor Cito kunt u in Wolf de gegevens nog wijzigen om ze vervolgens vrij te geven voor het overleg met de externe corrector. Deze optie is relevant als u Wolf ook gebruikt voor uitwisseling van de gegevens met de externe corrector.

**tweede tijdvak**
Ook in het tweede tijdvak wordt de normering mede gebaseerd op door kandidaten behaalde scores. Wissel te zijner tijd ook voor al uw tweede-tijdvak-kandidaten de scores uit met Cito via Wolf. Dit geldt **niet** voor de aangewezen vakken.

## 6 Bronvermeldingen

| | |
|---|---|
| Alle figuren | Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2023 |