

## Spookje

Op het domein  $[-\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$  worden de functies  $f$  en  $g$  gegeven door:

$$f(x) = \sin(x)\cos(2x)$$

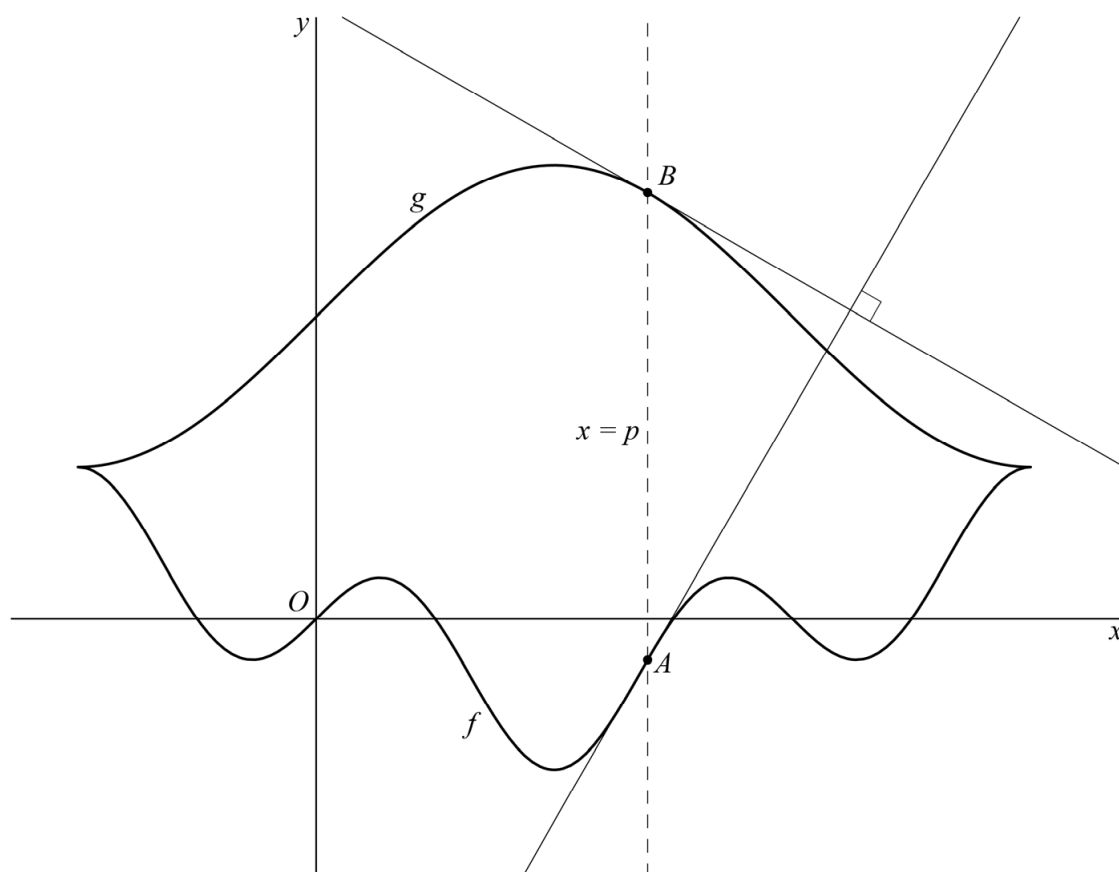
$$g(x) = 2 + \sin(x)$$

Er geldt:  $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$ .

- 6p 2 Bewijs dat inderdaad geldt:  $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$ .

In de figuur zijn de grafieken van  $f$  en  $g$  weergegeven. De verticale lijn met vergelijking  $x = p$  snijdt de grafiek van  $f$  in het punt  $A$  en de grafiek van  $g$  in het punt  $B$ . We bekijken de raaklijn aan de grafiek van  $f$  in  $A$  en de raaklijn aan de grafiek van  $g$  in  $B$ .

figuur



In de figuur is een waarde van  $p$  gekozen waarvoor de twee raaklijnen elkaar loodrecht snijden. Er zijn meerdere waarden van  $p$  waarvoor dit het geval is.

- 6p 3 Bereken exact het **aantal** waarden van  $p$  waarvoor de twee raaklijnen elkaar loodrecht snijden.

Het functievoorschrift van  $f$  kan worden herleid tot:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))$$

Dit kan bijvoorbeeld worden bewezen door de vorm  $\sin(t+u) - \sin(t-u)$  voor een geschikte keuze van  $t$  en  $u$  te herleiden.

3p 4 Bewijs dat  $\frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \sin(x)\cos(2x)$ .

De grafieken van  $f$  en  $g$  hebben twee gemeenschappelijke punten, namelijk  $(-\frac{1}{2}\pi, 1)$  en  $(1\frac{1}{2}\pi, 1)$ .

$V$  is het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van  $f$  en  $g$ .

4p 5 Bereken exact de oppervlakte van  $V$ .