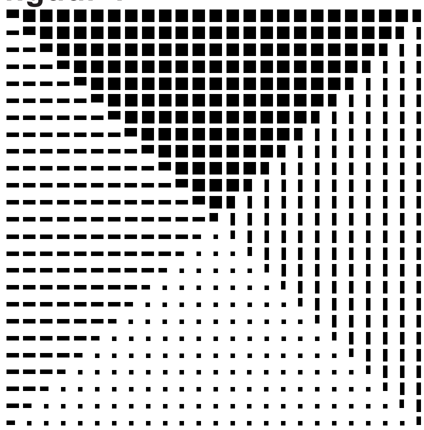
Wetmatige beweging

Ruim 50 jaar geleden maakte de kunstenaar Peter Struycken het werk ‘Wetmatige beweging’. Dit kunstwerk is opgebouwd uit 625 zwarte vormen: vierkanten en andere rechthoeken, die met een bepaalde regelmaat verdeeld zijn over een wit vlak.
Zie figuur 1.

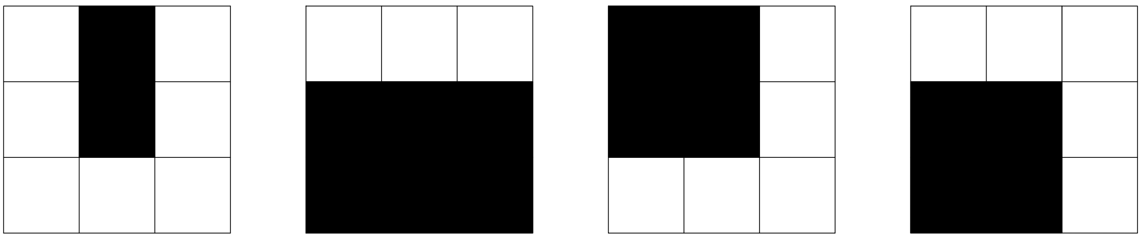
figuur 1



Elk van de 625 zwarte vormen is gemaakt op basis van een 3×3-rooster van 9 vierkanten.
Hierbij gelden de volgende voorwaarden:
- het middelste vierkant in zo’n 3×3-rooster is altijd zwart;
- een vorm bestaat uit 1, 2, 3, 4, 6 of 9 zwarte vierkanten;
- een vorm is een rechthoek (en kan dus ook een vierkant zijn).

Zie figuur 2 voor vier voorbeelden.

figuur 2



De twee vierkante vormen in figuur 2 worden als verschillende vormen opgevat, omdat ze op verschillende plaatsen in het 3×3-rooster staan.

5p **12** Bereken hoeveel verschillende vormen de kunstenaar op deze manier kan maken.

In deze opgave gaan we ervan uit dat de hokjes in het 3×3-rooster allemaal 1 cm bij 1 cm zijn.

Om de totale oppervlakte te berekenen van de 625 gebruikte zwarte vormen, verdelen we het werk in 9 delen. Zie de uitwerkbijlage. In elk deel komt slechts één type vorm voor.
- Het middelste deel bestaat uit één vorm met oppervlakte 4 cm^2.
- Er zijn 4 delen die elk uit 12 dezelfde vormen bestaan.
- Er zijn 4 driehoekige delen met elk evenveel vormen.

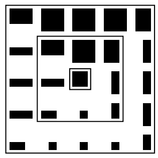
4p **13** Bereken de totale oppervlakte in cm^2 van de 625 gebruikte zwarte vormen door uitsluitend gebruik te maken van bovenstaande gegevens en de figuur op de uitwerkbijlage.

In het midden van het kunstwerk staat dus één vorm met oppervlakte 4 cm^2. Dat is tevens de enige vorm met oppervlakte 4 cm^2 die in het kunstwerk voorkomt. Je kunt het kunstwerk opgebouwd zien vanuit het midden door vanuit dat midden naar de rand van het kunstwerk te ‘lopen’. Je komt dan steeds een volgende zogeheten **schil** tegen, een rechthoekige rand van vormen. Zie ook figuur 3. Vanuit het midden is het werk opgebouwd uit 12 schillen.

In het vervolg van deze opgave bekijken we delen van dit kunstwerk, waarbij het aantal schillen variabel is. Het aantal schillen noemen we n. Voor het originele kunstwerk geldt dus $n = 12$.

Met bijvoorbeeld $n = 2$ krijgen we het deel van het kunstwerk zoals in figuur 3. In figuur 3 zie je ook de 2 verschillende schillen plus de middenvorm met oppervlakte 4 cm^2.

figuur 3



In figuur 3 zijn in totaal 24 vormen rondom de vorm met oppervlakte 4 cm^2 in het midden gerangschikt. Deze 24 vormen zijn als volgt onderverdeeld:

– vier keer , vier keer , vier keer  en vier keer ;
– twee keer , twee keer , twee keer  en twee keer .

Stel je voor dat je deze 24 vormen weghaalt van hun huidige posities en ze daarna willekeurig over de zo vrijgekomen posities gaat herverdelen zonder de vormen te draaien. De middenvorm met oppervlakte 4 cm^2 blijft daarbij dus op zijn plaats.

4p **14** Bereken hoeveel verschillende figuren je zo kunt krijgen.

De totale oppervlakte in cm^2 van de gebruikte vormen bij n schillen noemen we $O(n)$.
Voor $O(n)$ is een formule opgesteld:

(1) $O(n) = 1 \cdot 4 + n \cdot (2+2+6+6) + \frac{1}{2} n \cdot (1+2n-1) \cdot (1+3+3+9)$

Deze formule is te herschrijven als:

(2) $O(n) = (4n+2)^2$

3p **15** Laat zien dat beide formules (1) en (2) te herleiden zijn tot dezelfde formule.

Formule (2) is een directe formule. We kunnen deze formule ook gebruiken om een recursieve formule op te stellen voor $O(n)$.
Zo’n formule heeft de vorm:

$$O(n+1) = O(n) + an + b \text{ met } O(0) = 4$$

4p **16** Bereken de waarden van a en b.