wiskunde B havo

Centraal examen havo

Tijdvak 1

Opgaven

Aan de secretarissen van het eindexamen van de scholen voor havo,

Bij het centraal examen wiskunde B havo op woensdag 26 mei, aanvang 13.30 uur, moeten de kandidaten de volgende mededeling ontvangen. Deze mededeling moet bij het begin van de zitting worden voorgelezen en/of aan de kandidaten worden uitgereikt.

Op **pagina 9**, **in de tekst onder figuur 2**, moet de zin bij het vierde opsommingsstreepje

– Tussen de momenten 1 en 3 schuift het zitje 45 cm naar voren.

vervangen worden door:

– Tussen de momenten 1 en 3 schuift het zitje 45 cm naar achteren.

Namens het College voor Toetsen en Examens,

drs. P.J.J. Hendrikse,
voorzitter

Examen HAVO

2021

tijdvak 1
woensdag 26 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

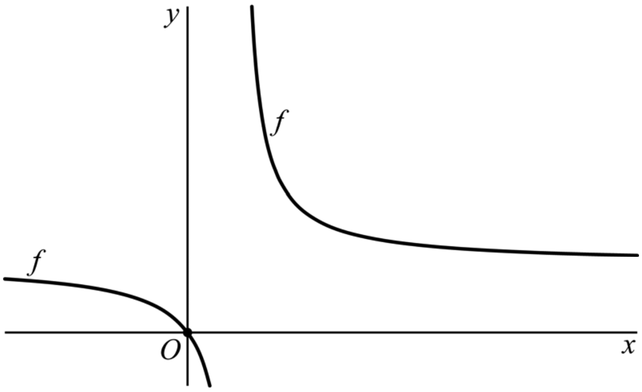
Gebroken functie en wortelfunctie

De functie f wordt gegeven door:

$$f(x) = 1 + \frac{3}{4x - 3}$$

De grafiek van f gaat door de oorsprong O. Zie figuur 1.

figuur 1



4p **1** Bereken exact de helling van de grafiek van f in O.

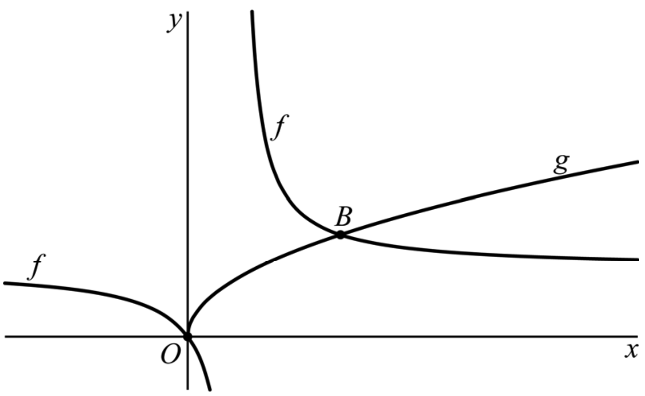
Het functievoorschrift van f is ook anders te schrijven, namelijk:

$$f(x) = \frac{4x}{4x - 3}$$

De functie g wordt gegeven door $g(x) = \sqrt{x}$.

De grafieken van f en g hebben twee punten gemeenschappelijk, O en B. Zie figuur 2.

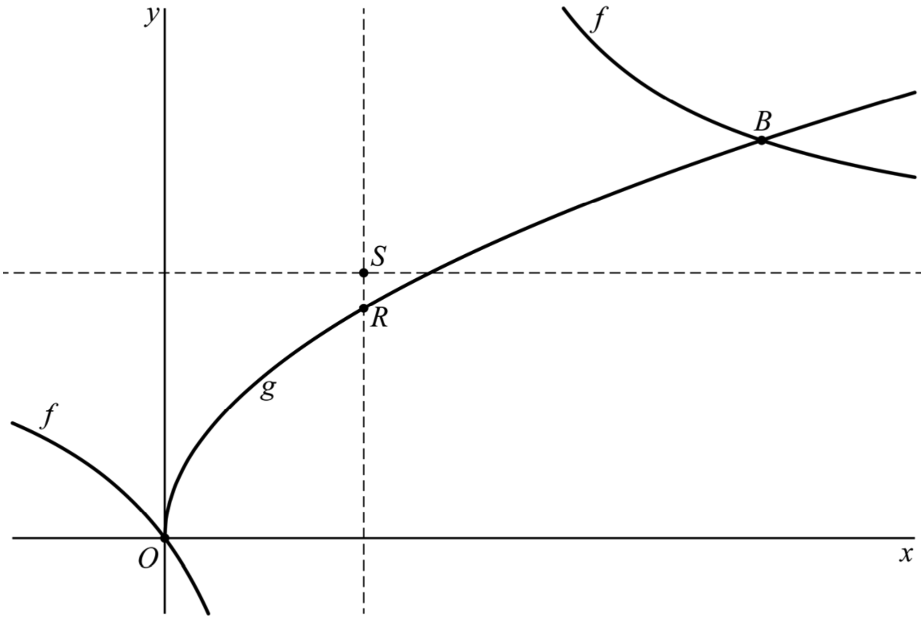
figuur 2



6p **2** Bereken exact de x-coördinaat van B.

De grafiek van f heeft een horizontale en een verticale asymptoot.
Het punt S is het snijpunt van deze twee asymptoten.
De grafiek van g snijdt de verticale asymptoot van f in het punt R.
Zie figuur 3, waarin de asymptoten van f gestippeld zijn.

figuur 3



4p **3** Bereken exact de afstand tussen R en S.

Twee cirkels en twee lijnen

De cirkel c_1 wordt gegeven door:

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$$

De lijn k wordt gegeven door:

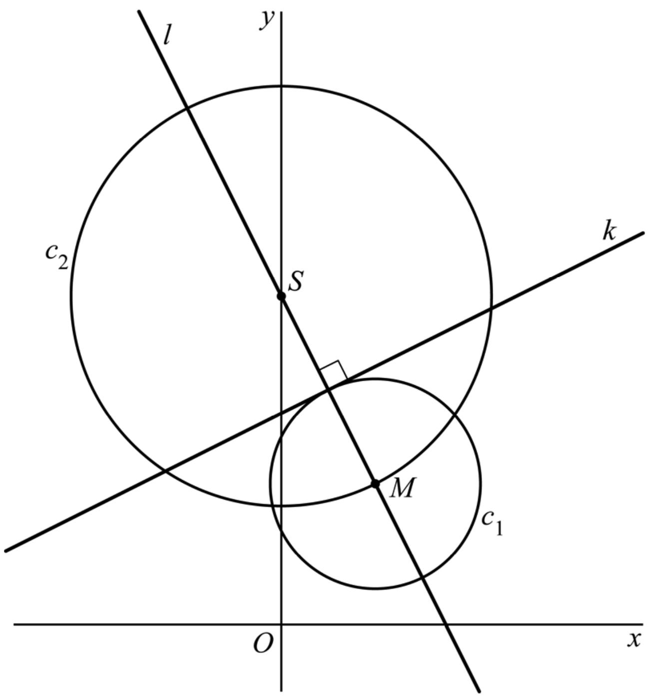
$$y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$$

Lijn k raakt cirkel c_1.

3p **4** Bewijs dit.

Het punt M is het middelpunt van c_1. De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k. Het punt S is het snijpunt van l met de y-as. De cirkel c_2 is de cirkel door M met middelpunt S. Zie de figuur.

figuur



6p **5** Stel op exacte wijze een vergelijking op van c_2.

Ga verder op de volgende pagina.

Oppervlakte onder een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

De grafiek van f is een parabool.

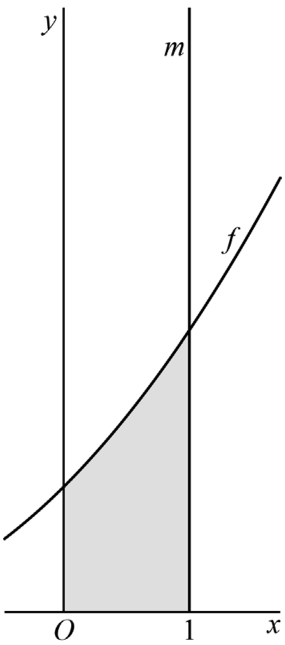
2p **6** Bewijs dat de top van de parabool op de x-as ligt.

De lijn m is de verticale lijn met vergelijking $x = p$, met $p > 0$.

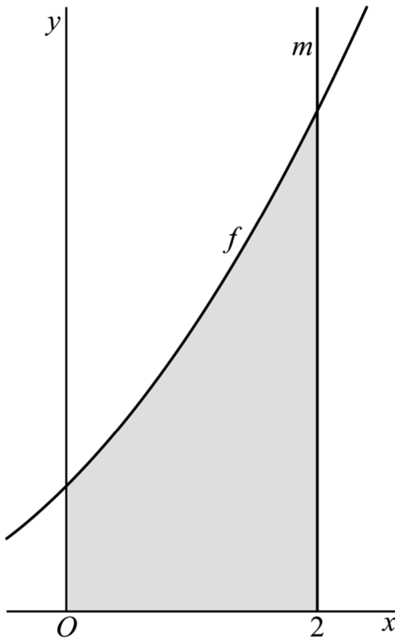
We kijken naar het gebied dat aan de bovenkant wordt begrensd door de grafiek van f, aan de onderkant door de x-as, aan de linkerkant door de y-as en aan de rechterkant door lijn m.

In figuren 1 en 2 is dit gebied grijs gemaakt: in figuur 1 voor de situatie $p = 1$, in figuur 2 voor de situatie $p = 2$.

figuur 1



figuur 2



De oppervlakte van dit grijze gebied noemen we A. De waarde van A hangt dus af van de keuze van p. Een formule voor A is:

$$A = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}p + 1\right)^3 - \frac{2}{3}$$

Zo is bijvoorbeeld $A = 4\frac{2}{3}$ als $p = 2$ en dus is de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 2 gelijk aan $4\frac{2}{3}$.

Voor een bepaalde waarde van p is de oppervlakte van het grijze gebied gelijk aan 42.

4p **7** Bereken exact deze waarde van p.

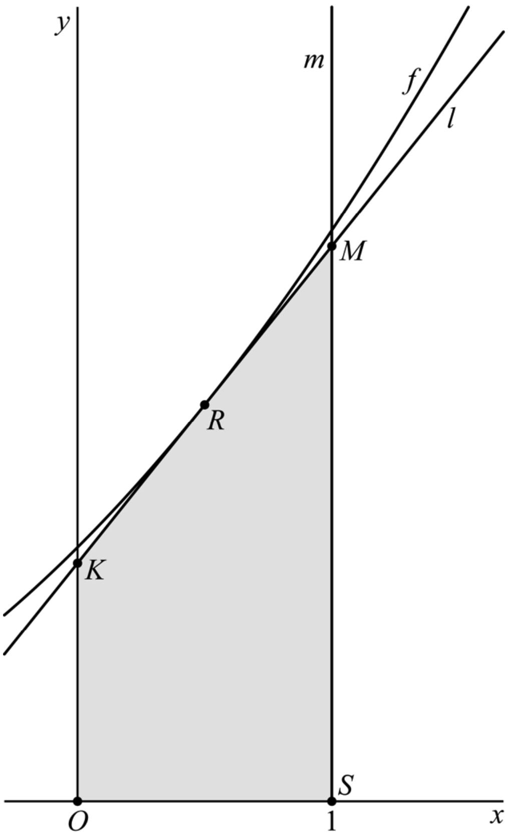
Zonder de voorgaande formule te gebruiken kun je toch een goede benadering vinden van de oppervlakte. In de rest van de opgave doen we dit voor het geval $p = 1$.

De benadering van de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 1 gaat als volgt:

- De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $R\left(\frac{1}{2}, 1\frac{9}{16}\right)$.
- K is het snijpunt van lijn l met de y-as.
- M is het snijpunt van lijn l en lijn m.
- S is het punt met coördinaten $(1, 0)$.
- De oppervlakte van vierhoek $OSMK$ is de benadering.

Zie figuur 3, waarin de oppervlakte van vierhoek $OSMK$ grijs is gemaakt.

figuur 3



Een vergelijking van l is $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$.

3p **8** Bewijs dat $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$ inderdaad een vergelijking van l is.

De oppervlakte van de grijs gemaakte vierhoek $OSMK$ in figuur 3 wijkt een beetje af van de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 1.

5p **9** Bereken algebraïsch hoeveel procent deze afwijking is. Geef je eindantwoord in één decimaal.

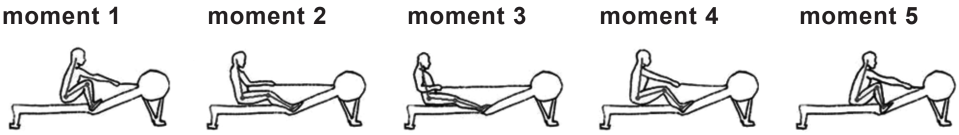
Roeien

In sportscholen vind je apparaten waarmee je een roeibeweging simuleert. Zo'n apparaat wordt een roei-ergometer genoemd.
Zie de foto.

foto

In figuur 1 zie je een serie zijaanzichten van de beweging van een roeier op een roei-ergometer.

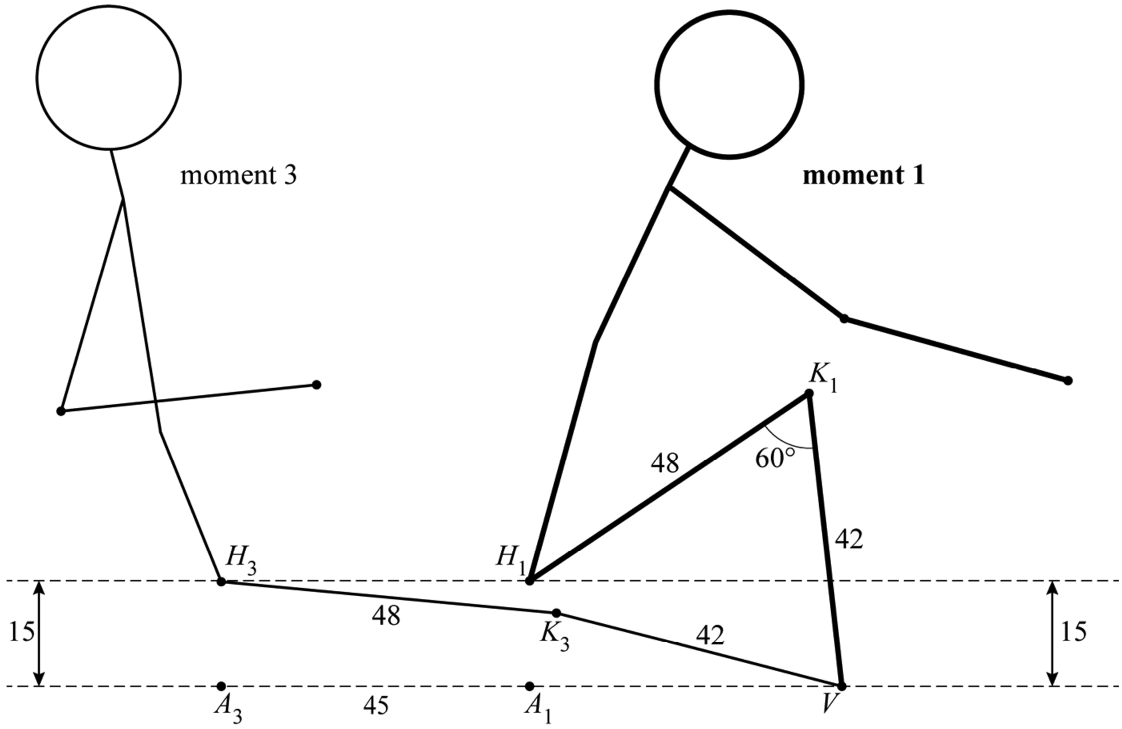
figuur 1



Doordat het voetenbord vast zit, blijven de voeten vast op één punt. Wanneer de roeier de benen strekt en weer buigt, beweegt het zitje horizontaal van voor naar achter en weer terug. De roeibeweging begint op moment 1, waarna de roeier zijn benen strekt (momenten 2 en 3). Daarna worden de benen weer gebogen (momenten 4 en 5).

In figuur 2 zie je een model van een roeier op de momenten 1 en 3. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage. Het punt V is de voet, K is de knie en H is de heup (die in dit model samenvalt met het zitje).

figuur 2



In dit model geldt:
- De lengte van het bovenbeen is 48 cm.
- De lengte van het onderbeen is 42 cm.
- Het hoogteverschil tussen heup en voet is 15 cm.
- Tussen de momenten 1 en 3 schuift het zitje 45 cm naar voren.
- De hoek tussen bovenbeen en onderbeen op moment 1 is $60°$.
- A is het punt recht onder de heup, op dezelfde hoogte als de voet.
- Met A_1 wordt de positie van A op moment 1 bedoeld enzovoorts.

Op moment 1 is de afstand tussen de heup en de voet (H_1V) ongeveer 45,3 cm. Deze afstand kan exact berekend worden.

2p **10** Bereken exact de afstand in cm tussen de heup en de voet op moment 1. Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken.

Ga bij het volgende onderdeel uit van $H_1V = 45{,}3$.
Op moment 3 is het been bijna gestrekt, dus hoek H_3K_3V is bijna 180°.
Om deze hoek te berekenen, is het handig om gebruik te maken van de driehoeken A_1VH_1 en A_3VH_3.

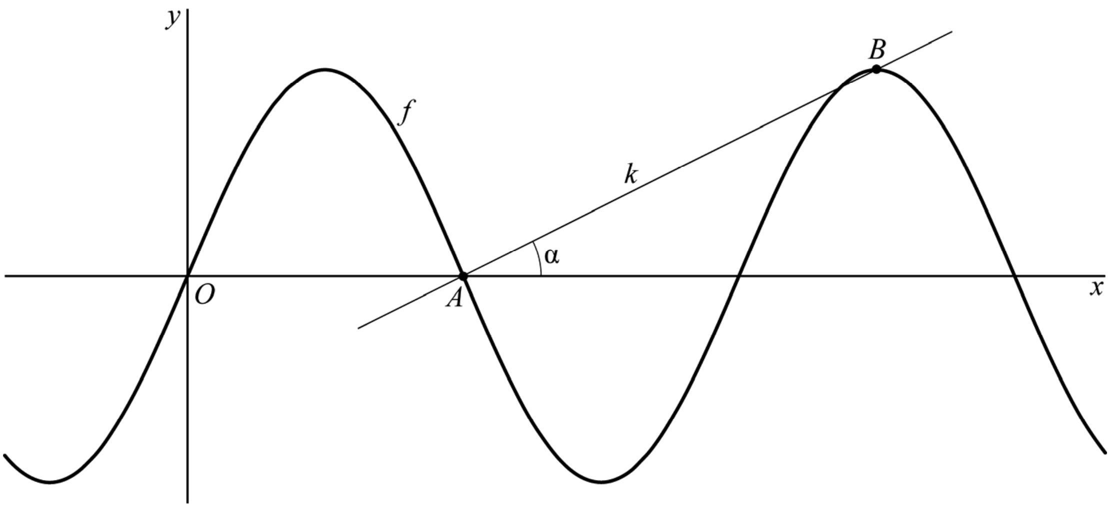
5p **11** Bereken hoek H_3K_3V. Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken. Geef je eindantwoord in gehele graden.

Een sinusoïde en nog een sinusoïde

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$.

Het punt A is het eerste snijpunt van de grafiek van f met de positieve x-as. Het punt B is de derde top rechts van de y-as.
De lijn k gaat door A en B. In figuur 1 is de hoek α aangegeven die lijn k met de x-as maakt.

figuur 1

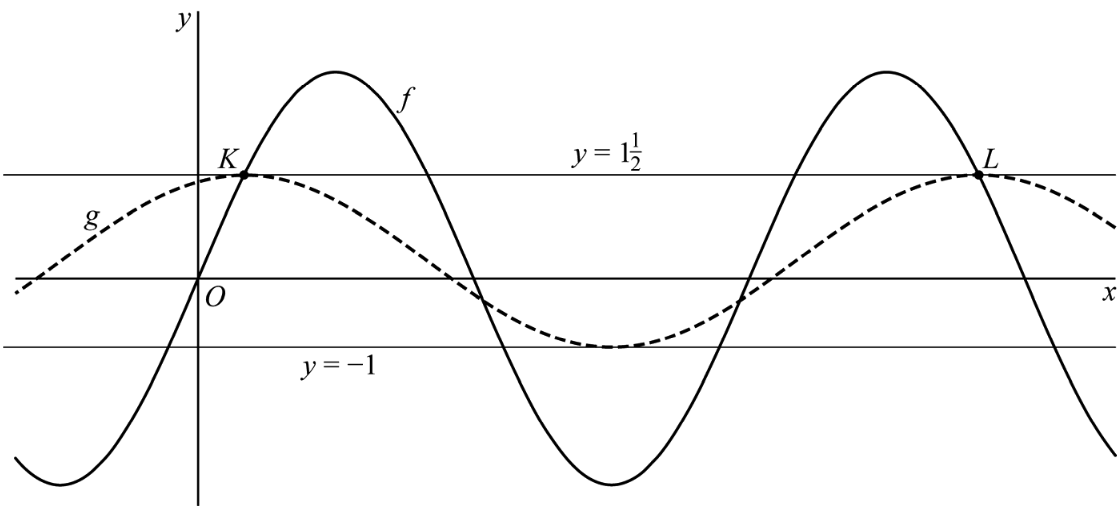


6p **12** Bereken algebraïsch hoe groot hoek α is. Geef je eindantwoord in gehele graden.

In figuur 2 is de grafiek van f getekend en ook de lijn met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}$. Deze lijn heeft oneindig veel snijpunten met de grafiek van f. Het eerste snijpunt rechts van de y-as is K, het vierde is L.

In figuur 2 is met een stippellijn nog een sinusoïde weergegeven.
Voor deze sinusoïde geldt:
– De eerste top rechts van de y-as valt samen met K.
– De derde top rechts van de y-as valt samen met L.
– De sinusoïde raakt de lijn met vergelijking $y = -1$.

figuur 2



De functie g die bij de gestippelde grafiek hoort, heeft een functievoorschrift van de volgende vorm:

$$g(x) = a \cdot \cos(b(x - c)) + d$$

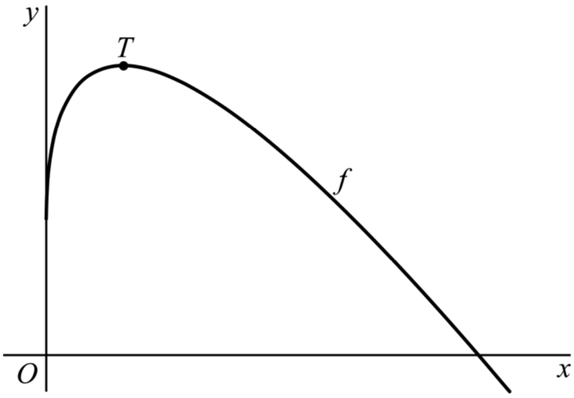
Hierin zijn a, b, c en d getallen.

7p **13** Bereken exact voor elk van deze vier getallen een mogelijke waarde.

Driehoek met maximale oppervlakte

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 1$.
Het punt T is de top van de grafiek van f. Zie figuur 1.

figuur 1

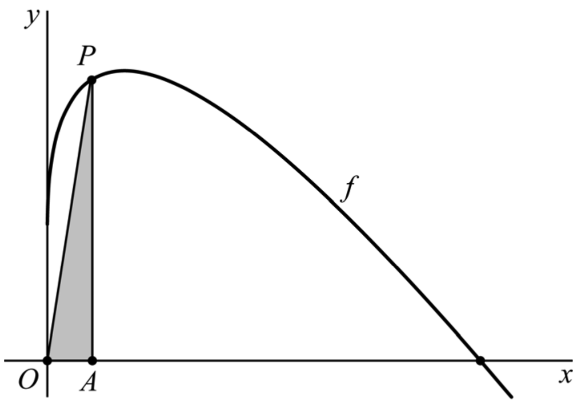


4p **14** Bereken exact de coördinaten van T.

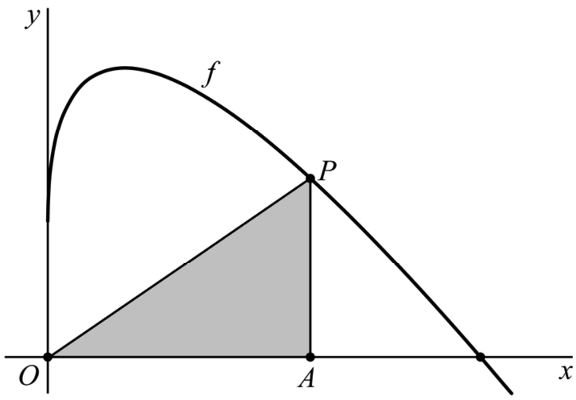
Op het deel van de grafiek van f dat boven de x-as ligt, wordt een punt P gekozen.
Het punt A ligt op de x-as en heeft dezelfde x-coördinaat als P.

In figuur 2 en figuur 3 is de situatie voor twee posities van P geschetst.
In figuur 3 is de oppervlakte van driehoek OAP groter dan in figuur 2.

figuur 2



figuur 3



Er is een positie van P op de grafiek van f zo dat de oppervlakte van driehoek OAP maximaal is.
Deze positie van P kun je vinden door de oppervlakte van driehoek OAP in x uit te drukken, waarbij x de lengte van zijde OA is.

4p **15** Bereken de maximale oppervlakte van driehoek OAP. Geef je eindantwoord in drie decimalen.

Ga verder op de volgende pagina.

De invloed van leeftijd op hardloopprestaties

Gemiddeld leveren langeafstandslopers de beste prestaties op een leeftijd van ongeveer 30 jaar. Daarna nemen de prestaties met de jaren af.
Er bestaan meerdere modellen om de prestaties van langeafstandslopers van verschillende leeftijden met elkaar te vergelijken. In deze opgave komen twee van zulke modellen aan bod.

Model 1
Dit model gaat ervan uit dat tussen 35 en 55 jaar de gemiddelde **snelheid** van langeafstandslopers bij wedstrijden met 0,8% per levensjaar afneemt.

De halve marathon is een hardloopwedstrijd over een afstand van 21,0975 km. De Nederlandse hardloper Aart Stigter heeft meerdere keren aan de halve marathon van Egmond deelgenomen.
In 1993 liep hij op 36-jarige leeftijd deze halve marathon met een gemiddelde snelheid van 19,5 km per uur. Precies 12 jaar later, in 2005, liep hij dezelfde halve marathon in een tijd van 1 uur, 10 minuten en 4 seconden.
Uitgaande van zijn gemiddelde snelheid in 1993 en een afname van die gemiddelde snelheid met 0,8% per levensjaar, heeft Aart Stigter in 2005 sneller gelopen dan model 1 voorspelt.

5p **16** Bereken hoeveel seconden sneller. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Model 2
Dit model maakt gebruik van correctiegetallen voor de **tijd**.
De World Master Athletics-bond (WMA) heeft tabellen uitgegeven met correctiegetallen om prestaties van hardlopers van verschillende leeftijden met elkaar te kunnen vergelijken. Met deze correctiegetallen kun je de tijd van elke hardloper omrekenen naar een tijd die hoort bij een 30-jarige met een gelijkwaardige prestatie.

In de tabel zie je de correctiegetallen voor 36-jarigen en 49-jarigen op de halve marathon. Door de tijd van een 36-jarige hardloper met 0,9920 te vermenigvuldigen krijg je de tijd die hoort bij een 30-jarige hardloper met een gelijkwaardige prestatie.
Neem aan dat de correctiegetallen voor de leeftijden tussen 36 en 49 jaar bij benadering exponentieel afnemen met de leeftijd.

tabel

leeftijd	correctiegetal t.o.v. 30-jarige
36	0,9920
49	0,9039

Bij de NK halve marathon 2019 was de 47-jarige Marcel Laros met een tijd van 4279 seconden de snelste in de categorie 45-49 jaar. Bij diezelfde halve marathon was de 36-jarige Wynfrith Meijwes de snelste in de categorie 35-39 met een tijd van 4130 seconden.

6p **17** Onderzoek op algebraïsche wijze welke van deze twee hardlopers de beste prestatie heeft geleverd volgens model 2.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.