

Oppervlakte onder een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

De grafiek van f is een parabool.

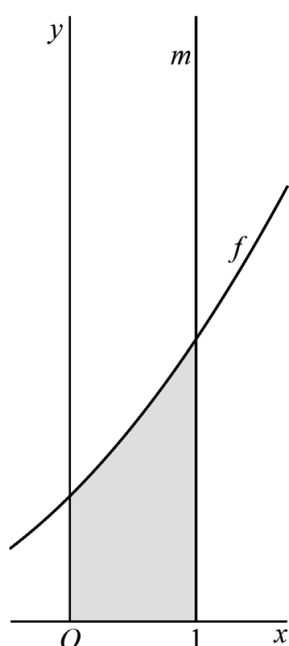
2p 6 Bewijs dat de top van de parabool op de x -as ligt.

De lijn m is de verticale lijn met vergelijking $x = p$, met $p > 0$.

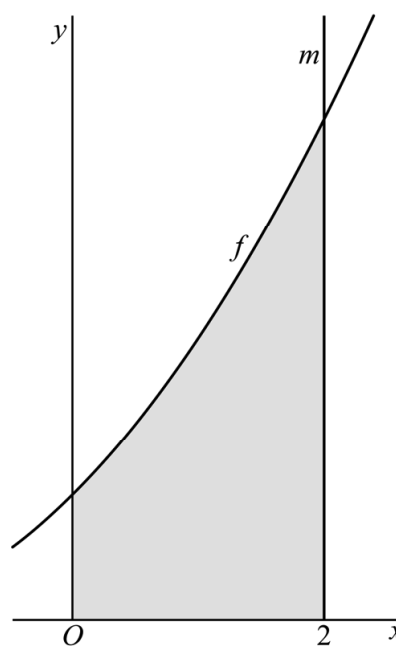
We kijken naar het gebied dat aan de bovenkant wordt begrensd door de grafiek van f , aan de onderkant door de x -as, aan de linkerkant door de y -as en aan de rechterkant door lijn m .

In figuren 1 en 2 is dit gebied grijs gemaakt: in figuur 1 voor de situatie $p = 1$, in figuur 2 voor de situatie $p = 2$.

figuur 1



figuur 2



De oppervlakte van dit grijze gebied noemen we A . De waarde van A hangt dus af van de keuze van p . Een formule voor A is:

$$A = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}p + 1 \right)^3 - \frac{2}{3}$$

Zo is bijvoorbeeld $A = 4\frac{2}{3}$ als $p = 2$ en dus is de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 2 gelijk aan $4\frac{2}{3}$.

Voor een bepaalde waarde van p is de oppervlakte van het grijze gebied gelijk aan 42.

4p 7 Bereken exact deze waarde van p .

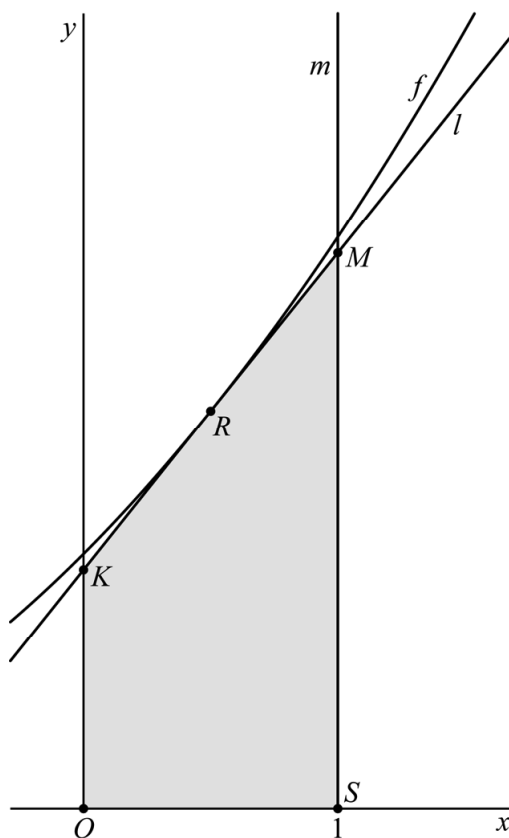
Zonder de voorgaande formule te gebruiken kun je toch een goede benadering vinden van de oppervlakte. In de rest van de opgave doen we dit voor het geval $p = 1$.

De benadering van de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 1 gaat als volgt:

- De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $R\left(\frac{1}{2}, 1\frac{9}{16}\right)$.
- K is het snijpunt van lijn l met de y -as.
- M is het snijpunt van lijn l en lijn m .
- S is het punt met coördinaten $(1, 0)$.
- De oppervlakte van vierhoek $OSMK$ is de benadering.

Zie figuur 3, waarin de oppervlakte van vierhoek $OSMK$ grijs is gemaakt.

figuur 3



Een vergelijking van l is $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$.

3p **8** Bewijs dat $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$ inderdaad een vergelijking van l is.

De oppervlakte van de grijs gemaakte vierhoek $OSMK$ in figuur 3 wijkt een beetje af van de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 1.

5p **9** Bereken algebraïsch hoeveel procent deze afwijking is. Geef je eindantwoord in één decimaal.