

Gebroken functies

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ zijn de functies f en g gegeven door:

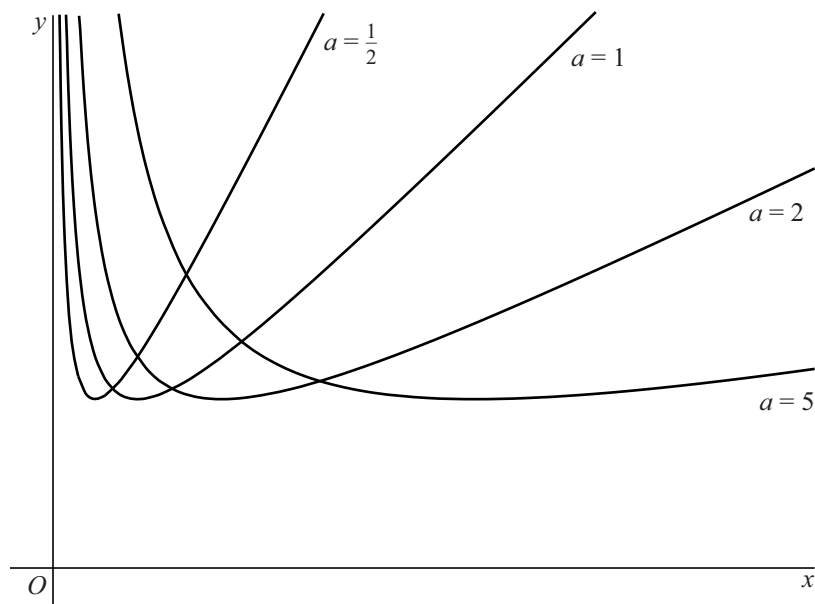
$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$$

- 4p **14** Op het gegeven domein hebben de grafieken van f en g één snijpunt.
Bereken exact de x -coördinaat van dit snijpunt.

De functies f en g zijn voorbeelden van functies met een functievoorschrift van de vorm $h(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$ met $a > 0$ en domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

In figuur 1 is voor een aantal waarden van a de grafiek van h getekend.

figuur 1



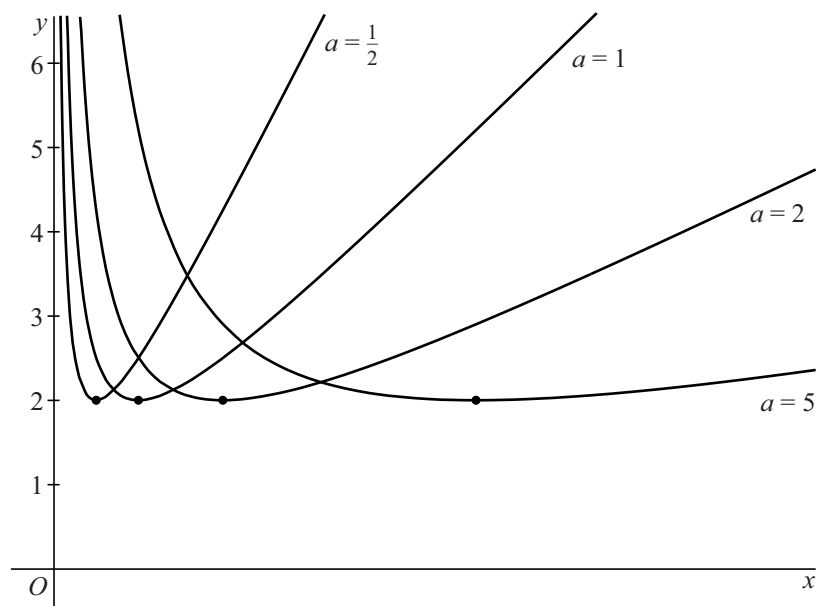
De afgeleide van h wordt gegeven door:

$$h'(x) = \frac{x^2 - a^2}{ax^2}$$

- 3p **15** Bewijs dit.

Voor elke waarde van a heeft de grafiek van h één top. In figuur 2 is voor enkele waarden van a de top met een stip aangegeven.

figuur 2



De y -coördinaat van elke top in figuur 2 is gelijk aan 2.

Het is zelfs zo dat voor **elke** waarde van a (met $a > 0$) de y -coördinaat van de top van de grafiek van h gelijk is aan 2.

4p **16** Bewijs dit.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.