Examen HAVO

2017

tijdvak 2
dinsdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

oud programma **wiskunde A**

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

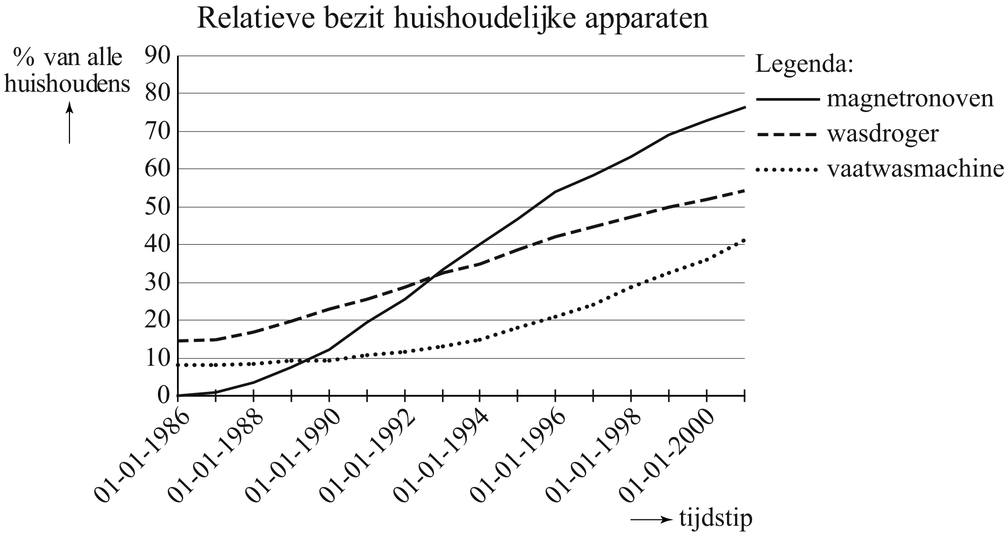
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Huishoudelijke apparaten

In elk huishouden is wel een aantal huishoudelijke apparaten te vinden. Uit een onderzoek van het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) in 2003 blijkt dat het bezit van bijvoorbeeld magnetronovens, wasdrogers en vaatwasmachines sterk toenam in de periode 1986–2001. Zie figuur 1.

figuur 1



Deze opgave gaat over het **relatieve bezit**: het bezit, uitgedrukt als percentage van het totale aantal huishoudens.
In de figuur kun je dus zien dat op 1 januari 1995 ongeveer 40% van de huishoudens een wasdroger bezat.

Op grond van de grafiek kun je concluderen dat er op 1 januari 1998 huishoudens waren die zowel een magnetronoven als een wasdroger bezaten.

3p **1** Leg dat uit.

Uit het onderzoek blijkt dat het relatieve bezit van wasdrogers op 1 januari 1986 14,4% was. Op 1 januari 2001 was het toegenomen tot 54,4%. Omdat uit figuur 1 blijkt dat er sprake is van vrijwel lineaire groei in deze periode, kunnen we voor deze periode aan de hand van deze gegevens de volgende formule opstellen:

$$W = a \cdot t + 14{,}4$$

Hierin is W het relatieve bezit van wasdrogers en t de tijd in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met 1 januari 1986.

3p **2** Laat met een berekening zien dat a afgerond 2,67 is.

Uit het onderzoek blijkt verder dat het relatieve bezit van vaatwasmachines op 1 januari 1986 8,0% was en op 1 januari 2001 41,6%. We gaan ervan uit dat de groei exponentieel verliep.
Met behulp van deze gegevens kun je berekenen dat de jaarlijkse groeifactor die hoort bij het relatieve bezit van vaatwasmachines gelijk is aan (ongeveer) 1,116.

4p **3** Toon aan dat de jaarlijkse groeifactor (ongeveer) 1,116 is.

We kunnen nu voor het relatieve bezit van vaatwasmachines de volgende formule opstellen:

$$V = 8{,}0 \cdot 1{,}116^t$$

Hierin is V het relatieve bezit van vaatwasmachines en t de tijd in jaren, waarbij t = 0 overeenkomt met 1 januari 1986.

We gaan ervan uit dat in de eerste jaren na 2001 het relatieve bezit van wasdrogers en vaatwasmachines zich blijft ontwikkelen volgens de gegeven formules:

$W = 2{,}67 \cdot t + 14{,}4$ en $V = 8{,}0 \cdot 1{,}116^t$

4p **4** Bereken met behulp van de twee formules in welk jaar het relatieve bezit van wasdrogers en vaatwasmachines even groot is.

Koelkasten zijn veel algemener in gebruik in Nederlandse huishoudens dan de apparaten die we eerder in deze opgave bekeken. Het aantal koelkasten is al tientallen jaren gelijk aan 97% van het aantal huishoudens, terwijl het aantal huishoudens al jarenlang lineair stijgt.

Met gegevens van het CBS is voor het aantal huishoudens H (in duizendtallen) de volgende formule opgesteld:

$$H = 69{,}8 \cdot t + 5790$$

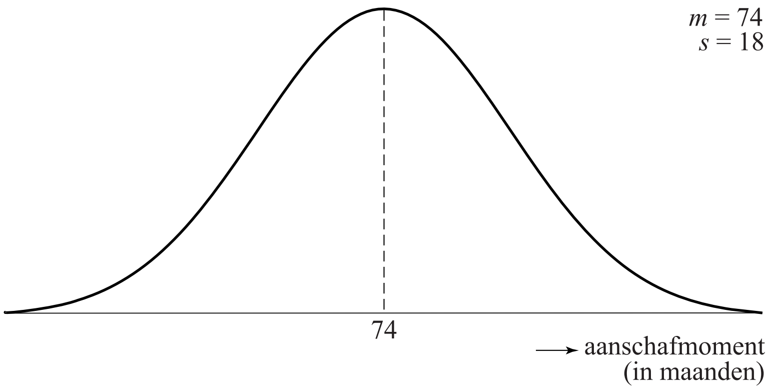
In deze formule is H dus het aantal huishoudens in duizendtallen en t in jaren met t = 0 op 1 januari 1986.
Gebruikmakend van de formule voor H kunnen we een formule opstellen voor het aantal koelkasten K (in duizendtallen), uitgedrukt in t. Deze formule is te herleiden tot $K = a \cdot t + b$.

4p **5** Bereken a en b.

Senseo

Als een nieuw product wordt geïntroduceerd, wordt het meestal niet meteen massaal gekocht.
In figuur 1 is weergegeven hoe de aanschaf van een nieuw product globaal verloopt. Langs de horizontale as staat het zogenoemde aanschafmoment, uitgedrukt in maanden na de introductie van het product op de markt. Het **aanschafmoment** van een product is het tijdstip waarop het product voor de eerste keer wordt aangeschaft.

figuur 1



In het begin is het percentage huishoudens dat dit product voor het eerst aanschaft laag. Daarna neemt het percentage toe. Op een zeker moment is dit percentage maximaal en daarna neemt het weer af.
In de figuur is te zien dat het aanschafmoment van een product bij benadering normaal verdeeld is. Daar is dus te zien dat 74 maanden na introductie 50% van de huishoudens dit product voor het eerst aangeschaft heeft.

Voor het product uit figuur 1 geldt dat het aanschafmoment gemiddeld 74 maanden is met een standaardafwijking van 18 maanden.

4p **6** Toon aan dat voor minder dan 1% van de huishoudens het aanschafmoment 24 maanden of minder is.

In 2001 introduceerden Douwe Egberts en Philips samen een nieuw koffiezetapparaat, de Senseo.

We gaan ervan uit dat de aanschaf van deze Senseo-apparaten in Nederland op een soortgelijke manier verloopt als hierboven is beschreven. Het aanschafmoment van dit apparaat is dus bij benadering normaal verdeeld.
In een artikel staat dat 52 maanden na de introductie van het Senseo-apparaat 45% van de huishoudens in Nederland zo'n apparaat voor de eerste keer heeft aangeschaft.
Na 54 maanden is dat zelfs 50%.

4p **7** Toon aan dat de standaardafwijking van het aanschafmoment ongeveer 16 maanden is.

Het meest succesvolle jaar was het 5e jaar na introductie van het apparaat. Toen schafte maar liefst (ongeveer) 29% van de Nederlandse huishoudens voor het eerst een Senseo-apparaat aan.

3p **8** Bereken dit percentage in één decimaal nauwkeurig.

Meteen na dat jaar werd een telefonische enquête gehouden met daarin vragen over het Senseo-apparaat. Men was vooral benieuwd naar de ervaringen van huishoudens die het apparaat in het voorgaande jaar voor het eerst hadden aangeschaft. De kans op zo'n huishouden is echter slechts 0,29, zo zagen we bij de vorige vraag. Om veel van dergelijke huishoudens aan te treffen, zouden er bij deze enquête behoorlijk wat huishoudens benaderd moeten worden.

In totaal werden willekeurig 50 huishoudens benaderd.

4p **9** Bereken de kans dat minstens 10 van die huishoudens in het voorafgaande jaar voor het eerst een Senseo-apparaat hebben aangeschaft.

Waarom klassenfoto's vaak mislukken

Wanneer je klassenfoto's goed bekijkt, zie je dat er bijna altijd iemand op staat met de ogen dicht. Dit komt doordat het knipperen met de ogen niet bewust gebeurt en het dus ook nauwelijks onderdrukt kan worden.
We nemen in deze opgave het volgende aan:
- iedereen knippert gemiddeld 10 keer per minuut met zijn ogen;
- elke knippering duurt 0,25 seconden;
- elke knippering treedt op een willekeurig moment op.

3p **10** Ga met een berekening na dat iedereen $\frac{1}{24}$ deel van de tijd zijn ogen dicht heeft.

De kans dat een foto van iemand mislukt omdat hij juist de ogen dicht heeft, is dus $\frac{1}{24}$.
In de rest van deze opgave spreken we van een gelukte foto als niemand knippert met de ogen op het moment dat de foto wordt gemaakt.

Van een klas met 25 leerlingen wordt een klassenfoto gemaakt.
3p **11** Ga met een berekening na dat de kans dat de foto lukt ongeveer gelijk is aan 0,345.

De fotograaf vindt 34,5% kans op een geslaagde klassenfoto met 25 leerlingen te klein en maakt daarom meteen een serie van 5 foto's.
4p **12** Bereken de kans dat er minstens één foto lukt.

Om meer zekerheid te hebben op minstens één gelukte foto moeten er meer foto's gemaakt worden.
In de rest van de opgave wordt gestreefd naar een zekerheid van minstens 99%.
Het aantal foto's dat er gemaakt moet worden om 99% zekerheid te hebben op minstens één gelukte foto, kun je berekenen door de volgende vergelijking op te lossen:
Vergelijking 1: $1-(1-(1-\frac{1}{24})^m)^n = 0{,}99$

Hierin is m het aantal mensen dat op de foto gaat en n het aantal foto's dat er gemaakt moet worden.

3p **13** Toon aan dat voor een groep van 50 mensen vergelijking 1 te schrijven is als $1-0{,}881^n = 0{,}99$.

Twee examenklassen gaan een dagje naar Parijs. Bij aankomst wordt er eerst een groepsfoto van de 50 leerlingen gemaakt.
4p **14** Bereken het aantal foto's dat er gemaakt moet worden om minstens 99% zekerheid te hebben op minstens één gelukte groepsfoto.

Voor groepen tot 20 mensen wordt in plaats van vergelijking 1 vaak een eenvoudige vuistregel gebruikt voor het aantal te maken foto's, zodat de zekerheid op minstens één gelukte foto 99% is:

*Deel het aantal mensen door drie en je hebt het aantal te maken foto's***.**

Bij een groep van 18 geeft de vuistregel een aantal dat lager is dan het aantal volgens vergelijking 1.

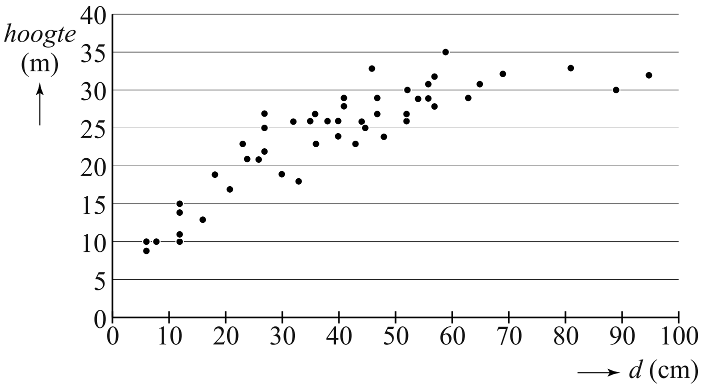
5p **15** Onderzoek hoeveel foto's meer er volgens vergelijking 1 moeten worden gemaakt dan volgens de vuistregel.

Bomen

In het Rodebos in Vlaanderen is door biologen veel onderzoek gedaan. Daarbij werd onder andere gekeken naar hoogte en diameter van de bomen en naar het aantal bomen per hectare.

Van een aantal beuken is het verband tussen de hoogte en de diameter onderzocht. In figuur 1 zijn de gegevens van deze beuken met punten weergegeven.
Je zou misschien verwachten dat hoe dikker de boom, hoe hoger de boom. Uit het onderzoek blijkt dat dit niet het geval is. Vanaf een bepaalde diameter neemt de hoogte van de boom weer af.

figuur 1



Een formule die bij het verband tussen hoogte en diameter past, is:

$$h = -0,0043 \cdot d^2 + 0,662 \cdot d + 6,51$$

Hierin is h de hoogte in meter en d de diameter in cm.
Er is volgens de formule een diameter waarbij de hoogte zo groot mogelijk is. Omdat de formule een kwadratisch verband beschrijft tussen h en d, kunnen we gebruik maken van de volgende regel om de maximale hoogte te berekenen.

Het maximum of minimum van een kwadratisch verband van de algemene vorm $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ bevindt zich bij $x = \dfrac{-b}{2 \cdot a}$.

3p **16** Bereken hiermee de maximale hoogte.

Voor het onderzoek werd het Rodebos in kleine vakken van elk 1 hectare (ha) opgedeeld. In elk vak werd het aantal bomen geteld en de gemiddelde diameter van die bomen berekend.
In onderstaande tabel staan de resultaten van het onderzoek.

tabel 1

gemiddelde diameter (in cm)	14	21	34	38	55	71	77	94
aantal bomen per ha	4590	2380	1090	910	500	330	290	210

Uit nader onderzoek van deze gegevens blijkt dat er een verband bestaat tussen het aantal bomen per ha en de gemiddelde diameter van de bomen. Dit verband is van de volgende vorm:

$$N = c \cdot G^{-1,62}$$

Hierin is N het aantal bomen per ha, G de gemiddelde diameter in cm en c een constante.

3p **17** Bereken c met behulp van tabel 1.

Voor een ander bos geldt een vergelijkbaar verband:

$$N = 290\,000 \cdot G^{-1,59}$$

Ook hier is N het aantal bomen per ha en G de gemiddelde diameter in cm.
Dit bos heeft een oppervlakte van 4 ha. Er staan 12 944 bomen gelijkmatig verdeeld in dit bos.

4p **18** Bereken met behulp van dit verband de gemiddelde diameter van die bomen.

Bingo

Bingo is een populair spelletje: het wordt vaak gespeeld op campings, in sportkantines en in verzorgingstehuizen.
Bij bingo hebben alle spelers een bingokaart. Deze kaarten zijn er in vele soorten; in deze opgave gebruiken we de kaartsoort die in figuur 1 staat.

figuur 1

B	I	N	G	O
1	24	37	48	61
9	17	42	53	68
6	28	☼	60	75
13	25	36	59	74
7	18	31	56	70

In elke kolom staat een aantal getallen in een willekeurige volgorde, waarbij geen enkel getal meer dan één keer voorkomt. Verder geldt het volgende:
- onder de **B** staan 5 getallen uit 1 t/m 15;
- onder de **I** staan 5 getallen uit 16 t/m 30;
- onder de **N** staan 4 getallen uit 31 t/m 45 (en een leeg vakje in het midden);
- onder de **G** staan 5 getallen uit 46 t/m 60;
- onder de **O** staan 5 getallen uit 61 t/m 75.

In figuur 1 staat onder de **B** de kolom 1-9-6-13-7. Andere kolommogelijkheden zijn bijvoorbeeld: 4-1-12-7-3 of 13-7-6-1-9. Een andere volgorde van de getallen betekent dus een andere kolommogelijkheid.

3p **19** Bereken hoeveel verschillende kolommen onder de **B** mogelijk zijn.

Bij bingo wordt er door een spelleider steeds een willekeurig balletje getrokken uit een bak die bij aanvang van het spel 75 balletjes bevat, genummerd van 1 tot en met 75. De spelleider leest steeds het getal op het getrokken balletje hardop voor en legt het balletje weg.
Als het voorgelezen getal op zijn bingokaart voorkomt, zet de speler een kruis door dat getal. Iemand heeft bingo als alle getallen op zijn bingokaart zijn doorgekruist.

Wiskundigen hebben voor een willekeurige bingokaart bij dit bingospel een aantal kansformules opgesteld, waaronder:

$$\text{P(bingo bij de } n^{\text{e}} \text{ trekking)} = \frac{24}{76-n} \cdot \frac{\binom{51}{n-24}}{\binom{75}{n-1}}$$

Voor veel kansvraagstukken wordt ook de volgende formule gebruikt:

$$\text{P(bingo in maximaal } n \text{ trekkingen)} = \frac{\binom{n}{24}}{\binom{75}{24}}$$

Hierbij stelt bijvoorbeeld $\binom{75}{24}$ voor: het aantal combinaties van 24 uit 75.

Dat is ongeveer gelijk aan $2{,}578 \cdot 10^{19}$.

Frédérique weet dat er vaak heel veel trekkingen nodig zijn voordat haar kaart vol is.

De kans dat zij pas bij de laatste trekking bingo heeft, is zelfs behoorlijk groot.

4p **20** Bereken deze kans.

Het gebeurt heel vaak dat Frédérique na 65 trekkingen nog steeds geen bingo heeft. De kans daarop is ruim 98%.

4p **21** Toon dit aan.

Onlangs had Frédérique een excursieweek. Tijdens de heenreis speelde men in de bus enkele malen bingo. Ook toen viel het haar op: zelfs met 40 spelers die elk één kaart hebben, zijn er erg veel trekkingen nodig voordat er een keer bingo valt.
Natuurlijk wist Frédérique (zie de vorige vraag) dat de kans op nog steeds geen bingo na 65 trekkingen bij één speler 0,98 is. Ze had echter verwacht dat er met 40 spelers toch in heel veel gevallen wel bij 65 trekkingen of eerder bingo zou vallen.

4p **22** Bereken de kans dat twee of meer van deze 40 spelers na 65 trekkingen bingo hebben.