

**Examen HAVO**

**2015**

tijdvak 1  
woensdag 20 mei  
13.30 - 16.30 uur

**wiskunde A (pilot)**

Dit examen bestaat uit 21 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 85 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

## Gifgebruik in de aardappelteelt

Het lijkt goed te gaan met het terugdringen van het gifgebruik in de aardappelteelt. Nederlandse aardappelboeren gebruikten in 1998 gemiddeld 32 kg chemische bestrijdingsmiddelen (gif) per hectare (ha). In 2007 was dat gedaald tot 24,5 kg per ha. En het gebruik daalt nog steeds.

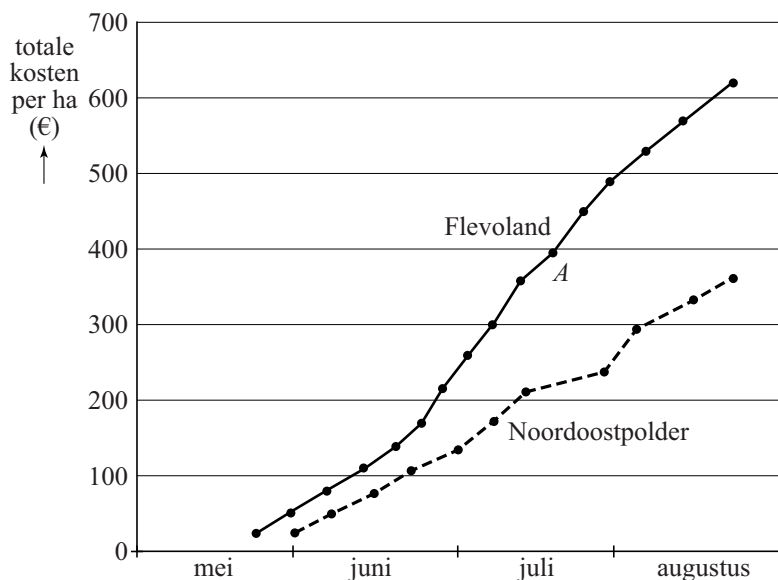
Neem aan dat dit gebruik lineair afnam en ook na 2007 op dezelfde wijze lineair blijft afnemen.

3p 1 Bereken hoeveel kg gif per ha er dan in 2015 gebruikt wordt.

In Nederland zijn aardappelen erg vatbaar voor een agressieve schimmelziekte, de zogenaamde aardappelziekte. Niet-biologische boeren bestrijden deze ziekte door regelmatig, ongeveer één keer per week, gif te spuiten. Biologische boeren gebruiken geen gif, maar verbranden zieke planten of verwijderen ze van het land.

Boer Jacobs is een niet-biologische boer. Hij heeft twee stukken akkerland waarop hij aardappels verbouwt, één in de Noordoostpolder en één in (Zuidelijk) Flevoland. In de figuur zie je een overzicht van het gifgebruik van Jacobs in het jaar 2007 voor beide akkers. Elk punt in de figuur geeft een bespuiting met gif aan. Het punt *A* hoort bijvoorbeeld bij de elfde bespuiting van het seizoen in Flevoland. In de figuur kun je zien dat de totale kosten per ha van alle bespuitingen tot en met deze bespuiting bijna 400 euro zijn.

figuur



Boer Jacobs zegt dat hij in 2007 op zijn akker in Flevoland niet alleen vaker moest spuiten dan in de Noordoostpolder, maar dat ook de gemiddelde kosten per ha per bespuiting hoger waren.

4p 2 Onderzoek of hij gelijk heeft met beide uitspraken.

Boer Jacobs denkt dat hij in Flevoland meer moet spuiten dan in de Noordoostpolder omdat er in Flevoland veel biologische boeren zijn. Zij beginnen pas met de bestrijding als de aardappelziekte al duidelijk zichtbaar is. Hierdoor kan de ziekte zich verspreiden naar akkers van niet-biologische boeren, zodat zij extra gif moeten spuiten. Samen met enkele andere boeren denkt hij dat alle niet-biologische boeren in Flevoland hierdoor ongeveer 20% extra gif moeten spuiten.

In Flevoland werden in 2007 op een oppervlakte van 20 700 ha aardappelen geteeld. Zonder biologische teelt zou gemiddeld 24,5 kg gif per ha aardappelen worden gespoten. In 2007 werd er echter op 680 ha van de 20 700 ha biologisch geteeld.

Neem aan dat het waar is dat in Flevoland door de biologische teelt alle niet-biologische boeren 20% meer gif zouden spuiten. Dan zou er in Flevoland in totaal meer gif worden gebruikt dan in een situatie waarin geen enkele boer zijn aardappels biologisch teelt.

5p **3** Bereken hoeveel procent meer gif er dan in totaal gebruikt zou worden.

Door het kweken van nieuwe aardappelrassen die veel minder gevoelig zijn voor de aardappelziekte, zal in de toekomst de invloed van biologische boeren op het gifgebruik van niet-biologische boeren sterk verminderen.

Steeds meer mensen willen biologisch geteelde aardappelen kopen. Hierdoor neemt in Flevoland het aantal hectaren waarop aardappelen biologisch geteeld worden, vanaf 2007, toen het 680 ha was, exponentieel toe. Hierdoor zal dit aantal hectaren iedere 12 jaar verdubbelen. Neem aan dat de totale oppervlakte voor aardappelen in Flevoland vanaf 2007 gelijk blijft aan 20 700 ha.

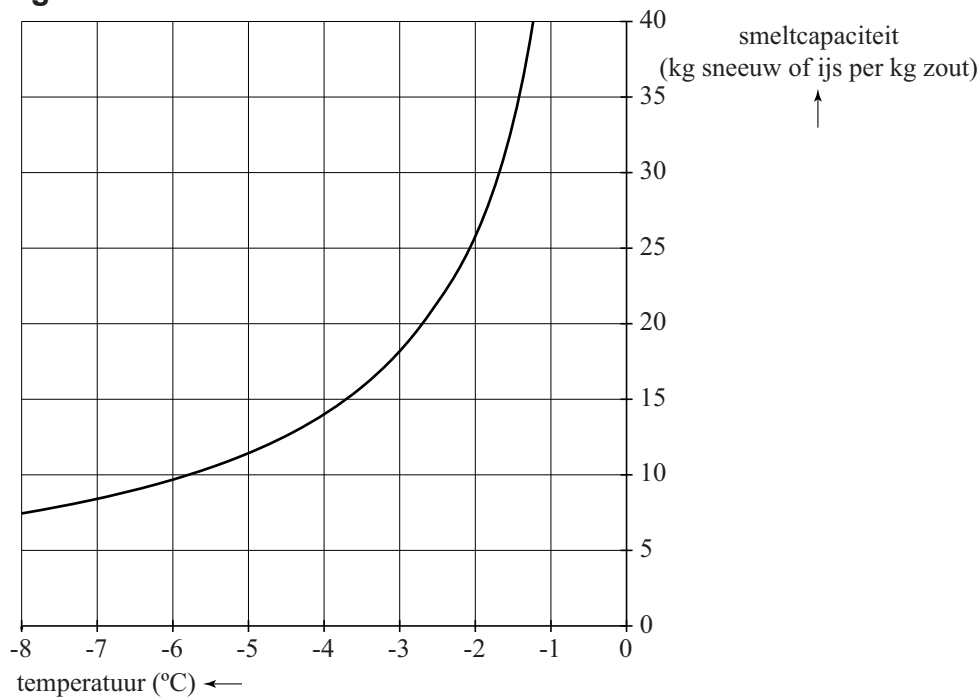
5p **4** Bereken in welk jaar in Flevoland het aantal hectaren biologisch geteelde aardappelen voor het eerst meer dan 10% van de totale oppervlakte voor aardappelen zal zijn.

## Zout strooien

Als in de winter gladheid of sneeuw wordt verwacht, strooit men zout op de wegen. Door zout te strooien, smelten sneeuw en ijs bij een temperatuur lager dan  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Hoeveel sneeuw of ijs er kan smelten, wordt aangegeven met de **smeltcapaciteit**.



figuur



In de figuur is de smeltcapaciteit af te lezen bij verschillende temperaturen. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat 1 kg zout bij een temperatuur van  $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$  ongeveer 11,5 kg sneeuw of ijs laat smelten.

Op een stuk wegdek ligt  $0,2\text{ kg}$  sneeuw per  $\text{m}^2$ . De temperatuur is  $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$  en er wordt zout gestrooid in een dosering van  $15\text{ gram}/\text{m}^2$ .

- 4p 5 Laat met behulp van de figuur en een berekening zien dat deze dosering voldoende is om alle sneeuw te laten smelten.

Bij de grafiek in de figuur past een formule van de vorm

$$S = \frac{\dots}{(-T)^{0,9}}$$

Hierin is  $S$  de smeltcapaciteit in kg sneeuw of ijs per kg zout en  $T$  de temperatuur in  $^{\circ}\text{C}$ .

- 3p 6 Bereken het getal dat op de puntjes moet staan.

De vriespundaling  $V$  is het aantal graden dat het vriespunt van water lager wordt dan  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Met behulp van de volgende formule kan  $V$  worden berekend:

$$V = 3,72 \cdot \frac{D}{58,5 \cdot H}$$

Hierin is  $D$  de dosering van het zout in  $\text{gram}/\text{m}^2$  en  $H$  de hoeveelheid neerslag (in de vorm van sneeuw, ijs of water) in  $\text{kg}/\text{m}^2$ .

Bij  $0,2\text{ kg}$  sneeuw per  $\text{m}^2$  wordt zout gestrooid in een dosering van  $15\text{ gram}/\text{m}^2$ .

- 3p 7 Laat met behulp van de formule zien dat het vriespunt daalt tot beneden  $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Vaak wordt er al gestrooid voordat er sneeuw ligt. Als bekend is hoeveel neerslag er zal vallen en wat de minimumtemperatuur wordt, kan de dosering van tevoren berekend worden.

Bij een vriespundaling van  $4,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  kan de formule zo worden herleid dat  $D$  wordt uitgedrukt in  $H$ .

- 4p 8 Geef deze herleiding.

## Inhalen

Langs de snelwegen en provinciale wegen in Nederland staan hectometerpaaltjes. Deze paaltjes geven de plaats op de weg aan. De afstand tussen de paaltjes is 1 hm ofwel 100 m.

Op een hectometerpaaltje staan onder andere de volgende gegevens:

- het wegnummer (bijvoorbeeld A4 of N148);
- de hectometeraanduiding: dit is de afstand vanaf het begin van de weg in kilometer in één decimaal (bijvoorbeeld 50,8);
- de rijbaanaanduiding voor de hoofdrijbaan: Re (Rechts) of Li (Links);
- de toegestane maximumsnelheid (bijvoorbeeld 80 km per uur).

Om 06:00 uur precies passeert een motorrijder die op de N227 rijdt hectometerpaaltje 0,4. Zie de foto. De motorrijder rijdt 110 km per uur en dat is veel te hard, want op dit stuk weg geldt een maximumsnelheid van 80 km per uur.

foto



- 4p 9 Bereken hoeveel seconden tijdwinst de motorrijder per kilometer maakt door 30 km per uur harder te rijden dan de maximumsnelheid.

Als de motorrijder met een constante snelheid van 110 km per uur rijdt, is er een lineair verband tussen zijn plaats op de N227 en de tijd. Er geldt bij benadering:

$$P_{motor} = 1,83 \cdot t + 0,4$$

Hierin is  $P_{motor}$  de plaats van de motorrijder op de N227 in km en  $t$  de tijd in minuten, met  $t = 0$  om 06:00 uur precies.

- 3p 10 Verklaar hoe de getallen 1,83 en 0,4 in de formule zijn gevonden.

Om 6:00 uur is het niet druk op de weg. Precies 2 minuten eerder dan de motorrijder passeerde een automobilist hectometerpaaltje 0,4 op de N227. Deze automobilist houdt zich keurig aan de maximumsnelheid, zodat de volgende formule bij benadering geldt:

$$P_{auto} = 1,33 \cdot (t + 2) + 0,4$$

Hierin is  $P_{auto}$  de plaats van de auto op de N227 in km en  $t$  de tijd in minuten, met  $t = 0$  om 06:00 uur precies.

Gebruik voor het beantwoorden van de volgende vraag de beide formules.

- 4p 11 Bereken hoeveel hele minuten, gerekend vanaf 6:00 uur, het duurt totdat de motorrijder de automobilist is gepasseerd.

Neem aan dat de motorrijder en de automobilist nog een tijd met dezelfde constante snelheden verder rijden.

Nadat de motorrijder de automobilist is gepasseerd, geldt voor de afstand  $D$  in kilometer tussen de motorrijder en de automobilist een formule van de vorm  $D = a \cdot t + b$ , met  $t$  de tijd in minuten, met  $t = 0$  om 06:00 uur precies.

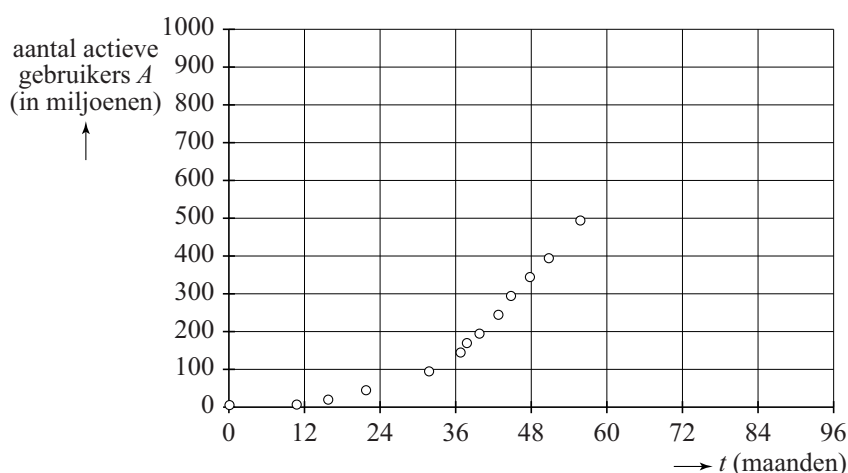
- 4p **12** Geef de herleiding van deze formule voor  $D$  uit de twee gegeven formules.

## Sociaal netwerk

Facebook is een sociaalnetwerksite, opgericht door Mark Zuckerberg in februari 2004. In het begin konden alleen studenten van Harvard College lid worden, later werden ook studenten van andere universiteiten toegelaten. In september 2006 werd Facebook geheel openbaar. Iedereen vanaf 13 jaar, waar ook ter wereld, kreeg de mogelijkheid om zich te registreren en actief gebruik te gaan maken van de site.

Het aantal actieve gebruikers steeg de eerste jaren spectaculair. Zie figuur 1, waarin het aantal actieve gebruikers op verschillende momenten is aangegeven.

figuur 1



Op 1 december 2005, dat is bij  $t = 0$ , waren er 5,5 miljoen actieve gebruikers, 43 maanden later, op 1 juli 2009, waren het er al 244 miljoen. Neem aan dat er in deze periode bij benadering sprake was van exponentiële groei.

4p 13 Bereken voor deze periode het groeipercentage per maand.

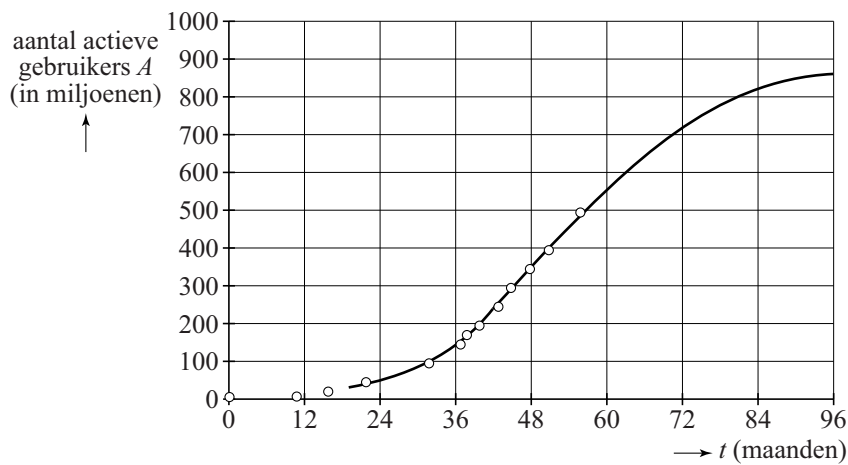
In de maanden na 1 juli 2009 groeide het aantal actieve gebruikers niet meer exponentieel maar bij benadering lineair, van 244 miljoen op 1 juli 2009 tot 493 miljoen op 1 augustus 2010. Er werd in 2011 voorspeld dat de groei zich op deze manier zou voortzetten.

4p 14 Bereken wat het aantal actieve gebruikers volgens deze voorspelling op 1 december 2013 zou zijn.



Het bleek erg optimistisch om aan te nemen dat de groei zich lineair voortzet. Al in 2011 voorspelden sommigen dat de groei verder zou afnemen. In figuur 2 zie je een grafiek die bij deze voorspelling past.

**figuur 2**



Bij deze grafiek hoort de formule:

$$A = \frac{4500}{5 + 310 \cdot 0,926^t}$$

Hierin is  $A$  het aantal actieve gebruikers in miljoenen en  $t$  de tijd in maanden met  $t = 0$  op 1 december 2005.

- 3p **15** Bereken voor welke gehele waarde van  $t$  er volgens de formule voor het eerst meer dan 730 miljoen actieve gebruikers zijn.

Volgens de formule zal het aantal actieve gebruikers blijven stijgen, uiteindelijk nauwelijks meer toenemen en een grenswaarde benaderen.

- 4p **16** Beredeneer aan de hand van de formule dat het aantal actieve gebruikers blijft stijgen en bepaal de grenswaarde.

Sinds 2006 is het bij internationale betalingen binnen Europa verplicht om gebruik te maken van een International Bank Account Number (IBAN).

Voor de invoering van het IBAN had de Postbank (nu onderdeel van de ING Bank) rekeningnummers die in lengte varieerden van 1 tot en met 7 cijfers. Hierbij waren gelijke cijfers toegestaan. Deze rekeningnummers begonnen nooit met een nul.

We kijken eerst naar Postbank-rekeningnummers van precies 7 cijfers. Een deel van deze rekeningnummers bestond uit 7 verschillende cijfers.

- 4p 17 Bereken hoeveel 7-cijferige Postbank-rekeningnummers bestaande uit 7 verschillende cijfers er mogelijk waren.

De rekeningnummers van de Postbank varieerden dus in lengte van 1 tot en met 7 cijfers. Hierbij waren gelijke cijfers toegestaan. Deze rekeningnummers begonnen nooit met een nul.

Een andere bank had alleen 9-cijferige rekeningnummers, die alle begonnen met het cijfer 8. Ook hier waren gelijke cijfers toegestaan. Deze rekeningnummers voldeden aan de zogenoemde elfproef, waardoor slechts één op de elf mogelijke rekeningnummers kon worden gebruikt.

- 5p 18 Onderzoek welke van deze twee banken de meeste rekeningnummers kon uitgeven.

Elk IBAN verwijst naar een unieke bankrekening. Op 1 augustus 2014 is Nederland ook overgegaan op het IBAN voor binnenlandse betalingen.

In Nederland bestaat het IBAN uit 18 tekens:

- Landcode: 2 letters
- Controlegetal: 2 cijfers (indien nodig aangevuld met een voorlooptul)
- Bankidentificatie: 4 letters
- Rekeningnummer: 10 cijfers (indien nodig aangevuld met voorlooptul)

Een voorbeeld van een IBAN:

**NL20 INGB 0001 2345 67**

Hierin is NL de landcode, 20 het controlegetal, INGB de identificatie van de ING Bank en 1234567 het rekeningnummer, voorzien van drie voorlooptul.

De landcodes bestaan bij alle landen uit twee letters.

- 3p 19 Bereken het aantal verschillende landcodes dat in theorie mogelijk is voor een IBAN.

Het controlegetal van het IBAN is nodig om te kunnen controleren of het rekeningnummer dat opgegeven wordt ook daadwerkelijk bestaat.

De procedure om het controlegetal te berekenen staat hieronder.

- 1 Zet bankidentificatie, rekeningnummer en landcode achterelkaar.
- 2 Vervang alle letters door cijfers. Neem hiervoor hun positie in het alfabet vermeerderd met 9. Dus  $A=1+9$ ,  $B=2+9$ , enzovoort.
- 3 Voeg 2 nullen toe aan het eind.
- 4 Trek van dit getal zo vaak mogelijk 97 af totdat er een niet-negatief getal overblijft dat kleiner is dan 97.
- 5 Trek dit overblijvende getal af van 98.
- 6 Dit is het controlegetal, zo nodig tot 2 cijfers aangevuld met een voorloopnul.

Bij het IBAN-voorbeeld NL20 INGB 0001 2345 67 ontstaat op bovenstaande manier in stap 3 het getal 182 316 110 001 234 567 232 100, in stap 4 het getal 78 en in de stappen 5 en 6 het controlegetal 20.

Uit het grote getal dat na stap 3 is ontstaan, kunnen in de stappen 4, 5 en 6 alleen getallen van twee cijfers ontstaan.

- 4p 20 Leg met behulp van de stappen 4, 5 en 6 uit welke controlegetallen niet in het IBAN kunnen voorkomen.

**Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.**

## Wat kost die auto?

Joris ziet een tweedehands auto die € 12 500,- kost. Omdat hij maximaal € 450,- per maand wil uitgeven aan een auto, vraagt hij zich af of hij deze auto wel wil kopen.

Joris wil 6 jaar met deze auto gaan rijden. Volgens een internetsite zal de auto daarna nog € 2750,- opbrengen.

Op het moment van de koop heeft de auto nieuwe banden. De banden van de auto moeten elke 40 000 km vervangen worden. Deze banden kosten € 130,- per stuk.

Voor de garagekosten en het lidmaatschap van een pechhulpdienst rekent Joris € 782,- per jaar.

De verzekeringspremie kost hem € 965,- per jaar.

Joris zal gemiddeld 10 000 km per jaar rijden met de auto. De auto rijdt op benzine. Gemiddeld zal de auto 1 liter per 12 km (1:12) verbruiken. Neem aan dat 1 liter benzine gemiddeld € 1,75 kost.

Joris moet ook motorrijtuigenbelasting betalen. Deze belasting hangt af van het gewicht van de auto en het type brandstof. De auto rijdt op benzine en weegt 1200 kg. Zie de tabel.

**tabel            tarief motorrijtuigenbelasting**

<b>Brandstof</b>	<b>1000 kg</b>	<b>1100 kg</b>	<b>1200 kg</b>
gas	€ 125,- / kwartaal	€ 162,- / kwartaal	€ 198,- / kwartaal
benzine	€ 97,- / kwartaal	€ 119,- / kwartaal	€ 141,- / kwartaal
diesel	€ 223,- / kwartaal	€ 258,- / kwartaal	€ 292,- / kwartaal

Neem aan dat er voor de auto geen andere kosten zijn dan hierboven vermeld en dat de genoemde kosten niet wijzigen in de komende 6 jaar.

Joris heeft precies € 12 500,- op zijn spaarrekening staan. Hij wil daarmee de auto in één keer betalen. Als hij die € 12 500,- op zijn spaarrekening zou laten staan, zou hij jaarlijks 2,5% rente bijgeschreven krijgen. Door de auto in één keer te betalen, loopt hij de renteopbrengst in deze 6 jaar mis.

Joris wil de auto kopen als de totale kosten hiervan maximaal € 450,- per maand zijn. Hij telt alleen de gemiste rente over zijn spaargeld op bij de overige kosten voor de auto.

8p    21    Onderzoek of Joris deze auto wil kopen, aangenomen dat hij de auto over 6 jaar verkoopt voor € 2750,-.