Random close packing

Op een braderie zie je wel eens een glazen pot staan, helemaal gevuld met even grote knikkers. Tegen betaling van een bepaald bedrag mag je raden hoeveel knikkers er in de pot zitten. Degene die het aantal precies raadt of er het dichtst bij zit, wint een prijs.
Uit onderzoek blijkt dat de knikkers ongeveer 64% van de beschikbare ruimte innemen. Dit gegeven maakt het mogelijk een redelijke schatting te geven van het aantal knikkers in de pot. Hiervoor gebruiken we het volgende stappenplan:

- Bepaal de diameter van een knikker en bereken daarmee de inhoud van een knikker.
- Bereken 64% van de inhoud van de glazen pot en deel dit door de inhoud van één knikker. Het afgeronde antwoord is een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.

De inhoud van een knikker is te berekenen met de formule:

$$I_{\text{knikker}} = 0{,}5236 \cdot d^3 \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierin is d de diameter van de knikker in cm en I_{knikker} de inhoud van een knikker in cm^3.

Een glazen pot met een inhoud van 800 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers, die elk een diameter van 1,3 cm hebben.

3p **9** Geef, met behulp van het hierboven beschreven stappenplan en formule 1, een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.

Het stappenplan kan worden vertaald in twee formules:

$$I_{\text{knikker}} = 0{,}5236 \cdot d^3 \qquad \text{(formule 1)}$$

$$K = \frac{0{,}64 \cdot I_{\text{pot}}}{I_{\text{knikker}}} \qquad \text{(formule 2)}$$

De afgeronde waarde van K is het aantal knikkers in de pot en I_{pot} is de inhoud van de glazen pot in cm^3.
Je kunt uit de formules 1 en 2 een formule afleiden voor K, uitgedrukt in I_{pot} en d. Deze formule is van de vorm

$$K = a \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$$

3p **10** Laat zien hoe je deze formule afleidt uit de formules 1 en 2 en rond de waarde van a af op drie decimalen.

Het vullen van een glazen pot met knikkers is een voorbeeld van random close packing. Bij random close packing wordt een hoeveelheid identieke voorwerpen willekeurig in een pot of bak gedaan, waarna er wordt geschud om de beschikbare ruimte zo goed mogelijk op te vullen. Bij bolvormige voorwerpen, zoals knikkers, blijkt dat het gedeelte dat gevuld wordt altijd ongeveer even groot is. Het percentage gevulde ruimte is normaal verdeeld met een gemiddelde van 64,0. In 99,9% van de gevallen ligt het percentage gevulde ruimte tussen de 63,4 en 64,6.

Op grond van bovenstaande gegevens kun je berekenen dat de standaardafwijking van het percentage gevulde ruimte afgerond 0,2 is.

4p **11** Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.

Als je precies weet welk percentage van een pot gevuld is, kun je de volgende formule gebruiken om het aantal knikkers te berekenen:

$$K = 0{,}0191 \cdot p \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3} \qquad \text{(formule 3)}$$

Hierin is p het percentage gevulde ruimte, I_{pot} de inhoud van de glazen pot in cm^3 en d de diameter van de knikkers in cm.

Een glazen pot met een inhoud van 1050 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers met een diameter van 0,95 cm. Het percentage gevulde ruimte p is normaal verdeeld met gemiddelde 64,0 en standaardafwijking 0,2.
Met behulp van deze gegevens kunnen we nu de kans uitrekenen dat er 1500 of meer knikkers in de pot zitten.

5p **12** Bereken deze kans.

Janneke wil op een braderie schatten hoeveel knikkers er in een glazen pot zitten. Ze herkent de glazen pot als een voorraadpot met een inhoud van 1000 cm^3 en schat dat de diameter van de knikkers minimaal 1,5 cm en maximaal 1,7 cm is. Verder gaat ze ervan uit dat het percentage gevulde ruimte minimaal 63,0 en maximaal 65,0 is.

3p **13** Bereken het maximale aantal knikkers dat volgens de schattingen van Janneke in de glazen pot kan zitten. Licht je antwoord toe.