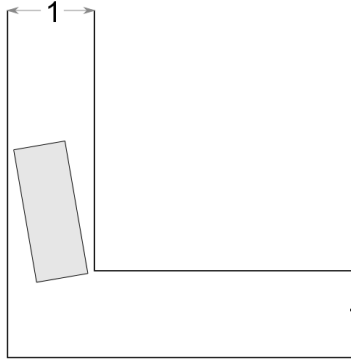


Aan de gang



Wiskunde B-dag 2015, vrijdag 13 november, 9:00u-16:00u



Verkenning 1 (Piano)

Je moet een zware piano verschuiven door een 1 meter brede gang met een rechte hoek er in. In de figuur hierboven zie je de situatie van bovenaf bekeken. Kun je de piano (1,54m lang en 0,60m breed) de hoek om krijgen? Onderzoek dit met bijvoorbeeld een berekening, een tekening of een experiment.

Verkenning 2 (Bankstel)

Een bankstel is van bovenaf gezien een rechthoek van 1,36m lang en 0,78m breed. Kun je het bankstel de hoek om krijgen?

Dit waren twee voorbeelden van rechthoeken waarbij je nu al gezien hebt dat het soms wel, en soms niet lukt om ze door de gang te krijgen, zelfs als ze dezelfde omtrek hebben.

Vandaag ga je het door de gang verplaatsen van objecten nader onderzoeken. De grote vraag is steeds of bepaalde objecten door een 1 meter brede gang met een rechte hoek er in verplaatst kunnen worden. Je kijkt dus in de opgaven van vandaag naar een probleem **in het platte vlak**; je gaat onderzoeken welke tweedimensionale meetkundige vormen (lijnstuk, rechthoek, cirkel, ...) door de gang verplaatst kunnen worden. **De hoogte van de objecten laten we dus buiten beschouwing.** Vanaf nu zeggen we dat de breedte van de gang 1 is (zonder eenheid). Je mag aannemen dat objecten met breedte 1 precies door het rechte deel van de gang passen. Een vierkant met zijde 1 en een cirkel met diameter 1 kunnen dus door de gang worden verplaatst.

Informatie over de Wiskunde B-dag

Structuur van de dag

Deze Wiskunde B-dag opdracht bestaat uit verkenningen, opgaven en een eigen onderzoek. Probeer ongeveer de helft van je dag aan het eigen onderzoek te besteden.

Wat lever je in?

Aan het eind van deze dag lever je een verslag in. Daarin beschrijf je de resultaten die je bij de *opgaven* en het *eigen onderzoek* hebt gevonden. De *verkenningen* hoef je niet op te nemen in je verslag. Vertel je eigen verhaal zó dat het duidelijk en overtuigend is. Uiteraard gebruik je daarbij belangrijke toelichtende figuren als illustraties. Wees begrijpelijk voor anderen die niet aan de Wiskunde B-dag meedoen maar wel voldoende wiskunde beheersen. Dat betekent dat je ook de problemen helder moet introduceren en dat je, waar nodig en nuttig, teruggrijpt op wat je in eerdere opgaven hebt verkend en beargumenteerd.

Kortom: je schrijft een eigen duidelijk verhaal, met wiskundige argumenten onderbouwd. De kwaliteit van je verslag telt zeker ook mee in de beoordeling!

Voor het verslag kan het nuttig zijn om al in de ochtend te beginnen met het uitschrijven van de opgaven en de antwoorden die je gevonden hebt. Bedenk ook dat het gehele verslag om 4 uur 's middags moet worden ingeleverd!

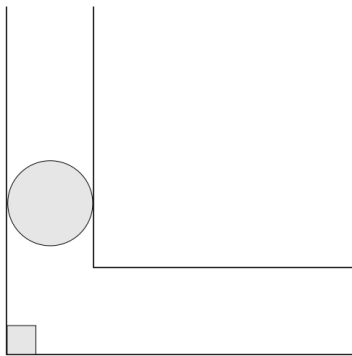
Informatie op Internet

Je zult zien dat er op Internet het een en ander aan informatie te vinden is over dit probleem (bijvoorbeeld <https://nl.wikipedia.org/wiki/Sofaprobleem>). In de opdracht van vandaag ga je echter naar andere vormen dan deze 'sofa' kijken.

Verkenning 3 (Halve cirkelschijf)

- Hoe groot kan de straal van een halve cirkelschijf maximaal zijn zodat je deze nog door de gang kunt krijgen?
 - Beschrijf zo precies mogelijk een beweging om de grootste halve cirkelschijf de gang door te krijgen. Bijvoorbeeld: breng de halve cirkelschijf eerst in positie ..., schuif over afstand ..., draai vervolgens over ... graden om draaipunt ..., etc.
-

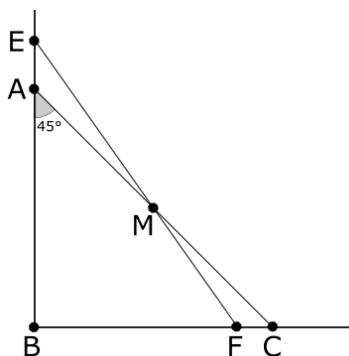
Verkenning 4 (Cirkel)



Een cirkel met een diameter van 1 kan door de gang verplaatst worden. Stel, er staat nu in de hoek een vierkant in de weg (zie figuur). Wat kan de afmeting van het vierkant maximaal zijn, zodat de cirkel er nog langs kan?

Voordat je meer opgaven over het verplaatsen door de gang gaat beantwoorden, eerst twee opgaven die je later vandaag goed van pas kunnen komen.

Opgave 1 (Driehoeksmmeetkunde)

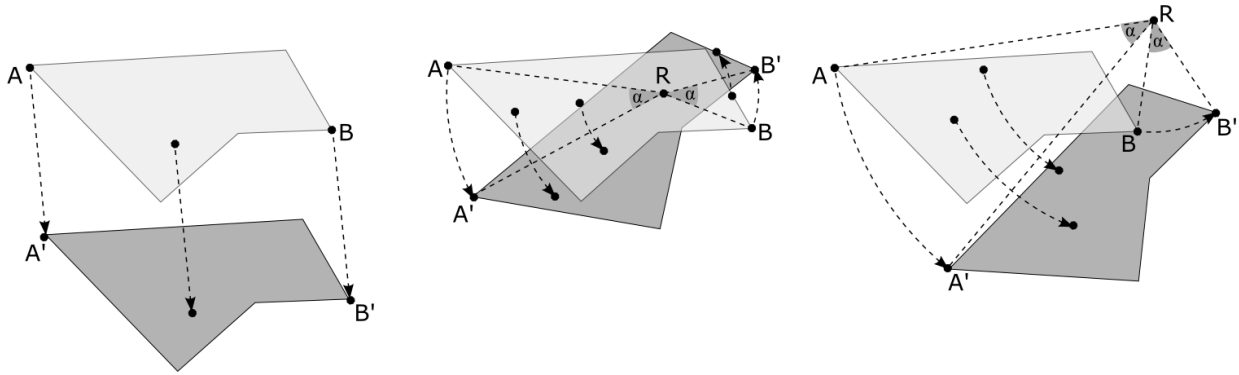


Gegeven is een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC , waarbij M het midden is van AC . Verder is F een punt tussen B en C op de lijn BC en de lijn FM snijdt de lijn AB in het punt E . Toon aan dat lijnstuk EF langer is dan lijnstuk AC .

Opmerking: Ook als het je niet lukt om het te bewijzen kun je het gegeven dat lijnstuk EF langer is dan lijnstuk AC in latere opgaven wel gebruiken.

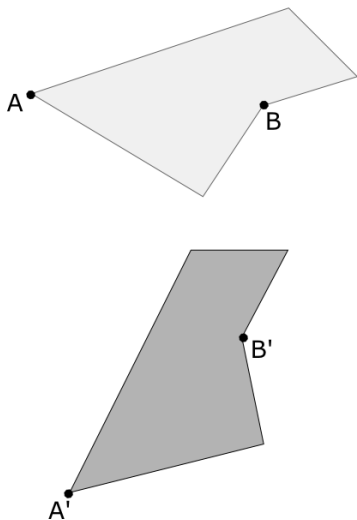
Opgave 2 (Verplaatsingen)

Je kunt objecten verplaatsen door ze parallel te verschuiven (zonder het object te draaien), of te draaien om een centrum (vanaf nu R genoemd). Hieronder zie je een voorbeeld van een parallelle verschuiving en twee voorbeelden van draaiingen. Bij de parallelle verschuiving geldt dat $AA' = BB'$ en dat AA' en BB' parallel zijn. Bij de draaiingen geldt dat $AR = A'R$, $BR = B'R$ en $\angle ARA' = \angle BRB'$.



Merk op: om een parallelle verschuiving te kunnen uitvoeren in de gang met een hoek moeten alle lijntjes (zoals AA' en BB') binnen de gang vallen. Bij de draaiing moeten alle boogjes (zoals AA' en BB') binnen de gang vallen, maar **punt R hoeft niet per se binnen de gang te vallen**.

In de onderstaande figuur kun je ook van de lichte figuur naar de donkere komen via een draaibeweging. Laat zien hoe je het centrum R van de draaibeweging kunt bepalen.

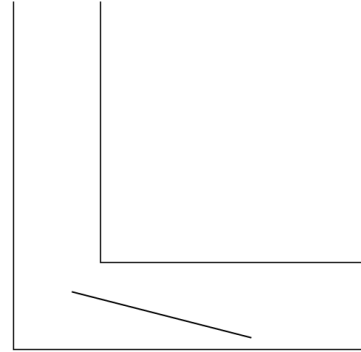


Terug naar het door de gang verplaatsen van objecten...

Opgave 3 (Stokken)

In deze opgave onderzoek je welke stokken je wel om de hoek kan krijgen, en welke niet. Beschouw een stok als een lijnstuk van vaste lengte.

- Probeer experimenteel (met transparant papier of met een tekening) een idee te krijgen van welke stokken wel, en welke stokken niet de hoek om kunnen.
- Met behulp van opgave 1 kun je uitvinden welke stokken zeker niet de hoek om kunnen. Welke zijn dat? Wat is de lengte van de langste stok die nog om de hoek kan?
- Toon aan dat je de langste stok uit vraag b echt de hoek om kunt krijgen, en dat deze niet klem komt te zitten.



Opgave 4 (Strategieën voor de langste stok)

Er zijn verschillende manieren om de langste stok de gang door te krijgen.

- In opgave 2 heb je gekeken naar draaibewegingen. Je kunt de langste stok de hoek om krijgen door één enkele draaibeweging om een punt R . Hoe moet je het draaipunt R van deze draaibeweging kiezen opdat de langste stok op deze manier de hoek om gedraaid kan worden? Geef ook de uitgangspositie van waaruit je de draai kunt beginnen.
Tip: Ga uit van het moment waarbij de uiteinden van de stok de buitenmuren raken en de stok ook de binnenhoek van de muur raakt. Als dit een momentopname van een draaibeweging is, kun je de cirkel vinden die de uiteinden beschrijven.
 - Maak een schets van het gebied dat bij vraag a door de stok wordt bestreken.
 - Je kunt ook een beweging maken waarbij de uiteinden van de stok constant in contact blijven met de buitenmuur van de gang. Beschrijf het pad dat het midden van de stok op deze manier aflegt zo precies mogelijk.
 - Maak ook een schets van het gebied dat bij vraag c door de stok wordt bestreken.
-

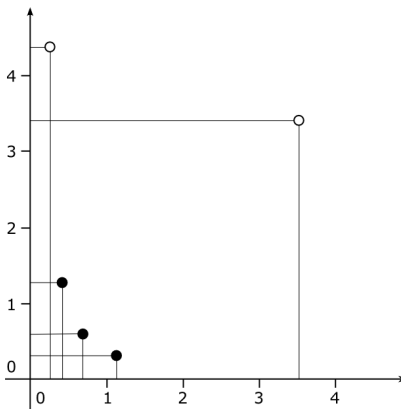
Opgave 5 (Grootste rechthoek)

Je hebt in de eerste twee verkenningen al gekeken naar rechthoeken. In deze opgave zoek je naar de qua oppervlakte grootste rechthoek die je door de gang kunt krijgen.

- Wat is de oppervlakte van de grootste rechthoek, waarbij de kortste zijde van de rechthoek 0,5 is, die nog door de gang verplaatst kan worden?
 - Onderzoek de afmetingen van de rechthoek met de grootste oppervlakte die je door de gang kunt krijgen door middel van schuiven én draaien. De kortste zijde hoeft dus niet meer 0,5 te zijn.
 - Toon aan dat de rechthoek die je bij vraag b gevonden hebt ook echt door de gang kan en niet klem komt te zitten.
-

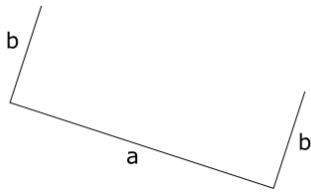
Opgave 6 (Alle rechthoeken)

Je hebt zojuist al onderzoek gedaan naar de grootste rechthoek die door de gang verplaatst kan worden. Maar hoe zit het met alle andere rechthoeken? In de onderstaande figuur zie je een coördinatenstelsel. Daarin zijn vijf rechthoeken zo getekend dat ze met een zijde op de x -as en met een zijde op de y -as liggen. De rechterbovenhoeken van de rechthoeken zijn zwart als de bijbehorende rechthoek door de gang past en wit als dat niet lukt.



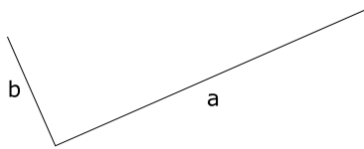
- Waar ligt de grens tussen zwarte en witte punten?
 - Welke formules horen bij de grens tussen zwarte en witte punten?
-

Opgave 7 (U-vorm)



Aan de langste stok kun je op de uiteinden loodrecht twee extra rechte stukken vastmaken, zodat je een soort U-vorm krijgt. Onderzoek de grootste lengte van zo'n U-vormige stok (lengte $a + 2b$ in de figuur) die nog door de gang verplaatst kan worden.

Opgave 8 (L-vorm)



In deze opgave bekijk je een stok met één rechte knik er in (een L-vorm). Wat is de langste stok (lengte $a + b$ in de figuur) die nog door de gang verplaatst kan worden?

Eigen onderzoek

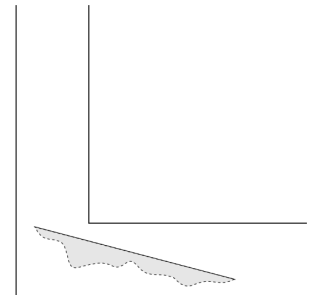
Je hebt in de opgaven tot nu toe al veel ontdekt over objecten die al dan niet door de gang verplaatst kunnen worden. Wist je dat het zelfs een **onopgelost** probleem is wat nu het grootste object is dat je door de gang kunt krijgen?

In dit gedeelte ga je meer onderzoek doen aan objecten die door de gang verplaatst kunnen worden. Je kiest zelf wat je gaat onderzoeken. Je mag dus ook kiezen voor een vorm die nog niet eerder aan bod is gekomen in de opgaven. Vragen die je jezelf hierbij kunt stellen kunnen gaan over:

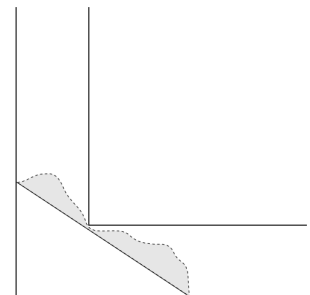
- maximale lengte of oppervlakte van het object,
- verschillende strategieën om het object door de gang te krijgen,
- het gebied dat het object tijdens het verplaatsen bestrijkt.

Je kunt ook verder bouwen op het onderzoek dat je tot nu toe hebt gedaan. Hieronder staan enkele suggesties. Je kunt uit deze suggesties kiezen, of je kunt je er door laten inspireren om zelf tot een ander idee te komen:

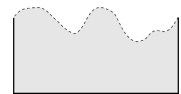
- Stel, de langste stok wordt door de gang verplaatst zoals in opgave 4a. Aan de stok kun je nog een hoop oppervlak richting de buitenmuren toevoegen, dat niet echt in de weg zit (zie figuur). Als de stok niet maximaal is, misschien nog wel meer! Onderzoek dit.



- Stel, de langste stok schuift met de uiteinden langs de buitenmuren, zoals in opgave 4c. Aan de stok kun je nog een hoop oppervlak richting de binnenkant van de hoek toevoegen, dat niet echt in de weg zit (zie figuur). Als de stok niet maximaal is, misschien nog wel meer! Onderzoek dit.



- Stel, je hebt een U-vorm zoals in opgave 7. Aan de binnenkant van de U kun je nog best wel wat oppervlak toevoegen (zie figuur). Als nu de rechte achterkant van de U langs de buitenmuren door de gang wordt geschoven, hoeveel oppervlak kun je dan nog toevoegen aan de binnenkant van de U? Bekijk bijvoorbeeld eerst het geval waar de rechte achterkant niet langer dan twee keer de breedte van de gang is. Kun je ook – wellicht experimenteel – de vorm vinden als de achterkant langer is?



- Vind een tweedimensionaal object dat de hoek om kan door één enkele draaibeweging (zoals in opgave 4a).