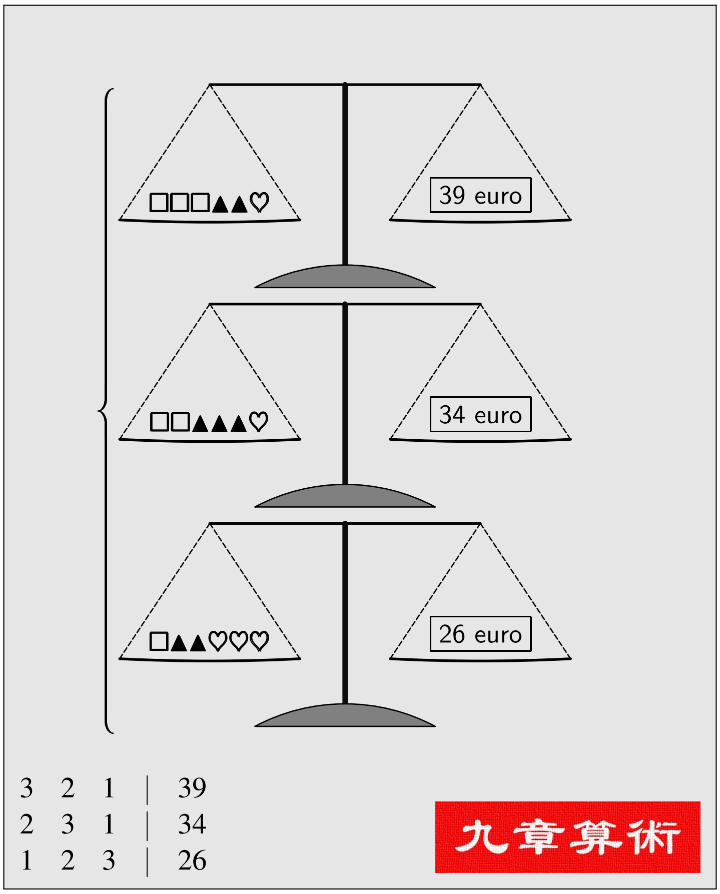
Stelsels van eerstegraadsvergelijkingen

Wilfried Van Hirtum

Versie 1.06 - 11 november 2014



Bronvermelding

De computertekening *Apples and Oranges* (zie figuur 5 op pagina 31) is met dank ontleend aan W. Hart (http://www.georgehart.com).

De afbeeldingen van het achtvlak, het twintigvlak en het twaalfvlak op pagina **??** en verder zijn met dank ontleend aan Dick Klingens http://www.pandd.demon.nl. Het copyright van deze afbeelding valt onder de *Creative Commons licentie* http://creativecommons.org/licenses/by-nc/2.5/nl/.)

Voorwoord

An idea which can be used once is a trick.
If it can be used more than once it becomes a method.

— George Pólya and Gábor Szegö

Denn es ist ausgezeichneter Menschen unwürdig,
gleich Sklaven Stunden zu verlieren mit Berechnungen.

— Gottfried Willhelm von Leibniz

Je leert in dit boekje stelsels oplossen met een methode die al gebruikt werd circa 200 BCE door Chinezen.

Vandaag heet deze methode de *eliminatietechniek van Gauss*. We beginnen met de methode uit te voeren met pen en papier alleen. Nadien stappen we over naar elektronische hulpmiddelen om stelsels op te lossen, om ons volledig te concentreren op het mathematiseren van toepassingen.

Wilfried Van Hirtum

九章算術

Jiuzhang Suanshu
(*Negen hoofdstukken over wiskunde*)

Inhoudsopgave

1 Een voorbeeld

Kim gaat elke maand drank kopen in een drankencentrale in een dorp. Kim krijg er nooit eenheidsprijzen te zien, er wordt alleen gezegd hoeveel de totaalprijs is. Kim wordt daar behoorlijk nieuwsgierig van en zou wel eens willen weten wat een bak fruitsap, een bak water en een bak halfvolle melk kost.

Kim gebruikt drie totaal verschillende bestellingen om dit uit te vissen, en gaat er van uit dat de eenheidsprijzen voor de drie bestellingen dezelfde blijven.

> Een bak fruitsap, een bak water en een bak melk kosten samen 30,95 euro. Twee bakken fruitsap, een bak water en een bak melk kosten samen 44,55 euro. Twee bakken fruitsap, drie bakken water en vier bakken melk kosten samen 91,25 euro.

In tabelvorm:

Fruitsap	Water (Aantal bakken)	Melk	Totaalprijs (euro)
1	1	1	30,95
2	1	1	44,55
2	3	4	91,25

1.1 Zonder rekenmachine

1 Kun jij de prijzen uitvissen, zonder gebruik van een grafische rekenmachine?

1.2 Met een grafische rekenmachine

Er zijn drie onbekenden:

- x: de prijs van een bak fruitsap
- y: de prijs van een bak water
- z: de prijs van een bak melk

Het 3×3-stelsel:

$$\begin{cases} x + y + z = 30,95 \\ 2x + y + z = 44,55 \\ 2x + 3y + 4z = 91,25 \end{cases}$$

Je kunt het stelsel ook noteren als een matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{O} \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 30,95 \\ 44,55 \\ 91,25 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{C} \times \mathbf{O} = \mathbf{B} \tag{1}$$

De matrix **C** is de matrix van de coëfficiënten, de matrix **O** bevat de onbekenden x, y en z, en de matrix **B** is een kolommatrix met de drie bekende termen.

Beide leden van vergelijking (1) *links* vermenigvuldigen met de inverse matrix $\mathbf{C}^{-1}$ geeft de oplossing:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} \times \mathbf{O} &= \mathbf{B} \\
\mathbf{C}^{-1} \times \mathbf{C} \times \mathbf{O} &= \mathbf{C}^{-1} \times \mathbf{B} \\
\mathbf{O} &= \mathbf{C}^{-1} \times \mathbf{B} \\
\mathbf{O} &= \begin{bmatrix} 16,60 \\ 5,35 \\ 12,00 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Een bak fruitsap kost dus 13,60 euro, een bak water kost 5,35 euro, en een bak melk kost 12,00 euro.

Met behulp van de grafische rekenmachine is de oplossing snel te berekenen:

GRM

Vul de coëfficiëntenmatrix **C** met de coëfficiënten in.

Vul de kolommatrix **B** met de bekende termen in.

Bereken het product $\mathbf{C}^{-1} \times \mathbf{B} \rightarrow \begin{bmatrix} 16,60 \\ 5,35 \\ 12,00 \end{bmatrix}$

Opmerking: deze methode werkt alleen omdat het stelsel vierkant is (evenveel vergelijkingen als onbekenden) en omdat de matrix **C** regulier is (de inverse matrix $\mathbf{C}^{-1}$ bestaat).

De matrix **C** is echter niet altijd inverteerbaar. Bovendien zijn niet alle stelsels vierkant. We gaan dus op zoek naar een meer algemene methode om stelsels van eerstegraadsvergelijkingen op te lossen.

1.3 De uitgebreide matrix

Hier is een voorbeeld van een 3×3-stelsel:

$$\begin{cases} x + y + z = 30,95 \\ 2x + y + z = 44,55 \\ 2x + 3y + 4z = 91,25 \end{cases}$$

Het stelsel geschreven als een matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{O} \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 30,95 \\ 44,55 \\ 91,25 \end{bmatrix} \end{array}$$

De 3×3-matrix $\mathbf{C}$ is de matrix van de coëfficiënten:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Als we de kolom van de bekende termen aan de matrix $\mathbf{C}$ toevoegen, krijgen we de uitgebreide matrix van het stelsel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 30,95 \\ 2 & 1 & 1 & | & 44,25 \\ 2 & 3 & 4 & | & 91,25 \end{bmatrix}$$

De uitgebreide matrix heeft een kolom meer dan $\mathbf{C}$ en is dus een 3×4-matrix.

We zeggen dat het stelsel een 3×3-stelsel is: de eerste 3 slaat op het aantal vergelijkingen, de tweede 3 geeft het aantal onbekenden weer.

2 Schrijf de uitgebreide matrix dat bij het volgende stelsel hoort:

$$\begin{cases} 5y + 3x + 10 = 3z + 2x + 30 \\ 5z = 70 \\ 3x + 2y + z = x - y \end{cases}$$

3 Schrijf het stelsel dat bij de volgende uitgebreide matrix hoort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 13 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17 \end{bmatrix}$$

1.4 Een Chinese methode

De oudste opgeschreven analyse van gelijktijdige vergelijkingen is gevonden in het Chinese boek *Jiuzhang Suanshu* (Negen hoofdstukken over wiskunde) van ongeveer 200 jaar BCE ten tijde van de Han-dynastie. In het begin van hoofdstuk acht verschijnt een probleem van de volgende vorm:

> Drie zakken graan van eerste kwaliteit, twee van middelmatige kwaliteit en een van slechte kwaliteit worden verkocht voor 39 dou. Voorts worden twee zakken graan van eerste, drie van middelmatige kwaliteit en een van slechte kwaliteit verkocht voor 34 dou. Tenslotte worden

een zak van eerste, twee van middelmatige en drie van slechte kwaliteit verkocht voor 26 dou. Welke prijs krijgt men voor elke zak van eerste, middelmatige en slechte kwaliteit?

Vandaag zouden wij het probleem formuleren als volgt (waarbij x, y en z de prijs voorstellen van een zak van respectievelijk eerste, middelmatige en slechte kwaliteit):

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases} \tag{2}$$

De Chinezen ten tijde van de Han-dynastie noteerde dit probleem al met behulp van een *tabel*, bijna op dezelfde manier als wij het vandaag doen:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}$$

De oplossing volgens het boek *Jiuzhang Suanshu* gaat als volgt: vermenigvuldig alle getallen uit de tweede rij met $\boxed{3}$, en alle getallen van de eerste rij met 2, maak dan het verschil van deze twee rijen. Je ziet nu dat in de tweede en de derde rij een nul verschijnt.

$$\begin{array}{ccc|cc} \boxed{3} & 2 & 1 & 39 & \times\mathbf{2} \\ \mathbf{2} & 3 & 1 & 34 & \times\boxed{3} \\ 1 & 2 & 3 & 26 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{78} \\ \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{3} & \mathbf{102} \\ \ldots & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 78 \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{24} \\ \ldots & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} \boxed{3} & 2 & 1 & 39 & \times\mathbf{1} \\ 2 & 3 & 1 & 34 & \\ \mathbf{1} & 2 & 3 & 26 & \times\boxed{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{39} \\ \ldots & & & \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{78} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ \ldots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{39} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 2 & 1 & 39 \\ \mathbf{0} & 5 & 1 & 24 \\ \mathbf{0} & 4 & 8 & 39 \end{array}$$

We gebruiken nu de tweede rij als spilrij om nog een nul te bekomen:

$$\begin{array}{ccc|cl} 3 & 2 & 1 & 39 & \\ 0 & \boxed{5} & 1 & 24 & \times\mathbf{4} \\ 0 & \mathbf{4} & 8 & 39 & \times\boxed{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & \mathbf{20} & \mathbf{4} & \mathbf{96} \\ 0 & \mathbf{20} & \mathbf{40} & \mathbf{195} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 20 & 4 & 96 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{36} & \mathbf{99} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ \mathbf{0} & \boxed{5} & 1 & 24 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 36 & 99 \end{array}\right]$$

De uitgebreide matrix is een *bovendriehoeksmatrix* geworden, en dus geschikt om de oplossing van het stelsel te berekenen. Je kunt de waarde van z berekenen uit de onderste vergelijking:

$$\begin{aligned} 36z &= 99 \\ z &= \frac{99}{36} = 2,75 \end{aligned}$$

Je kunt vervolgens deze waarde van z invullen in de voorlaatste vergelijking, en op die manier de waarde van y berekenen:

$$\begin{aligned} 5y + 2,75 &= 24 \\ y &= \frac{24 - 2,75}{5} = 4,25 \end{aligned}$$

Door telkens de reeds gevonden waarden voor de onbekenden van onder naar boven in te vullen, komt de oplossing tevoorschijn:

$$\begin{aligned} 3x + 2 \times 4,25 + 2,75 &= 39 \\ x &= \frac{39 - 2 \times 4,25 - 2,75}{3} = 9,25 \end{aligned}$$

Besluit: $x = 9,25$, $y = 4,25$ en $z = 2,75$, of de eenheidsprijzen van de drie soorten graan zijn respectievelijk 9,25 dou, 4,25 dou en 2,75 dou.

Deze Chinese telbordtechnieken en vuistregels vonden hun weg naar Japan en verschenen later ook in Europa, waarbij de gekleurde bamboestokjes (zwart voor positieve getallen, en rood voor negatieve getallen) vervangen werden door cijfers en het rekenbord door pen en papier.

In Europa werd deze techniek bekend als de *eliminatiemethode van Gauss* naar de Duitse wiskundige Carl Gauss. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) is volgens velen de grootste wiskundige die ooit heeft geleefd. Zijn bijnaam is: ‘Prins van de wiskundigen’. Hij maakte veel gebruik van deze methode. Daardoor werd de eliminatietechniek zeer populair.

Figuur 1 – Carl Friedrich Gauss op een Duits bankbiljet uit 1991 (`http://www.schulmodell.de/mathe/banknoten/`)

De eliminatietechniek van Gauss kan echter nog verfijnd worden, zodat de fase van het onder naar boven invullen van de reeds gevonden onbekenden niet meer nodig is.

Deze techniek staat bekend als de *eliminatietechniek van Gauss-Jordan*. Het betreft hier de Duitse landmeter en wiskundige Wilhelm Jordan (1842-1899).

De eliminatietechniek van Gauss stopt bij een bovendriehoeksmatrix:

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & 2 & 1 & | & 39 \\ \mathbf{0} & \boxed{5} & 1 & | & 24 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{36} & | & 99 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x & = (39 - 2 \times 4,25 - 2,75)/3 = 9,25 \\ y & = (24 - 2,75)/5 = 4,25 \\ z & = 99/36 = 2,75 \end{cases}$$

De eliminatietechniek van Gauss-Jordan gaat verder tot een diagonaalmatrix, zodat de oplossing direct zichtbaar is (maar kost meer berekeningen):

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & 9,25 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & \mathbf{0} & | & 4,25 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & | & 2,75 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x = 9,25 \\ y = 4,25 \\ z = 2,75 \end{cases}$$

4 Zoek door middel van achterwaartse substitutie de oplossing van het stelsel:

$$\begin{cases} 5x + 3y + z = 96,05 \\ 2y + 3z = 46,70 \\ 4z = 48 \end{cases}$$

5 Zoek door middel van achterwaartse substitutie de oplossing van het stelsel:

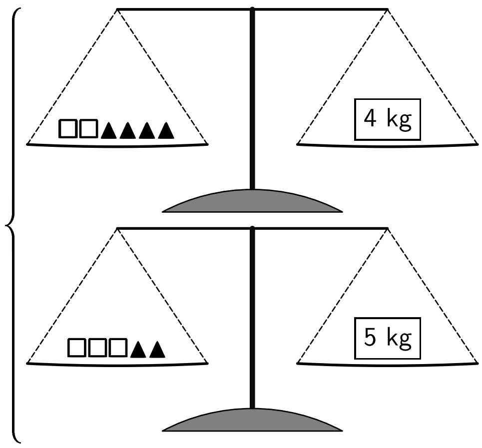
$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d = 58 \\ 5b - 2c + 3d = -23 \\ -c + 5d = -7 \\ 2d = 4 \end{cases}$$

6 Zoek door middel van achterwaartse substitutie de oplossing van het stelsel, waarvan de uitgebreide matrix gegeven is (de onbekenden zijn a, b , c en d):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

7 Veronderstel dat alle blokjes (◽) — op beide weegschalen — evenveel wegen en dat alle driehoekjes (▲) ook evenveel wegen. Driehoekjes hebben echter een ander gewicht dan blokjes. Beide weegschalen zijn in evenwicht. Hoeveel weegt dan een ◽ en hoeveel weegt een ▲?

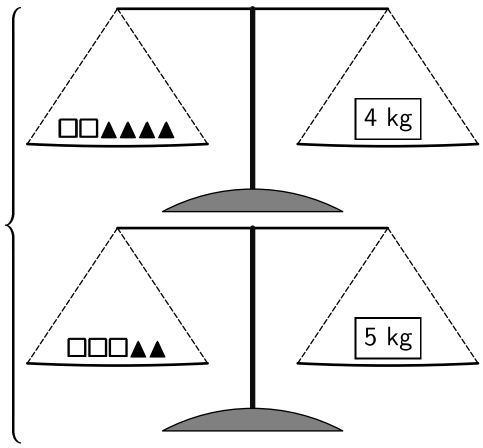
Zoek de oplossing met behulp van de Chinese eliminatietechniek.



2 Drie soorten stelsels

2.1 Bepaald stelsel

Voorbeeld:



Stel x het gewicht van een □ en y het gewicht van een ▲.

$$\begin{cases} 2x+4y=4 \\ 3x+2y=5 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right] \end{array}$$

Links staat een 2×2-stelsel van twee eerstegraadsvergelijkingen in twee onbekenden (x en y). Rechts staat de uitgebreide matrix van het stelsel. Voor de verticale streep staan de coëfficiënten van x en y, en na de verticale streep staan de *bekende* termen.

De eerste rij (2 4 | 4) van de uitgebreide matrix van het stelsel leest dus als volgt:

> "Het gewicht van twee □ en vier ▲ is samen vier kilogram."

8 Hoe moet je de tweede rij (3 2 | 5) van de uitgebreide matrix lezen?

Bedenk dat x in *beide* vergelijkingen *hetzelfde* gewicht voorstelt. Ook y stelt in beide vergelijkingen hetzelfde gewicht voor. Beide vergelijkingen moeten dus *gelijktijdig* voldaan zijn. Beide vergelijkingen horen dus samen, vandaar de accolade die ze samen houdt. We spreken van een *stelsel* van twee vergelijkingen.

We beschikken over twee vergelijkingen om achter de twee onbekenden te komen. Dit is in het algemeen zo: om de waarde van een aantal onbekenden te vinden, moet je beschikken over evenveel stukjes informatie, dus over evenveel vergelijkingen.

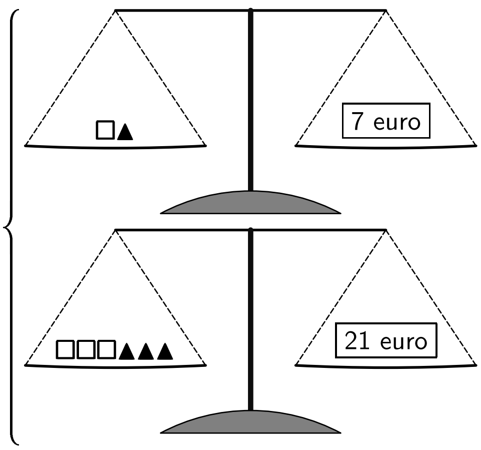
In het algemeen heb je *evenveel* vergelijkingen nodig als er onbekenden zijn.

Deze vergelijkingen moeten *onafhankelijk* van elkaar zijn.

Een vergelijking is onafhankelijk van de andere vergelijkingen als ze niet kan afgeleid worden uit de andere vergelijkingen door middel van optelling of veelvouden.

2.2 Onbepaald stelsel

Voorbeeld:



$$\begin{cases} x+y=7 \\ 10x+10y=70 \end{cases}$$

Deze vergelijkingen zijn *niet* onafhankelijk van elkaar. De tweede vergelijking is een veelvoud van de eerste, en is dus overbodig. Je kunt de tweede vergelijking evengoed schrappen. Je houdt maar één vergelijking over. Het enige dat je weet is dat de som van x en y zeven is. Daarmee kun je de waarde van x en y niet eenduidig bepalen.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ \cancel{10x+10y=70} \end{cases}$$

Er zijn nog *vele* mogelijke oplossingen. Bijvoorbeeld (3, 4). (3, 4) betekent een oplossing waarbij $x = 3$ en $y = 4$.

Maar (0, 7) is ook een oplossing, en ook (-2,5; -4,5) is een oplossing.

In feite zijn er *oneindig* veel oplossingen.

> Een stelsel met oneindig veel oplossingen noemen we een *onbepaald stelsel*.
>
> Na het schrappen van de overbodige vergelijkingen schieten er *minder* vergelijkingen over dan het aantal onbekenden.

Nog een voorbeeld van een onbepaald stelsel: $\begin{cases} b=a+2 \\ c=a+4 \\ d=a+6 \end{cases}$

Enkele oplossingen: $(1,3,5,7)$, $(-1,1,3,5)$, $(0,2,4,6)$, $(100,102,104,106)$. Er zijn oneindig veel oplossingen: kies zelf een waarde voor a, en zorg ervoor dat b twee meer is dan a, dat c nog meer twee meer is dan b en dat d nog meer twee meer is dan c.

2.3 Vals stelsel

In sommige gevallen kan het nog erger zijn, namelijk als een vergelijking in tegenspraak is met de andere vergelijkingen. In dat geval heeft het stelsel *geen* oplossing.

Zo'n stelsel noemen we een *vals* stelsel. Een voorbeeld: $\begin{cases} x+y=7 \\ 10x+10y=20 \end{cases}$ Dit stelsel is duidelijk vals, want als de som van x en y gelijk is aan 7, dan moet de som van tien keer x en tien keer y gelijk zijn aan 70, en niet aan 20.

> Een vals stelsel is een stelsel dat leidt tot een *tegenspraak*.
>
> Een vals stelsel heeft *geen oplossingen*.

2.4 Het soort stelsel bepalen

Het is de bedoeling om twee vragen te kunnen beantwoorden voor een gegeven stelsel van eerstegraadsvergelijkingen:

- Welke van deze drie mogelijkheden is het geval? Met andere woorden: hoe kunnen we nu weten of vergelijkingen van elkaar onafhankelijk zijn, en er dus geen overbodige informatie gegeven wordt, of elkaar tegenspreken? Of nog met andere woorden: *hoeveel* oplossingen heeft een stelsel?
- Hoe bereken je de eventuele oplossingen?

De eliminatiemethode van Gauss-Jordan is een stuk gereedschap waarmee je *beide* vragen ineens kunt beantwoorden. Deze methode zorgt er automatisch voor dat overbodige vergelijkingen geschrapt worden en dat tegenspraken boven water komen. In de laatste stap van de methode vind je de oplossingen.

De eliminatiemethode van Gauss-Jordan is een proces waarbij systematisch de vergelijkingen van een stelsel worden omgevormd tot een gelijkwaardig stelsel van eenvoudiger vergelijkingen. Twee stelsels zijn *gelijkwaardig* als ze dezelfde oplossingen hebben.

2.5 Opdrachten

9 Kan een stelsel van eerstegraadsvergelijkingen precies vier oplossingen hebben?

10 Van welke soort zijn de volgende stelsels:

1

$$\begin{cases} a=11 \\ b=13 \\ c=15 \\ d=17 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} a=11 \\ a+b=11 \\ a+c=15 \\ a+d=17 \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} a+b=11 \\ a-b=11 \end{cases}$$

4

$$\begin{cases} 3a-5b=11 \\ 6a-10b=20 \end{cases}$$

11 Wat verstaat men onder *gelijkwaardige* stelsels?

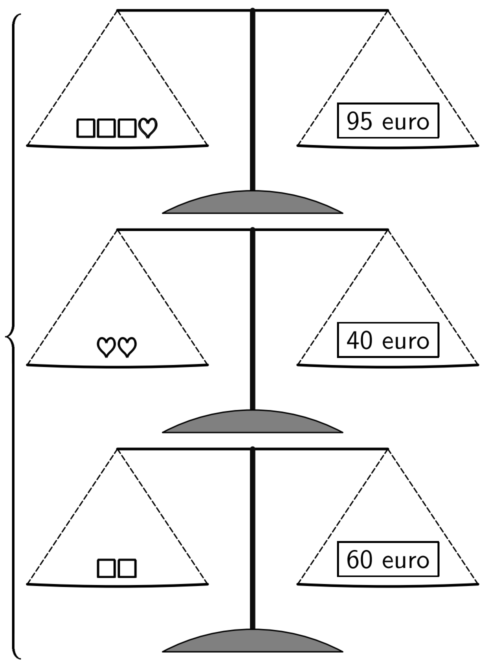
- stelsels met evenveel vergelijkingen;
- stelsels met evenveel onbekenden;
- stelsels met dezelfde oplossingen.

12 De oplossing van een stelsel is $(3,4;5)$. Dit stelsel heeft:

- één oplossing;
- twee oplossingen;
- drie oplossingen.

13 Hoe ziet een 2×4-stelsel er uit?

14 Welk soort stelsel wordt hier voorgesteld?



15 Los de volgende stelsels op met de spilmethode (met pen en papier).

$$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ -x-2y+3z=1 \\ 3x-7y+4z=10 \end{cases}$$
(1)

$$\begin{cases} 3x+4y+1=0 \\ x-3y-4=0 \end{cases}$$
(2)

$$\begin{cases} 3x-4y=11 \\ 5x-2y+5=0 \end{cases}$$
(3)

$$\begin{cases} 4x=y \\ 4y=5+6x \end{cases}$$
(4)

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5y=x \end{cases}$$
(5)

$$\begin{cases} 2x+3y=3+z \\ 3x+2y+z=5 \\ 4x+z=3+y \end{cases}$$
(6)

$$\begin{cases} 4x+2y+1=3z \\ x+2y+z=1 \\ 7x+8y+z=2 \end{cases}$$
(7)

$$\begin{cases} x+y=3+z \\ 3x+z=4+2y \\ 6x+y=13+z \end{cases}$$
(8)

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=5 \\ x+y+z=35 \\ 2x+4y+z=50 \end{cases}$$
(9)

$$\begin{cases} 2x+3y=z-5 \\ x+y=8 \\ x=-z \end{cases}$$
(10)

1 (3, 1 2)
2 (1, -1)
3 (-3, -5)
4 (0,5; 2)
5 $(\frac{5}{13}, \frac{1}{13})$
6 (0,7; 0,9; 1,1)
7 $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 0)$
8 (2, 1, 0)
9 (7,5; 2,5; 25)
10 vals stelsel: geen oplossing

3 De gereduceerde vorm

De eliminatiemethode van Gauss-Jordan eindigt steeds op een uitgebreide matrix van de *gereduceerde vorm*.

De gereduceerde vorm van de uitgebreide matrix is een matrix waarbij er precies *evenveel* hoofdelementen als rijen zijn.

Een voorbeeld:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{3}$$

- Een *hoofdelement* is een coëfficiënt in een geveegde kolom. De hoofdelementen moeten in *verschillende rijen* staan. Een hoofdelement is gelijk aan 1.
- Een *geveegde kolom* is een kolom van coëfficiënten, waarvan slechts één coëfficiënt verschillend van nul is. De overige coëfficiënten in die kolom zijn dus nul. Vandaar de omschrijving 'schoongeveegd'.

Het is overzichtelijk om de hoofdelementen in een *trapvorm* te zetten, bijvoorbeeld op de hoofddiagonaal[1] van de uitgebreide matrix. Door rijen onderling te verwisselen kun je voor vierkante stelsels die in gereduceerde vorm staan altijd een dergelijke gereduceerde trapvorm krijgen.

Een voorbeeld:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{4}$$

[1] De *hoofddiagonaal* is de diagonaal die vertrekt in de linkerbovenhoek.

16 Welke van de volgende uitgebreide matrices staan al in een gereduceerde vorm? Zet ze verder in trapvorm en noteer de oplossing van het stelsel (als het stelsel bepaald is). Zeg eventueel *waarom* de matrix *(nog) niet* in een gereduceerde vorm staat.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(1)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right] \end{array}$$

(5)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

(6)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

(7)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

(8)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

(9)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(10)

4 Stelsels met oneindig veel oplossingen

- *Voorbeeld*

  Vier opeenvolgende getallen verschillen telkens twee.

  Welke viertallen zijn er mogelijk die aan deze voorwaarde voldoen?

Noem vier getallen: a (grootste) , b, c en d.

$$\begin{cases} a = d + 6 \\ b = d + 4 \\ c = d + 2 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen.

17 Noteer naast (17, 15, 13, 11)[2] nog enkele oplossingen.

De algemene oplossing ziet er als volgt uit:

$$(r+6, r+4, r+2, r) \qquad \text{(met } r \text{ een } \textit{vrij} \text{ te kiezen reëel getal)}$$

Dit vrij te kiezen getal noemen we een *parameter*.

Omdat de algemene oplossing één parameter bevat, noemen we het stelsel *enkelvoudig onbepaald*.

Een gereduceerde trapvorm van het stelsel:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Het betreft hier een 3×4 stelsel.

Er zijn slechts drie hoofdelementen (voor *vier* onbekenden): er is dus één vergelijking *tekort* om de vier onbekenden te bepalen. Het gevolg is dat er één parameter in de oplossing zit en er dus oneindig veel oplossingen zijn.

We noteren het stelsel voluit:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{a} & & & -d & = & 6 \\ & \boldsymbol{b} & & -d & = & 4 \\ & & \boldsymbol{c} & -d & = & 2 \end{array}\right.$$

We kunnen het stelsel oplossen naar slechts drie onbekenden, namelijk de onbekenden die overeenkomen met de hoofdelementen van de gereduceerde vorm: a, b en c.

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = d + 6 \\ \boldsymbol{b} = d + 4 \\ \boldsymbol{c} = d + 2 \end{cases}$$

De *algemene* oplossing:

$$(d+6, d+4, d+2, d)$$

Of nog:

[2] de leeftijd van mijn kinderen, op het ogenblik dat dit boekje geschreven werd

$(r+6, r+4, r+2, r)$	(met r een *vrij* te kiezen reëel getal)

18 Zoek twee getallen waarvan de som gelijk is aan 10.

1 Noteer letters voor de onbekenden.

2 Noteer het bijbehorende stelsel.

3 Noteer een gereduceerde vorm.

4 Noteer de algemene oplossing met een parameter.

19 Bereken uit de volgende algemene oplossingen van de onbepaalde stelsels telkens drie oplossingen.

1 $(2, r, r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$.

2 $(r, s, 2r)$ met r en s parameters uit $\mathbb{R}$.

Hoe noem je zo'n onbepaald stelsel?

3 $(r+2, 0, r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$.

4 $(r, s, r+s, t, 5)$ met r, s en t parameters uit $\mathbb{R}$.

Hoe noem je zo'n onbepaald stelsel?

20 Noteer telkens het opgelost stelsel.

Vermeld telkens ook of het stelsel bepaald is of onbepaald (enkelvoudig, tweevoudig of drievoudig onbepaald).

1 $(r, 2r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$

2 $(-1, \frac{2}{3}, 4)$

3 $(2, r, 3-r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$.

4 $(r, r-s, s)$ met r en s parameters uit $\mathbb{R}$.

5 $(1+\frac{r}{2}, 0, r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$.

21 Leid uit elke gegeven gereduceerde vorm de (algemene) oplossing van het stelsel af.

1
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
\end{array}$$

2
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]
\end{array}$$

3
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]
\end{array}$$

4 $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

5 $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6 $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

22 Los de volgende stelsels op met de spilmethode.
(Gebruik pen en papier. Controleer achteraf met de grafische rekenmachine.)

1 $$\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x+3y+z=2 \\ 2x-y+z=5 \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 2x-3y+z=10 \\ 4x+y+3z=7 \\ 3x-y+2z=9 \end{cases}$$

3 $$\begin{cases} 2x+3y-4z=0 \\ 4x+7y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

4 $$\begin{cases} 3x-y+4z=0 \\ 2x+y-3z=5 \\ x+3y-10z=10 \end{cases}$$

5 $$\begin{cases} -x+3y+z=-1 \\ x+3y+2z=5 \\ x+9y+5z=8 \end{cases}$$

6 $$\begin{cases} 10x-3y+6z=0 \\ 3x+4y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

7 $$\begin{cases} -3x+y-4z=1 \\ x-y+z=5 \\ 8x-2y+11z=8 \end{cases}$$

8 $$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ x+y-z=2 \end{cases}$$

5 Samenvatting

Er zijn slechts drie soorten stelsels van m eerstegraadsvergelijkingen in n onbekenden:

- *Bepaald stelsel*

Zo'n stelsel heeft een *unieke* oplossing. Er is een en slechts een stel waarden voor de onbekenden x, y, ... die gelijktijdig aan alle vergelijkingen voldoen.

De gereduceerde trapvorm van een bepaald stelsel eindigt altijd met een *vierkant* stelsel waarbij de hoofdelementen op de *hoofddiagonaal* staan. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right] \end{array}$$

De oplossing: $(2, 0, -3)$

- *Vals stelsel*

Er is geen oplossing, geen enkel stel waarden voor de onbekenden x, y, ... voldoen gelijktijdig an alle vergelijkingen.

De gereduceerde vorm eindigt altijd op een typische rij waarbij alle coëfficiënten gelijk zijn aan *nul* én de bekende term *verschillend is van nul*. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -3 \quad (\neq \mathbf{0}) \end{array}\right] \end{array}$$

- *Onbepaald stelsel*

Het stelsel heeft *oneindig veel oplossingen*.

De gereduceerde trapvorm van een bepaald stelsel eindigt altijd met een stelsel waarbij er *minder* vergelijkingen zijn dan *onbekenden*, de eventuele nulrijen niet meegerekend, deze kun je schrappen.

Zoveel vergelijkingen er *tekort* zijn, zoveel keer onbepaald is het stelsel. Bijvoorbeeld een *enkelvoudig onbepaald* stelsel:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle x & \scriptstyle y & \scriptstyle z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

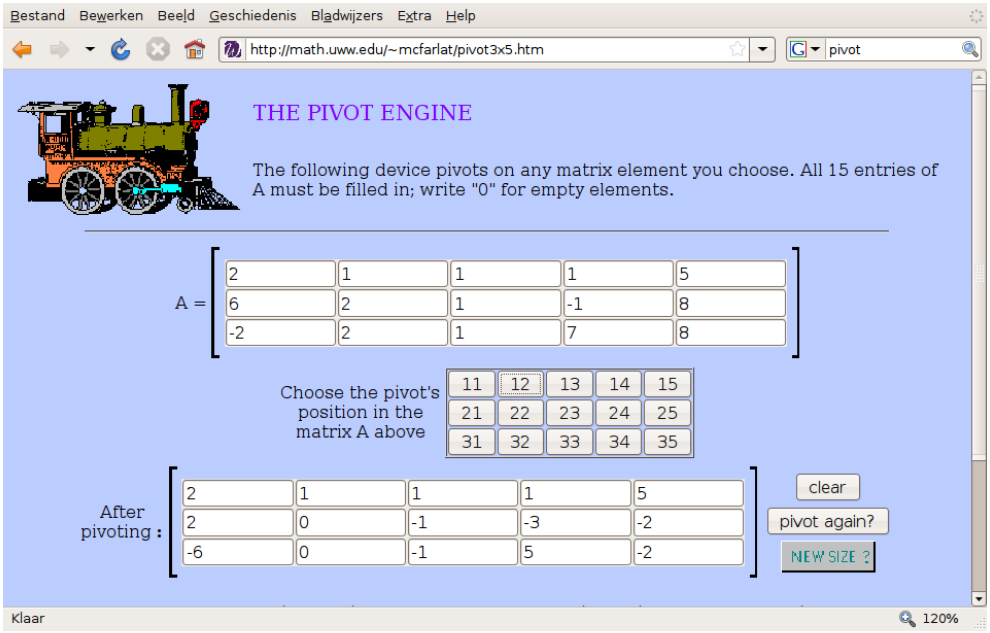
Noteer het stelsel *voluit* en los op naar de *hoofdonbekenden*:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} & = -3z + 4 \\ \boldsymbol{y} & = 2z - 1 \end{cases}$$

De *algemene* oplossing: $(-3r+4, 2r-1, r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$.

6 De spilmethode online

Je kunt de spilmethode *online* uitvoeren met de *Pivot Engine*-applet. Een *applet* is een programmaatje binnen een website. Je kunt er meestal interactief mee werken. Zie figuur 2. Je hoeft zelf geen berekeningen uit te voeren. Bij elke stap wijs je een spil aan en het applet doet de berekingen voor jou. Je kunt deze applet gebruiken als controlemiddel bij de oefeningen, bijvoorbeeld om een hardnekkige fout op te sporen.



Figuur 2 – De spilmethode online `http://math.uww.edu/~mcfarlat/pivot.htm`

Je ziet in figuur 2 een demonstratie. Ik heb hier de uitgebreide matrix uit het volgende voorbeeld gebruikt én ook een extra kolom ingevuld met de controlegetallen. Kies dus voor een 3×5 matrix.

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 6x+2y+z=-1 \\ -2x+2y+z=7 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 8 \\ 8 \end{array} \tag{5}$$

Een andere *Pivot engine* (figuur 3) geeft *direct* een gereduceerde trapvorm.

Je ziet in figuur 3 een demonstratie met de uitgebreide matrix uit voorbeeld (5) op pagina 26 — *zonder* controlegetallen.
REDUCE MATRIX geeft de gereduceerde vorm, RESTORE MATRIX toont terug de oorspronkelijke matrix en Reset maakt de matrix leeg.

23 Bekijk de volgende *drie* stelsels waarbij de coëfficiënten dezelfde zijn voor elk stelsel, maar de bekende termen (rechterleden) verschillend zijn.

$$\begin{cases} 4x - 8y + 5z = 1 \mid 0 \mid 0 \\ 4x - 7y + 4z = 0 \mid 1 \mid 0 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \mid 0 \mid 1 \end{cases}$$

Figuur 3 – Direct de gereduceerde vorm online `http://math.bd.psu.edu/~jpp4/finitemath/pivot.html`

Los alle drie de stelsels *tegelijk* op met de spilmethode met de uitgebreide matrix:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad x & \quad y & \quad z \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 4 & -8 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{array}$$

7 Stelsels online oplossen

Op het internet vind je vele hulpmiddelen zoals de *Linear Solver* (figuur (4) om stelsels in te voeren en te laten oplossen.

In figuur 4 zie je een demonstratie.
$\boxed{\text{solve the system}}$ geeft direct de oplossing(en) van het stelsel.

Figuur 4 – Stelsels oplossen online `http://wims.unice.fr/wims/en_tool~linear~linsolver.html`

8 Stelsels oplossen met de grafische rekenmachine

Voer eerst de matrix in met 2nd matrix `edit 1:[A]`.
Neem bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ 3z=x+2y+1 \\ 3x+4z=7y+10 \end{cases}$$

met als uitgebreide matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Bereken daarna de *row reduced echelon form* (gereduceerde trapvorm) met 2nd matrix `math B:rref(`.
Kies de matrix **A** met 2nd matrix `names 1:[A]`.

$$\rightarrow \texttt{rref([A])} \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De oplossing is dus (3, 1, 2).

24 Wat verstaat men onder de coëfficiënten van een stelsel?

Hoe noemt men de getallen *achter* de verticale streep in de uitgebreide matrix?

9 Toepassingen met stelsels

25 Gisteren zat ik op een terrasje in Tienen en keek naar de omringende tafeltjes. Ik noteerde wat de mensen bestelden en hoeveel ze moesten betalen:

Tafelnummer	Bestelling	Te betalen
1	3 waters 2 broodjes 1 trappist	€8,20
2	 4 broodjes 5 trappisten	€16,40
3	5 waters 2 trappisten	€9,00

Bepaal de eenheidsprijzen.
(Elektronisch oplossen toegelaten.)

26 Zoek twee getallen waarvan de som gelijk is aan 10 en het verschil ook gelijk is aan 10.

27 Zoek vier getallen zodat de som van deze vier getallen gelijk is aan 100, en zodat het eerste getal het dubbele is van het tweede, het tweede het dubbele is van het derde, en het derde het dubbele is van het vierde.

(Noem de vier getallen a (het grootste), b, c en d.)

28 Op hetzelfde terrasje in Tienen:

Tafelnummer	Bestelling	Te betalen
4	4 waters 1 trappist	€6,00
5	7 waters 1 trappist	€10,00
6	4 waters	€4,00

Bepaal de eenheidsprijzen.
(Elektronisch oplossen toegelaten.)

29 Vier kinderen in een huisgezin verschillen telkens twee jaar in leeftijd en zijn samen 36 jaar. Hoe oud zijn deze kinderen?

30 Op een controlepost tijdens *De Gordel* ziet een fietsenmaker alle banden na.

Van een groepje gordelaars heeft hij in totaal 67 wielen gecontroleerd.

Bij dit groepje waren er evenveel fietsers als voetgangers (duwers van buggy's inbegrepen, rolstoelgebruikers en baby's niet inbegrepen).

Er waren tien fietsers meer dan buggy's.

Hij controleerde of de zeven baby's hun gordel wel goed aan hadden.

Op deze *Gordel* werden moderne eenpersoonsbuggy's gebruikt met drie wielen en een verplichte gordel.

Op alle fietsen zat telkens één persoon, alle rolstoelen (met vier wielen) werden bestuurd door de inzittende.

Hoeveel fietsers, baby's, rolstoelgebruikers en voetgangers bevonden zich in dit groepje?

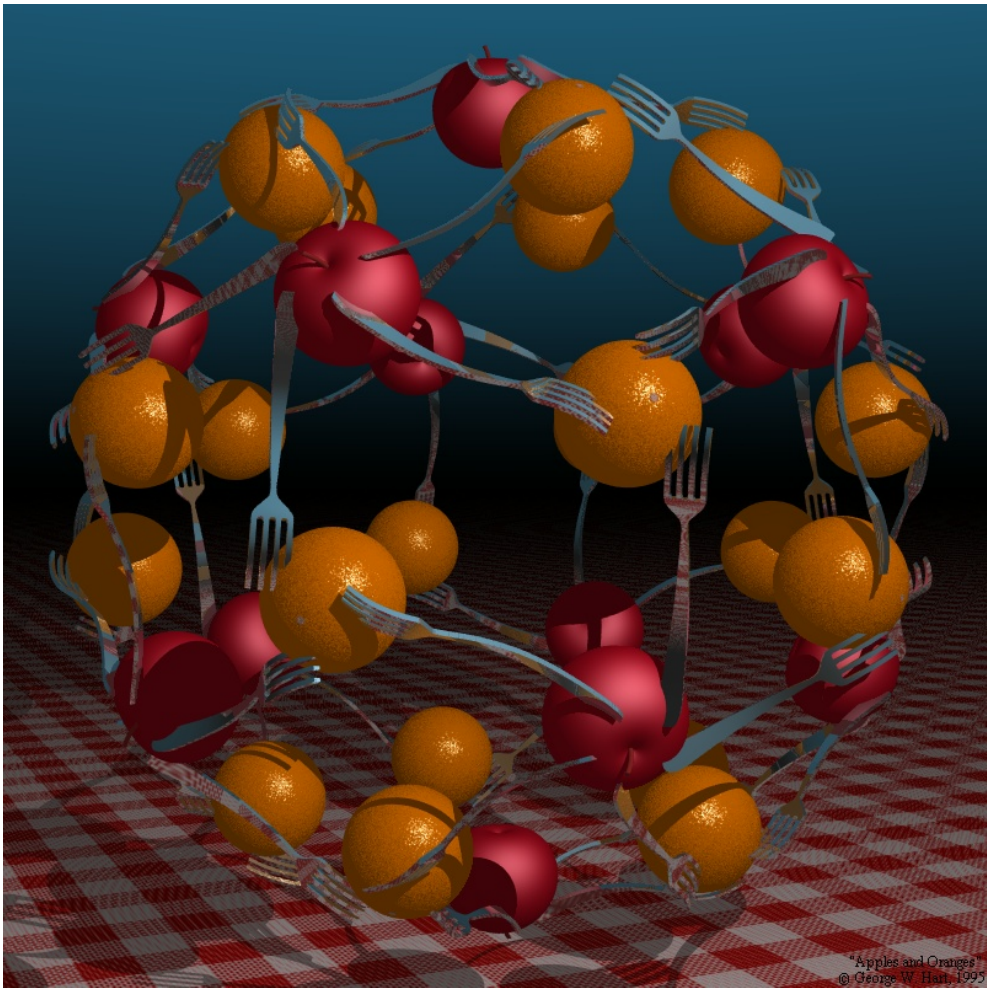
(Noem f het aantal fietsers, b het aantal baby's, r het aantal rolstoelgebruikers en v het totaal aantal voetgangers (duwers van buggy's inbegrepen).)

31 Om de ruimtefiguur *Apples and Oranges* (zie figuur 5) te kunnen construeren, moet men langs de groentenmarkt en heeft men bestek nodig.

Maak het boodschappenlijstje om deze figuur te kunnen construeren.

Hint:

> Merk op dat elke vork aan één kant op een appel rust, en aan de andere kant in een sinaasappel steekt.
>
> Bovendien steunen op elke appel vijf vorken en steken in elke sinaasappel drie vorken.
>
> Noem v het aantal vorken, a het aantal appels en s het aantal sinaasappelen.



Figuur 5 – Apples and Oranges `http://www.georgehart.com/Applorng.html`

We hebben dus al:

$$\begin{cases} v = 5a \\ v = 3s \end{cases}$$

v is dus een veelvoud van drie, maar dan is $5a$ ook een veelvoud van drie. Dus moet a zelf ook een veelvoud zijn van drie.

In figuur 5 kunt u dan het aantal sinaasappelen proberen tellen. Dit aantal moet een veelvoud zijn van drie!

32 Reclame in de groentehal:

2 kg appelsienen, 1 kg bananen en 3 citroenen voor €5

Twee trouwe klanten krijgen tegen dezelfde gunstprijzen respectievelijk 3 kg appelsienen, 2 kg bananen en 1 citroen voor €8,

en 4 kg appelsienen, 1 kg bananen en 2 citroenen voor €7,35.

Bepaal de eenheidsprijzen.

33 Bij de warme bakker betaal je voor 15 sandwiches, 4 koffiekoeken en een bruin brood €6,50. Voor 10 sandwiches, 6 koffiekoeken en een bruin brood rekent men 25 cent minder. Bestel je 5 sandwiches, 10 koffiekoeken en twee bruine broden, dan vraagt men €7,75.

Bepaal de eenheidsprijzen.

34 De familie Flodder wil tuinverlichting installeren. De architect geeft drie voorstellen:

- Drie verlichtingspaaltjes langs de oprit, een wandtoestel met spaarlamp aan de voordeur en twee stralers aan de kant van de garage. Dit alles voor een bedrag van €1756,55.
- Plaatst men vier verlichtingspaaltjes, een wandtoestel met spaarlamp, dan is één straler voldoende, maar loopt de prijs op tot €2156,60.
- Een goede verlichting wordt ook bekomen met drie verlichtingspaaltjes, twee wandtoestellen met spaarlamp en één straler voor een bedrag van €2054,95.

Bepaal de prij van de drie soorten verlichtingstoestellen.

35 In de kaaswinkel kost 200 g geitenkaas, 150 brie en 250 g jonge Hollandse kaas €11,85. Bestel je 150 g geitenkaas, 200 g brie en 200 g jonge Hollandse kaas, dan betaal je €10,65. Voor 130 g geitenkaas, 180 g brie en 240 g jonge Hollandse kaas vraagt men €10,35.

Bereken de prijs per kilogram van deze drie kaassoorten.

36 De som van drie getallen is 200. Eén van de getallen is 2 minder dan de som van de twee andere. Dit getal is tevens 1 meer dan het dubbel van het verschil van de twee andere getallen.

Over welke getallen gaat het?

37 Bepaal een vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ van de kromme die door de punten

(3, 0), (1, 2) en (-1, 4) gaat.

Plot de kromme om de oplossing te controleren.

38 Bepaal een vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ van de parabool die door de punten

(2, 0), (-1, 1) en (3, -1) gaat.

Plot de parabool om de oplossing te controleren.

39 Bepaal een vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ van de parabool die door de punten

(1, 1), (2, 2) en (4, -1) gaat.

Plot de parabool om de oplossing te controleren.

40 De vergelijkingen $y = 3x + 5$, $y = -2x + 7$ en $y = 6,4$ bepalen telkens een rechte in het xy-vlak. Gaan deze rechten door eenzelfde punt? Bepaal eventueel dit punt.

Plot de drie rechten om de oplossing te controleren.

10 Stelsels van niet-eerstegraadsvergelijkingen

41 Bepaal de snijputen van de cirkel $(x-9)^2+(y-6)^2=25$ met de rechte $y=-2x+14$.
Het bijbehorende stelsel

$$\begin{cases} (x-9)^2+(y-6)^2=25 \\ y=-2x+14 \end{cases}$$

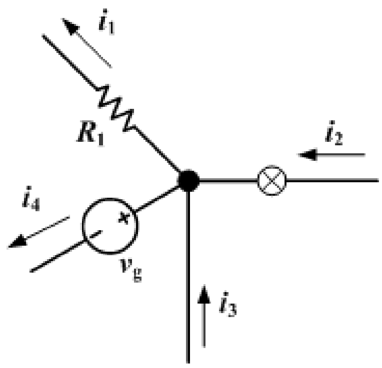
is *geen* stelsel van eerstegraadsvergelijkingen.
Je kunt het dus niet oplossen met de eliminatiemethode van Gauss.
Los het op met de *substitutiemethode*.
Maak een tekening van de cirkel en de rechte om de oplossing te controleren.

42 Bepaal de snijputen van de parabool $y=3x^2-2x-6$ met de rechte $y=2x+1$.
Plot de parabool en de rechte om de oplossing te controleren.

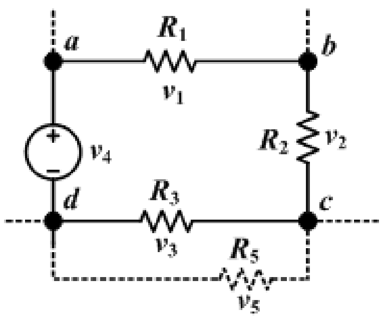
43 Bepaal de snijputen van de parabool $y=3x^2-2x+6$ met de rechte $y=2x+1$.
Plot de parabool en de rechte om de oplossing te controleren.

44 Bepaal de snijputen van de parabool $y=3x^2-2x+\frac{7}{3}$ met de rechte $y=2x+1$.
Plot de parabool en de rechte om de oplossing te controleren.

45 Toepassing op de stroomwet en de spanningswet van Kirchhoff

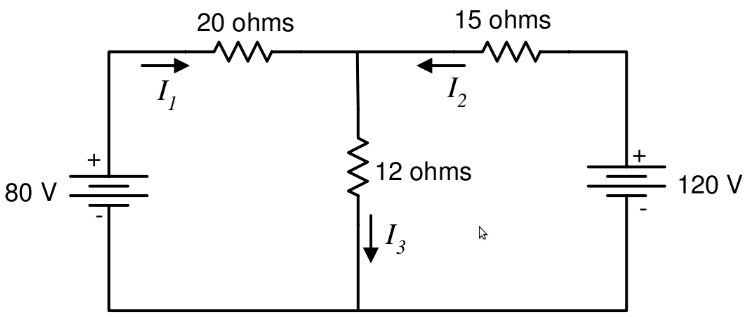


Figuur 6 – Som van stromen in een knooppunt is nul: $i_1 + i_4 = i_2 + i_3$.



Figuur 7 – Som van spanningen in een gesloten lus is nul: $v_1 + v_2 + v_3 = v_4$.

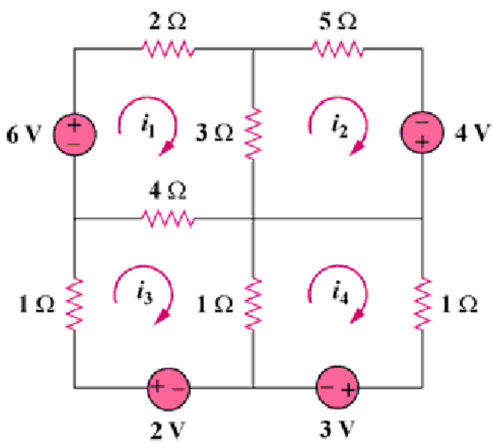
Voorbeeld:



Ga na dat de toepassing van de stroomwet en de spanningswet van Kirchhoff het volgende stelsel oplevert, en los het stelsel op.

$$\begin{cases} 20I_1 + 12I_3 = 80 \\ 15I_2 + 12I_3 = 120 \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0 \end{cases}$$

46 Stel een gepast stelsel op om de volgende stromen te berekenen

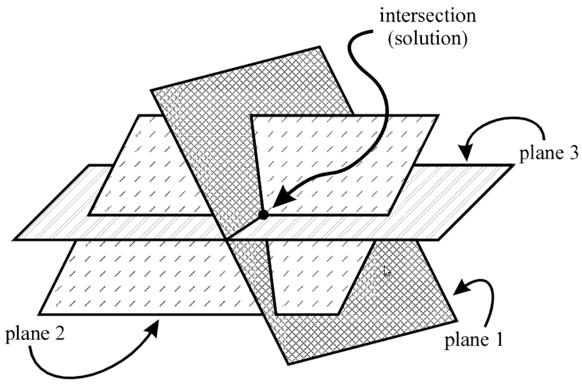


47 Stelsels van lineaire vergelijkingen werken ook in hogere dimensies, bijvoorbeeld in de drie-dimensionale ruimte.

Het volgende stelsel stelt niet drie rechten, maar drie vlakken voor. Elke vergelijking stelt een ander vlak voor.

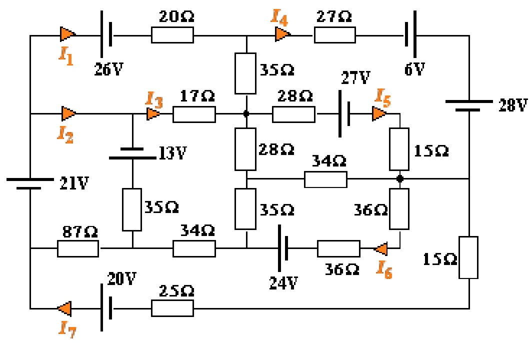
$$\begin{cases} 2x+y-2z=-2 \\ 3x-2y+z=2 \\ -2x-2y+3z=3 \end{cases}$$

Dit stelsel oplossen betekent het snijpunt zoeken van de drie vlakken:



Zoek de coördinaten van dit snijpunt.

48 Stel een gepast stelsel op om de volgende stromen te berekenen



Oplossingen van de opdrachten

1 13,60 euro, 5,35 euro en 12,00 euro

2
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & | & 20 \\ 0 & 0 & 1 & | & 70 \\ 2 & 3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

3
$$\begin{cases} x = 13 \\ y = 0 \\ z = 17 \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} x = 13,60 \\ y = 5,35 \\ z = 12,00 \end{cases}$$

5
$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ c = 17 \\ d = 2 \end{cases}$$

6
$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = -1 \end{cases}$$

8 “Het gewicht van drie blokjes en twee driehoekjes is samen vijf kilogram.”

9 neen

10
1 bepaald stelsel; de oplossing is (11,13,15,17)
2 bepaald stelsel; de oplossing is (11, 0, 4, 6)
3 bepaald stelsel; de oplossing is (11, 0)
4 vals stelsel; er is geen oplossing

11 stelsels met dezelfde oplossingen

12 één oplossing

13 Een 2×4 matrix heeft twee vergelijkingen en vier onbekenden.

14 een vals stelsel

15
1 (3, 1 2)

2 (1, -1)

3 (-3, -5)

4 (0,5; 2)

5 $(\frac{5}{13}, \frac{1}{13})$

6 (0,7; 0,9; 1,1)

7 $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 0)$

8 (2, 1, 0)

9 (7,5; 2,5; 25)

10 vals stelsel: geen oplossing

16

1 Gereduceerde trapvorm. De oplossing is: (5, 8, 0)

2 Nog niet helemaal in een gereduceerde vorm, want er zijn nog *maar twee* hoofdelementen (voor *drie* vergelijkingen), dat is één te weinig.

Als de tweede rij vereenvoudigd wordt (delen door 2), dan verschijnt de gereduceerde vorm, zelfs de gereduceerde trapvorm.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

De oplossing is (5, 4, 0).

3 Geen gereduceerde vorm: er zijn *maar twee* hoofdelementen (voor *drie* vergelijkingen). Het betreft hier bovendien een vals stelsel. De eerste vergelijking luidt: $0x + 0y + 0z = 1$ of $0 = 1$ en dit is een valse uitspraak. Een vals stelsel kan nooit in de gerecudeerde vorm geraken.

4 Nog niet in een gereduceerde vorm, want er is nog *maar een* hoofdelement (voor *drie* vergelijkingen), dat zijn er twee te weinig. Eigenlijk kun je de laatste vergelijking schrappen, want ze is een kopie van de eerste vergelijking en levert dus geen extra informatie op. Als deze laatste vergelijking geschrapt is, ontstaat een 2×3 stelsel dat wel in de gereduceerde vorm staat. Er zijn dan twee hoofdelementen voor twee vergelijkingen. Dat is juist gepast. Er is dan wel een vergelijking *tekort* opdat het stelsel zou bepaald zijn. Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen.

5 Gereduceerde vorm.

De gereduceerde trapvorm is:
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \end{array}$$

De oplossing is (30, 20, 10).

6 Gereduceerde trapvorm. Er zijn oneindig veel oplossingen.

7 Nog niet in gereduceerde vorm, want er is nog maar één hoofdelement (voor *twee* vergelijkingen). De kolom van y moet nog geveegd worden.

8 Geen gereduceerde vorm, want er want er is nog maar één hoofdelement (voor *twee* vergelijkingen). Het stelsel is bovendien vals.

9 Gereduceerde vorm. De nulrij mag geschrapt worden.

De gereduceerde trapvorm:
$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

De oplossing is (5, -3, 2).

10 Geen gereduceerde trapvorm, want er is nog geen enkel hoofdelement. Het betreft hier bovendien een vals stelsel, want $x = 13$, $x = 14$ en $x = 0$ kunnen niet gelijktijdig waar zijn.

18

1 Noem x en y de twee gezochte getallen.

2 Het bijbehorende stelsel

$$\begin{cases} x+y=10 \end{cases}$$

3 De gereduceerde vorm:

$$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

4 De *algemene* oplossing:

$$(10-y, y)$$

Of nog:

$$(10-r, r)$$ (met r een *vrij* te kiezen reëel getal)

19

1 Bijvoorbeeld: (2, 0, 0), (2, 13, 13), (2; -3,5; -3,5)

2 Bijvoorbeeld: (3, 7, 6), (0, 13, 0), (1; 1; 2)

Een stelsel met *twee* vrij te kiezen parameters heet *tweevoudig onbepaald*.

3 Bijvoorbeeld: (2, 0, 0), (12, 0, 10), (100; 0; 98)

4 Bijvoorbeeld: (7, 13, 20, 107, 5), (1, 1, 2, -77, 5), (50; 10; 60; -2,5; 5)

Een stelsel met *drie* vrij te kiezen parameters heet *drievoudig onbepaald*.

5 $(r, s, 2r)$ met r en s parameters uit $\mathbb{R}$.

20

1 $\begin{cases} y=2x \end{cases}$

Dit stelsel is enkelvoudig onbepaald.

2 $\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{2}{3} \\ z=4 \end{cases}$

Dit stelsel is een bepaald stelsel.

3 $\begin{cases} x=2 \\ z=3-y \end{cases}$

Dit stelsel is enkelvoudig onbepaald.

4 $\begin{cases} y = x - z \end{cases}$

Dit stelsel is tweevoudig onbepaald.

5 $\begin{cases} x = 1 + 0,5z \\ y = 0 \end{cases}$

Dit stelsel is enkelvoudig onbepaald.

21

1 Bepaald stelsel. De oplossing: $(2, -3, 0)$

2 Enkelvoudig onbepaald stelsel. De algemene oplossing: $(3 - 2r, -2 - r, r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$

3 Vals stelsel. Geen oplossing.

4 Enkelvoudig onbepaald stelsel. De algemene oplossing: $(4 - 2r, r, -2)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$

5 Enkelvoudig onbepaald stelsel. De algemene oplossing: $(3 + r, 2 - r, r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$

6 Vals stelsel. Geen oplossing.

22

1 Bepaald stelsel. De oplossing: $(2; -0,25; 0,75)$

2 Vals stelsel. Geen oplossing.

3 Bepaald stelsel. De oplossing: $(0, 0, 0)$

4 Enkelvoudig onbepaald stelsel. De algemene oplossing:

ofwel $(\frac{5-r}{5}, \frac{17r+15}{5}, r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$ (spillen gekozen in de x-kolom en de y-kolom)

ofwel $(r, 20 - 17r, 5 - 5r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$ (spillen gekozen in de y-kolom en de z-kolom)

ofwel $(\frac{20-r}{17}, r, \frac{5r-15}{17})$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$ (spillen gekozen in de x-kolom en de z-kolom)

(Het is voldoende als je één van deze drie algemene oplossingen geeft. Ze zijn onderling gelijkwaardig. Je krijgt deze verschillende vormen van oplossingen naargelang de spillen die je gekozen hebt.)

5 Vals stelsel. Geen oplossing.

6 Enkelvoudig onbepaald stelsel. De algemene oplossing:

$(r, -\frac{4}{3}r, -\frac{7}{3}r$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$

of $(-\frac{3}{4}r, r, -\frac{7}{4}r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$

of $(-\frac{3}{7}r, \frac{4}{7}r, r)$ met r een parameter uit $\mathbb{R}$

(Het is voldoende als je één van deze drie algemene oplossingen geeft. Ze zijn onderling gelijkwaardig. Je krijgt deze verschillende vormen van oplossingen naargelang de spillen die je gekozen hebt.)

7 Vals stelsel. Geen oplossing.

8 Bepaald stelsel. De oplossing is (2,5; -1; -0,5).

23 De drie oplossingen: (2, 4, 5), (-4, -7, -8) en (3, 4, 4)

24 De coëfficiënten van een stelsel zijn de getallen die bij de onbekenden staan, bijvoorbeeld in $1x - 3z = 14$ zijn '1', '0' en '-3' de coëfficiënten van respectievelijk x, y en z. De bekende term is in dit voorbeeld '14'.

De coëfficiënten staan in de uitgebreide matrix vóór de verticale streep, en de bekende termen staan áchter de verticale streep.

25 Stel x de prijs van een water, y de prijs van een broodje en z de prijs van een trappist. De oplossing is dan: (1; 1,60: 2).

26 Noem de twee getallen x en y.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

De oplossing: (10, 0)

27

$$\begin{cases} a + b + c + d = 100 \\ a = 2b \\ b = 2c \\ c = 2d \end{cases}$$

De oplossing: $(\frac{160}{3}, \frac{80}{3}, \frac{40}{3}, \frac{20}{3})$

28 Stel x de prijs van een water, y de prijs van een broodje en z de prijs van een trappist.

Het stelsel is vals. Er is geen oplossing.

Als een water toch €1 kost, en een trappist €2 (zie tafels 1, en 3 uit de vorige opdracht), kloppen de rekeningen van tafel 4 en tafel 6 nog wel, maar heeft tafel 5 €1 teveel betaald (fooi?).

29 Noem de leeftijden van de vier kinderen: a (oudste) , b, c en d.

$$\begin{cases} a + b + c + d = 36 \\ a = d + 6 \\ b = d + 4 \\ c = d + 2 \end{cases}$$

De oplossing: (12, 10, 8, 6)

30

$$\begin{cases} 2f + 3b + 4r = 67 \\ f = v \\ f = b + 10 \\ b = 7 \end{cases}$$

De oplossing: (17, 7, 3, 17)

31 (60, 12, 20)

32 (1,25; 2,05; 0,15)

33 (0,25; 0,50; 0,75)

34 (443,05; 341,40; 43)

35 (27, 18, 15)

36 (99, 75, 26)

37 $y = -x + 3$

Deze 'kromme' is dus een rechte.

38 $y = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 1$

39 $y = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{5}{3}$

40 De drie rechten snijden elkaar niet in eenzelfde punt. Voldoende inzoomen om te zien dat een derde rechte het snijpunt van de andere twee rechten juist mist!

Vervang de derde rechte door $y = 6.2$ en de drie rechten snijden elkaar wel in eenzelfde punt:

41 De cirkel snijdt de rechte in twee punten: (4, 6) en (6,2).

42 De rechte snijdt de parabool in twee punten: $(-1, -1)$ en $(\frac{7}{3}, \frac{17}{3}) \approx (2,33; 5,67)$.

43 De rechte snijdt de parabool niet.

44 De rechte snijdt de parabool in juist één punt: $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}) \approx (0,67; 2,33)$.

45 $I_1 = 1$ A,I_2 = 4 A en $I_3 = 5$ A.

46

47 (1, 2, 3)

48

$$\begin{aligned}
-26 &= 72I_1 - 17I_3 - 35I_4 \\
34 &= 122I_2 - 35I_3 - 87I_7 \\
-13 &= 149I_3 - 17I_1 - 35I_2 - 28I_5 - 35I_6 - 34I_7 \\
5 &= 105I_4 - 35I_1 - 43I_5 \\
-27 &= 105I_5 - 28I_3 - 43I_4 - 34I_6 \\
24 &= 141I_6 - 35I_3 - 34I_5 - 72I_7 \\
-4 &= 233I_7 - 87I_2 - 34I_3 - 72I_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= -0.4680A \\
I_2 &= 0.4293A \\
I_3 &= 0.0005A \\
I_4 &= -0.2224A \\
I_5 &= -0.2785A \\
I_6 &= 0.2112A \\
I_7 &= 0.2091A
\end{aligned}$$

Referenties

Trefwoordenregister