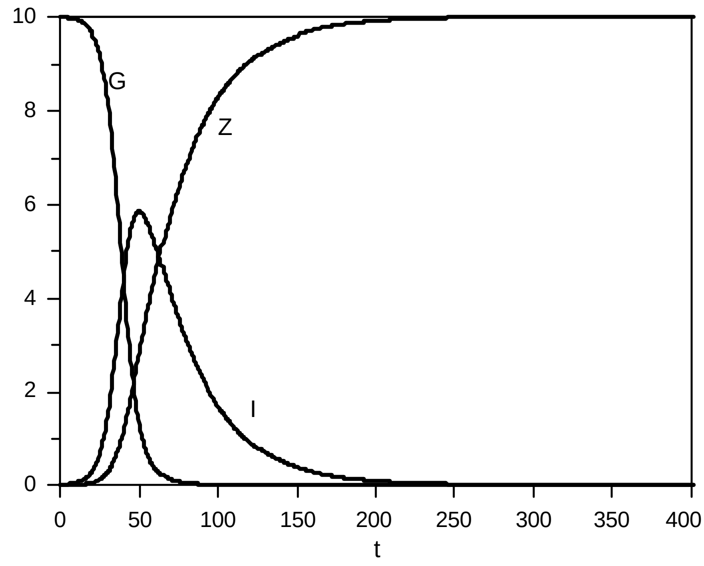
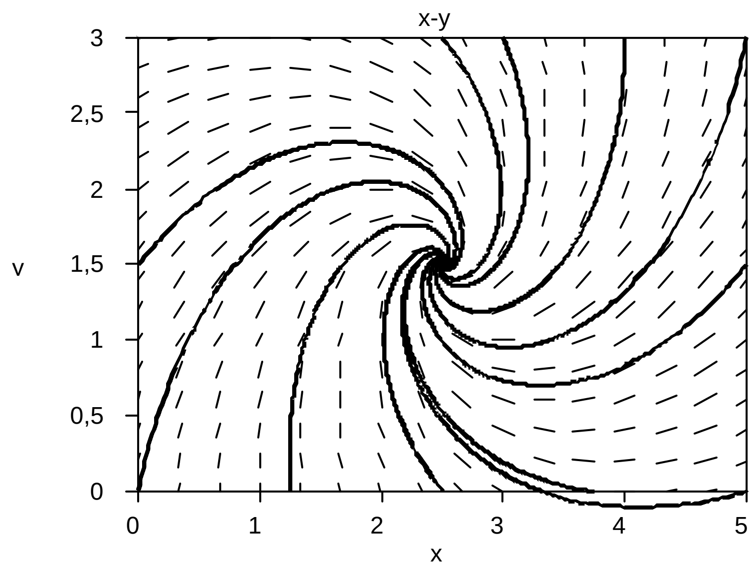


Dynamische Modellen (in de biologie, scheikunde en natuurkunde)



Inhoud

1 Continue dynamische modellen

Dit hoofdstuk moet je zien als zien als een hoofdstuk waarin leerstof uit het domein continue dynamische modellen opgefrist wordt. De belangrijkste steekwoorden zijn: differentievergelijking en differentiaalvergelijking, richtingsveld, stapgrootte, groeimodel van Malthus en logistische groei. Als je goed weet wat met deze termen bedoeld is dan kun je paragraaf 1.1 overslaan en meteen opdracht 1.1 en opdracht 1.2 maken.

Inhoud van dit Hoofdstuk

1.1 Groeimodellen

In het domein Continue Dynamische Modellen heb je kennis gemaakt met modellen waarin geprobeerd werd om het gedrag van een variabele in de tijd te beschrijven. Een voorbeeld van een continue dynamische variabele is het aantal dieren in een populatie. Als je aanneemt dat de groei alleen evenredig is met de omvang van de populatie dan krijg je het groeimodel van Malthus. De vergelijking die de omvang van de populatie beschrijft is:

$$P(t+\Delta t) = P(t) + \mathrm{g} \cdot P(t) \cdot \Delta t$$

De bovenstaande vergelijking heet een differentievergelijking. $P(t)$ geeft het aantal dieren aan op tijdstip t, met Δt wordt de lengte van het beschouwde tijdsinterval bedoeld en g is een onbekende groeifactor die alleen uit metingen bepaald kan worden. In een model doe je dat meestal niet omdat je net de invloed van de onbekende factoren wilt onderzoeken. Om berekeningen te maken moet je ook nog de omvang van de populatie op $t = 0$ weten: de parameter $P(0)$. Deze waarde is een constante maar in het model onderzoek je ook wat de invloed van deze factor is.

Ook heb je geleerd hoe de differentievergelijking overgaat in een differentiaalvergelijking als de tijdstap Δt "oneindig" klein wordt. In dit geval wordt de differentiaalvergelijking. Eerst breng je $P(t)$ naar één kant, vervolgens deel je door Δt. Dat mag want Δt is ongelijk aan nul.

$$P(t+\Delta t) - P(t) = \mathrm{g} \cdot P(t) \cdot \Delta t$$

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \mathrm{g} \cdot P(t)$$

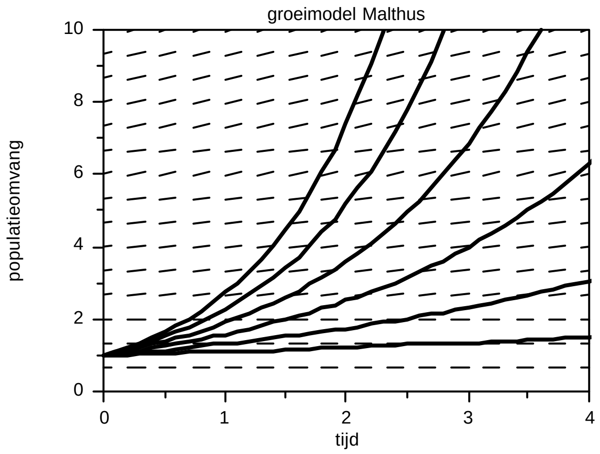
Aan de rechterkant staat het differentiequotiënt $\Delta P/\Delta t$. Als Δt naar nul gaat dan gaat dit getal naar het differentiaalquotiënt, of anders gezegd de afgeleide van P. Je krijgt dan de differentiaalvergelijking:

$$P\,'(t) = \mathrm{g} \cdot P(t)$$

Het model van Malthus is vrij onrealistisch. De populatie dieren wordt oneindig groot als g > 0, onongeacht de omvang van de populatie op $t = 0$. Dat kun je zien aan een tabel met berekeningen. Ook kun je dat zien in het richtingsveld dat bij de differentiaalvergelijking hoort.

groeifactor	0,1
startpopulatie	1
delta t	0,1

tijd	populatie
0,0	1,000
0,1	1,010
0,2	1,020
0,3	1,030
0,4	1,041
0,5	1,051
0,6	1,062
0,7	1,072
0,8	1,083
0,9	1,094
1,0	1,105
1,1	1,116
1,2	1,127
1,3	1,138
1,4	1,149



Een realistischer groeimodel is het logistische groeimodel. In dat model wordt ook verondersteld dat de populatie bij een bepaalde omvang K niet meer groeit.

De differentie- en de differentiaalvergelijking in dat model zijn:

$$P(t+\Delta t) = P(t) + \mathrm{c} \cdot P(t) \cdot \big(K - P(t)\big) \cdot \Delta t$$
$$P\,'(t) = \mathrm{c} \cdot P(t) \cdot \big(K - P(t)\big)$$

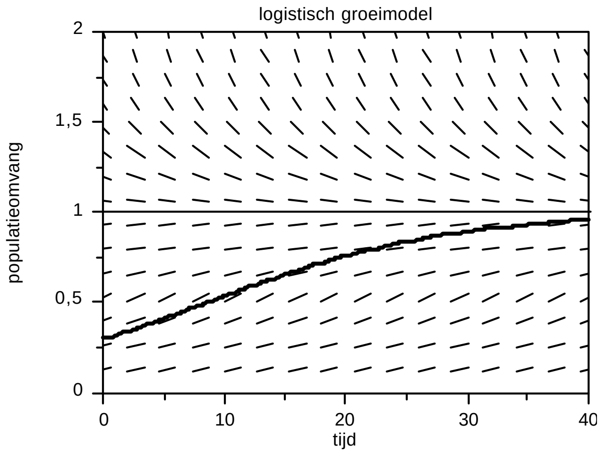
Het is gebruikelijk om de populatieomvang te meten in eenheden van K. De nieuwe variabele wordt dan $N(t) = P(t)/\mathrm{K}$. Bovendien neemt men meestal K = 1. De vergelijkingen zijn dan:

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \mathrm{c} \cdot N(t) \cdot \big(1 - N(t)\big) \cdot \Delta t$$
$$N\,'(t) = \mathrm{c} \cdot N(t) \cdot \big(1 - N(t)\big)$$

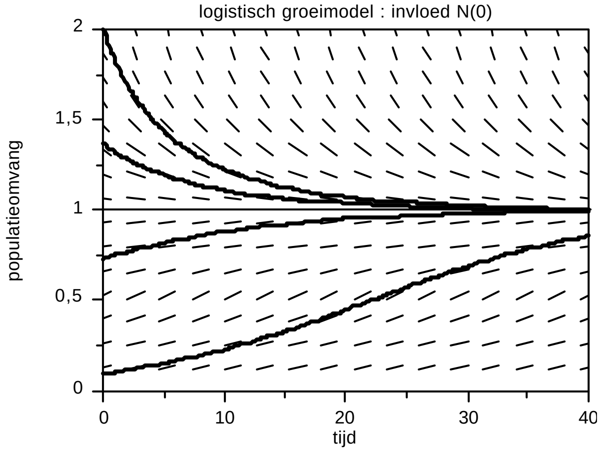
In continue dynamische modellen heb je ook geleerd dat er een direct voorschrift voor de logistische groeikromme bestaat. De oplossing van de differentiaalvergelijking is:

$$N(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{A}.\mathbf{e}^{-ct}}, \text{ met A } = \frac{1 - N(0)}{N(0)}$$

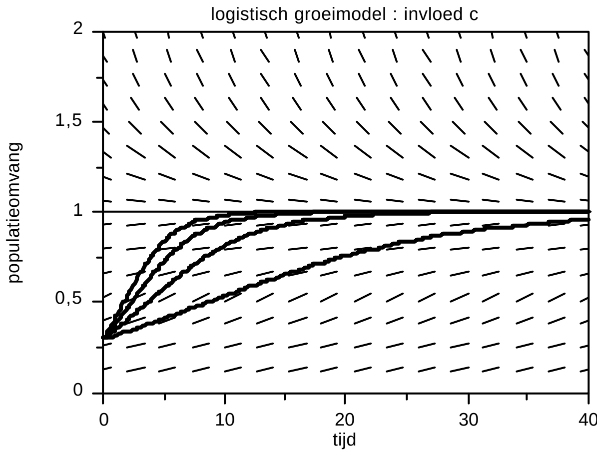
Omdat de e-macht steeds dichter bij 0 komt als t groter wordt, gaat N uiteindelijk naar 1. De populatie groeit dus naar de waarde K. Vrij voor de hand liggend als je bedenkt er bij omvang K geen groei meer is.
De waarden van c (c > 0) en N(0) hebben geen invloed op die "eindwaarde".
In het onderstaande richtingsveld zie je de groeikromme waarvoor geldt dat c = 0,1 en $N(0)$ = 0,3. Het functievoorschrift is dan $N(t) = \dfrac{1}{1 + \frac{7}{3}.\mathbf{e}^{-0,1 \cdot t}}$



Hieronder zie je logistische groeikrommen voor verschillende waarden van $N(0)$, steeds geldt c = 0,1.



En in het plaatje hieronder zie je de invloed van de groeifactor c, nu geldt steeds $N(0) = 0,3$.



Ook het logistische groeimodel is in veel praktijksituaties weinig realistisch. De groei van een populatie wordt immers beïnvloed door de seizoenen. Maar het logistische groeimodel vormt een basismodel. In de opdrachten wordt dit model verder uitgebreid.

De logische groeikromme wordt het "duidelijkst" beschreven door het functievoorschrift. Daaraan kun je direct zien wat er gebeurt als c of $N(0)$ groter wordt De afleiding van die formule is echter niet eenvoudig.
Ook voor de modellen in de volgende hoofdstukken is dat een moeilijke en soms onmogelijke klus. De differentiaalvergelijkingen zijn daarvoor te ingewikkeld. Gelukkig kun je de variabelen altijd numeriek bestuderen met behulp van de differentievergelijking. Je kunt tabellen en grafieken maken en op die manier de invloed van de parameters van het model onderzoeken.

1.2 Opdrachten

opdracht 1.2.1
Er bestaan verschillende pakketen waarmee je continue dynamische modellen kunt onderzoeken. Voorbeelden zijn ODE-Architect, Dynasys, Dynamics solver, IP-coach, Mathematica, Maple, Matlab en VU-grafiek. Elk pakket heeft voor- en nadelen. Maak met het pakket dat je ter beschikking hebt de twee laatste grafieken van paragraaf 1. Bestudeer als dat nodig is de handleiding of het instructieblad bij het pakket.

opdracht 1.2.2
In het logistische model ga je ervan uit dat er ook bij kleine populatie-omvang sprake is van groei. Dat geldt voor veel soorten niet. Denk aan mannetjesdieren die vrij geïsoleerd leven en op zoek moeten gaan naar vrouwtjes. Als de populatie te klein is dan wordt de kans op het vinden van een partner erg klein. Als je aanneemt dat de groei pas plaats kan vinden vanaf een zekere drempelwaarde d dan moet je de factor N vervangen door $N(t)$ - d.

De differentievergelijking wordt dan

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \mathrm{c}\cdot\left(N(t)-\mathrm{d}\right)\cdot\left(1-N(t)\right)\cdot\Delta t$$

Neem voor c de waarde 0,1 (de waarde uit paragraaf 1.1) en teken voor verschillende waarden van d uit <0 , 0,5> het richtingsveld met een aantal oplossingskrommen. Analyseer m.b.v. grafieken de gevolgen van deze aanname. Wat zijn de verschillen met het logistische model?

2 Modelleren

Het maken van een model is niet eenvoudig. In werkelijkheid zijn er meestal veel factoren die een rol spelen. In dit hoofdstuk zul je zien hoe je stap voor stap een model opbouwt. Het model in paragraaf 2.1 ben je misschien al eerder tegengekomen. Het beschrijft hoe een voorwerp wordt opgewarmd in een omgeving waarin de temperatuur constant blijft. In paragraaf 2.3 wordt die eis losgelaten. Dan is ook de omgevingstemperatuur variabel. In de opgaven mag je laten zien dat je met model kunt werken maar bovendien moet je voor een aantal nieuwe situaties modellen opstellen. Verder maak je in dit hoofdstuk kennis met een veldplot. Met een veldplot kun je het verband tussen twee variabelen visualiseren.

Inhoud van dit Hoofdstuk

2.1 Modelleren is vereenvoudigen ...

Niet alleen populaties worden bestudeerd met continue dynamische modellen. De natuurwetenschappen zitten vol met dynamische variabelen. Denk aan de beweging van een vallend voorwerp of aan de concentratie van een vloeistof waarin een bepaalde stof wordt opgelost. Ook de hoeveelheid zuurstof in een café verandert voortdurend. Een ander duidelijk voorbeeld is de temperatuur van een voorwerp dat plotseling in een gekoelde of verwarmde ruimte terecht komt.

Een van de moeilijkste problemen is het opstellen van het model. Het is verstandig om te starten met een eenvoudig model. Dat houdt in dat je eerst eenvoudige aannamen neemt. Bekijk een pizza die je in een voorverwarmde oven zet. De pizza heeft een bepaalde starttemperatuur; bijvoorbeeld 6 graden Celsius. De oven heeft een temperatuur van 220 graden Celsius. Op het moment dat je de pizza in de oven zet wordt de pizza verwarmd. Hoe de warmte uitwisseling precies verloopt is niet duidelijk. De oven zal ook in temperatuur dalen. Dat maakt het model echter meteen moeilijk want er zijn dan twee temperaturen die veranderen. Daarom is het verstandig om te veronderstellen dat de temperatuur van de oven constant 220° Celsius blijft. Het verwarmingselement werkt dus bijzonder goed en snel.

Door deze aanname wordt de situatie overzichtelijker. De pizza wordt warmer. Maar de volgende stap is de vraag: hoe wordt de pizza warmer? Voor de differentievergelijking houdt dat in dat je je afvraagt hoeveel graden de pizza stijgt in een tijdsduur Δt.

$$T_{\text{pizza}}(t+\Delta t)=T_{\text{pizza}}(t)+\,?$$

Ook nu moet je aannames doen. De meest eenvoudige aanname zou zijn dat de toename evenredig is met de lengte van de tijdsduur Δt. Dat betekent dat elke tijdseenheid neemt de pizza eenzelfde aantal graden toe in temperatuur. Natuurlijk mag je deze aanname doen. Je krijgt dan de vergelijking:

$$T_{\text{pizza}}(t+\Delta t)=T_{\text{pizza}}(t)+\mathrm{c}\cdot\Delta t$$

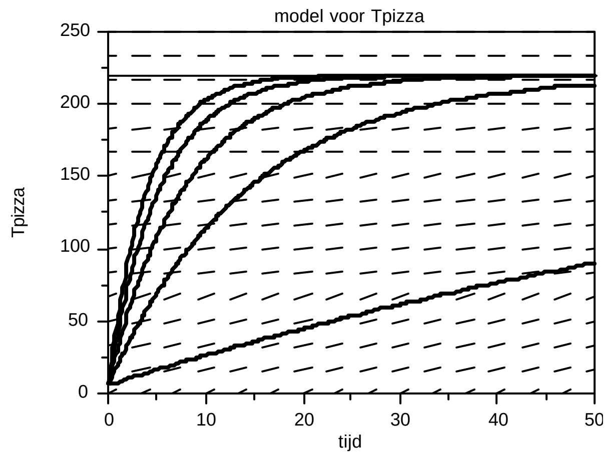
Dat houdt in dat de temperatuur lineair stijgt. Maar dat staat ver af van de ervaring. In het begin is het verschil 214° Celsius. Veel later is het verschil veel kleiner. De warmteuitwisseling zal dan veel kleiner zijn.
Een realistischere aanname is de aanname dat de temperatuurtoename **ook** evenredig is met het verschil in temperatuur tussen de oven en de pizza, dus met (220 - T_{pizza}). Natuurlijk moet je voor de T_{pizza} de temperatuur aan het begin van het tijdsinterval nemen. Die benadering is goed als *Dt* klein is.

De differentievergelijking wordt dan:

$$T_{\text{pizza}}(t+\Delta t)=T_{\text{pizza}}(t)+\mathrm{c}\cdot\left(220-T_{\text{pizza}}(t)\right)\cdot\Delta t$$

De parameter c in deze vergelijking is een positief getal, de pizza stijgt immers in temperatuur. Deze vergelijking zal de wekelijkheid waarschijnlijk beter beschrijven dan de eerste vergelijking. Het is zinvol om dit model door te rekenen en te vergelijken met werkelijke metingen. De eindtemperatuur van de pizza zal in dit model 220° Celsius worden.

In het onderstaande figuur zie je de temperatuur van de pizza in de tijd voor verschillende waarden van c.



Overigens is dit model al beschreven door Newton. De bijbehorende differentiaalvergelijking is algemeen:

$$T\,'(t) = \text{c} \cdot \left(T_{\text{omgeving}} - T(t)\right) \text{ met c} > 0$$

Als T_{omgeving} kleiner is dan de begintemperatuur van het voorwerp dan zal het voorwerp afkoelen, in de andere situatie is er sprake van opwarmen.

2.2 Opdrachten

opdracht 2.2.1
De pizza "uit paragraaf 2.1" wordt in de oven geplaatst. Uit eerdere metingen is bekend dat de evenredigheidsconstante in het model gelijk is aan 0,018°C per minuut.

a) Na hoeveel minuten is de temperatuur 100°C als de oventemperatuur 220° is en blijft?
b) In werkelijkheid is de pizzatemperatuur al na 13 minuten 100° C. Bepaal een betere waarde voor de evenredigheidsconstante.

opdracht 2.2.2
De politie vindt in een koud onverwarmd huis waar een temperatuur van 13°C heerst het dode lichaam van een man. Alles wijst erop dat de man gewelddadig aan zijn einde gekomen is. De temperatuur van het lijk is 32,0°C. Als de anatoompatholoog twee uur later arriveert dan is de lichaamstemperatuur nog maar 30,0°C.
Als je aanneemt dat het dode lichaam afkoelt volgens de in paragraaf 2.1 beschreven koelwet dan kun je het tijdstip van overlijden schatten. Op welk tijdstip is de man (vermoedelijk) vermoord?

opdracht 2.2.3
De differentiaalvergelijking $T'(t) = \text{c} \cdot \left(T_{\text{omgeving}} - T(t)\right)$ is exact oplosbaar.

a) Laat zien dat $T(t) = \text{A} + \text{B} \cdot e^{-\text{c}t}$ voor "geschikte waarden" van A en B aan de differentiaalvergelijking voldoet. Geef de begintemperatuur met $T(0)$ aan.
b) Bepaal m.b.v. de formule uit a) de antwoorden van opdracht 2.2.1.

2.3 Modelleren is vereenvoudigen ... en dan weer complexer maken

In de vorige paragraaf is de temperatuur van de oven constant verondersteld. Als je die eis laat vallen dan ontstaat er een model waarin twee variabelen onbekend zijn. De temperatuur van de pizza en de temperatuur van de oven. Beide temperaturen zijn op tijdstip t = 0 bekend:

$T_{\text{pizza}}(0) = 6°\text{C}$ en $T_{\text{oven}}(0) = 220°\text{C}$

Dit keer zul je twee differentievergelijkingen moeten opstellen. Maar je kunt natuurlijk wel weer de oude modeleis gebruiken: de toename van de pizza is evenredig met het temperatuurverschil tussen pizza en oven:

$$T_{\text{pizza}}(t + \Delta t) = T_{\text{pizza}}(t) + \text{c} \cdot \left(T_{\text{oven}}(t) - T_{\text{pizza}}(t)\right) \cdot \Delta t \quad \text{met} \quad \text{c} > 0$$

Voor de temperatuur van de oven kun je dezelfde vergelijking gebruiken. Je moet dan wel uitgaan van een temperatuurafname: de oven daalt immers in temperatuur. Je moet dus eisen dat de parameter d dit keer negatief is

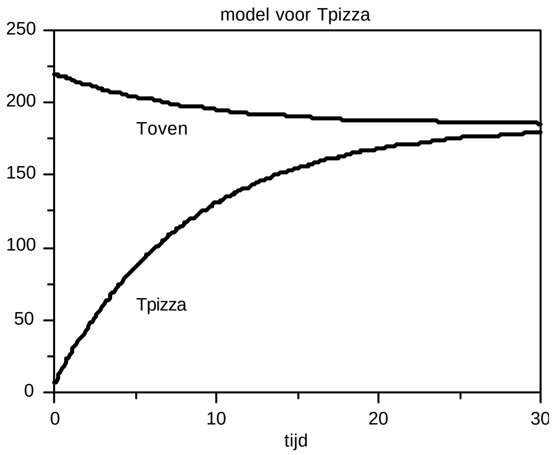
$$T_{\text{oven}}(t + \Delta t) = T_{\text{oven}}(t) + \text{d} \cdot \left(T_{\text{oven}}(t) - T_{\text{pizza}}(t)\right) \cdot \Delta t \quad \text{met} \quad \text{d} < 0$$

De twee differentievergelijkingen in het model zijn

$$\begin{cases} T_{\text{pizza}}(t + \Delta t) = T_{\text{pizza}}(t) + \text{c} \cdot \left(T_{\text{oven}}(t) - T_{\text{pizza}}(t)\right) \cdot \Delta t \\ T_{\text{oven}}(t + \Delta t) = T_{\text{oven}}(t) + \text{d} \cdot \left(T_{\text{oven}}(t) - T_{\text{pizza}}(t)\right) \cdot \Delta t \end{cases}$$

De begintemperaturen zijn: $T_{\text{pizza}}(0) = 6°\text{C}$ en $T_{\text{oven}}(0) = 220°\text{C}$

Met deze differentievergelijkingen kun je nu het verloop van de temperaturen bestuderen. Hieronder zie je voor c = 0,1 en d = -0,02 het verloop van beide temperaturen in een grafiek.



De temperatuur van de pizza stijgt en die van de oven daalt naar een evenwichtstemperatuur. Als de temperaturen elkaar naderen dan wordt de afname van de oventemperatuur en de toename van de pizzatemperatuur steeds kleiner. Als c = 0,1 en d = -0,02 dan is die evenwichtstemperatuur ongeveer 180°C.

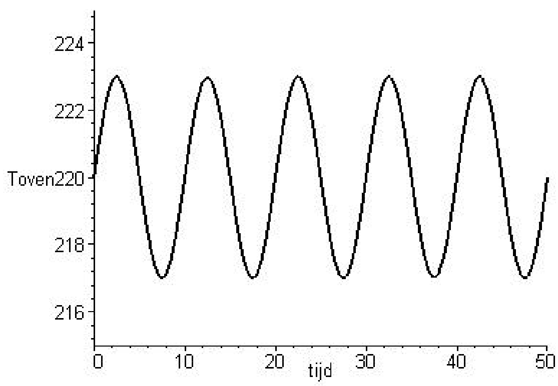
Een interessante vraag is nu natuurlijk: wat is het verband tussen de parameters a en b en de evenwichtstemperatuur? Het antwoord op die vraag kom je tegen in hoofdstuk 3.

2.4 Opdrachten

opdracht 2.4.1
Deze opgave gaat over het model in paragraaf 2.3. Ga uit van de waarden c = 0,1 en d = -0,02 en de begintemperaturen $T_{\text{pizza}}(0)$ = 6°C en $T_{\text{oven}}(0)$ = 220°C

a) Op welk tijdstip is de temperatuur van de pizza 100°C?
b) Bepaal de evenwichtstemperatuur op hele graden nauwkeurig.
c) Onderzoek de invloed van de parameters c, d, $T_{\text{pizza}}(0)$ en $T_{\text{oven}}(0)$. Ga steeds na hoe de grafieken veranderen als je één parameter verandert.

opdracht 2.4.2
In het pizzamodel werd verondersteld dat de temperatuurafname evenredig is met $T_{\text{oven}} - T_{\text{pizza}}$. Dat is niet realistisch. In de oven zit een thermostaat die ervoor zorgt dat de temperatuur van de oven varieert rond 220°C.
Hiernaast zie je de grafiek die de temperatuurschommeling om die 220°C weergeeft.



a) Bepaal een functievoorschrift voor T_{oven}.
b) Stel de nieuwe differentievergelijking op die uitgaat van de in a) bepaalde formule voor Toven.
c) Hoe ziet het richtingsveld er nu uit?
d) Hoe ziet de grafiek van de pizzatemperatuur eruit? Neem weer aan dat c = 0,1 en dat $T_{\text{pizza}}(0) = 6$°C.
e) Welke temperatuur krijgt de pizza nu "na lange tijd" ?

2.5 Richtingsvelden bij twee variabelen

Het pizzamodel in paragraaf 2.3 wordt beschreven door het volgende stelsel (gekoppelde) differentievergelijkingen:

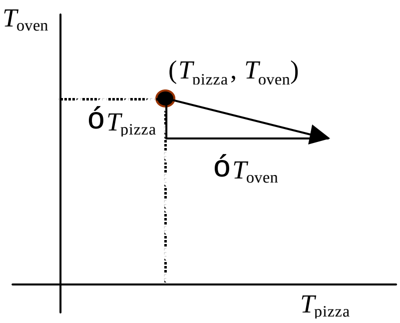
$$\begin{cases} T_{\text{pizza}}(t+\Delta t) = T_{\text{pizza}}(t) + \text{ c} \cdot \left(T_{\text{oven}}(t) - T_{\text{pizza}}(t)\right) \cdot \Delta t \\ T_{\text{oven}}(t+\Delta t) = T_{\text{oven}}(t) + \text{ d} \cdot \left(T_{\text{oven}}(t) - T_{\text{pizza}}(t)\right) \cdot \Delta t \end{cases}$$

Bij dit stelsel kun je niet meer een richtingsveld maken waarbij je op de x-as de tijd t en op de y-as de temperatuur van de pizza uitzet. Je weet immers niet hoe groot de temperatuur van de oven is op een willekeurig tijdstip en dus kun je de richting van het stukje raaklijn niet berekenen.

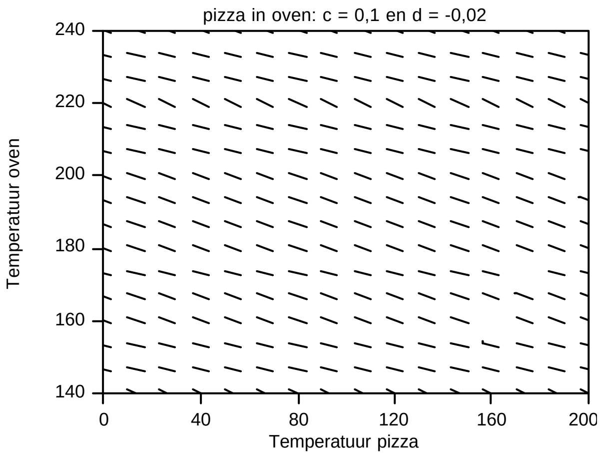
Toch bestaat er een ander plaatje waarin je het onderlinge gedrag van de variabelen goed kunt zien. Er geldt namelijk:

$$\frac{T_{\text{oven}}(t+\Delta t) - T_{\text{oven}}(t)}{T_{\text{pizza}}(t+\Delta t) - T_{\text{pizza}}(t)} = \frac{\Delta T_{\text{oven}}}{\Delta T_{\text{pizza}}} = \frac{\text{d}}{\text{c}}$$

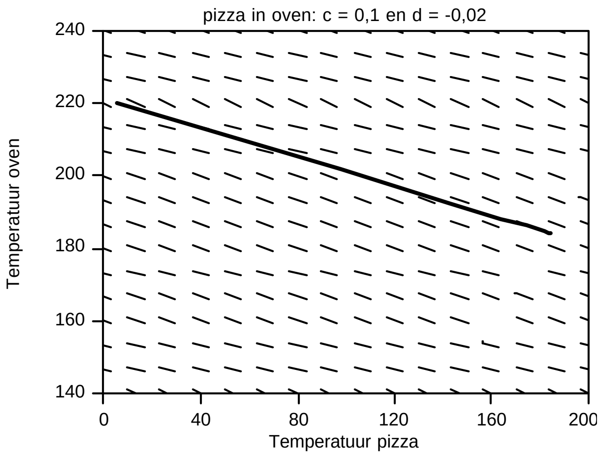
Deze vergelijking geeft aan dat de toe- of afname van de temperatuur van de pizza evenredig is met de toe- of afname van de temperatuur van de oven. Als c = 0,1 en d = -0,02 dan is de verhouding -1/5.
Het maakt daarbij niet uit wat de temperatuur van de oven en de pizza is. In een willekeurig punt (T_{pizza} , T_{oven}) kun je dus een stukje raaklijn tekenen met richting -1/5.



Als je in veel punten een stukje raaklijn uitzet dan krijg je het richtingsveld. dat hieronder staat. In dit geval is het ontstane veld zeer overzichtelijk. Bovendien "zie" je nu duidelijk de samenhang tussen de beide temperaturen. Die samenhang is lineair.



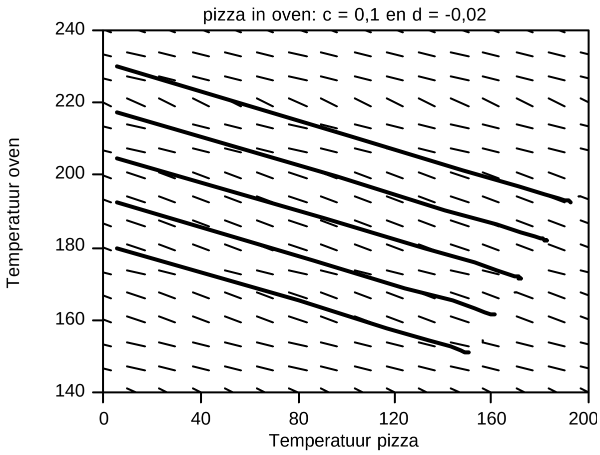
In het onderstaande plaatje zie je het veld **en** de oplossing die door het punt (6 , 220) gaat. Die oplossing is een rechte lijn. De lijn die door de begintemperaturen (6 , 220) gaat en richtingscoëfficiënt d/c = -1/5 heeft.



Het voorschrift van de getekende rechte lijn is dus:

$$T_{\text{oven}} = -0{,}2 \cdot \left(T_{\text{pizza}} - 6\right) + 220 \text{ of } T_{\text{pizza}} = -5 \cdot \left(T_{\text{oven}} - 220\right) + 6$$

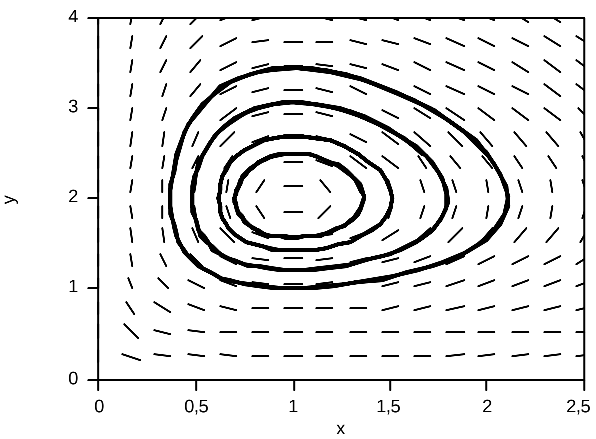
Ook bij andere waarden van c en d en bij andere starttemperaturen vind je een lineair verband tussen de twee temperaturen. In het volgende plaatje zie je de invloed van de begintemperatuur van de oven.



In dit plaatje kun je niet zien hoe de temperatuur van de pizza **in de tijd** toeneemt en hoe de temperatuur van de oven **in de tijd** afneemt.
Ook zie je niet dat de beide temperaturen naar een evenwicht toegaan.

Dat zie je alleen in de tijdgrafieken. De figuren hierboven noem je een veldplot. Het maken van zo' n veld is een kleine klus met geschikte software. Hieronder zie je een gedeelte van het veld dat hoort bij het model.

$$x(t+\Delta t) = x(t) + x(t)\cdot\left(2 - y(t)\right)\cdot\Delta t$$
$$y(t+\Delta t) = y(t) + y(t)\cdot\left(x(t) - 1\right)\cdot\Delta t$$



Dit patroon is veel ingewikkelder. Het verband tussen de toename in x en de toename in y wordt dit keer bepaald door de waarde van x en y. In het punt (2 , 3) bijvoorbeeld is de richting gelijk aan –3 / 2.

In dit veld zie je ook een aantal krommen die de samenhang tussen x en y tonen. Bij elke kromme hoort een ander beginpunt ($x(0)$, $y(0)$). Duidelijk wordt dat x en y periodiek in de tijd verlopen. De tijd-grafieken zullen dus beide periodiek zijn. In de volgende paragraaf wordt dat verder besproken.

2.6 Opdrachten

opdracht 2.6.1

Ga uit van het "pizza in oven" - model van paragraaf 2.3. Hieronder staan enkele meetresultaten.

t(minuten)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
T_{pizza} (°C)	6	62	100	130	150	163	173	180	185	188
T_{oven} (°C)	220	213,28	208,72	205,12	202,72	201,16	199,96	199,12	198,52	198,16

Bepaal met behulp van formules in paragraaf 2.5 "goede" waarden voor de parameters c en d.

opdracht 2.6.2

In het begin van deze eeuw heeft F.W. Lancaster (1868 -1946) het onderstaande model gebruikt bij de analyse van een veldslag.

$$x(t+\Delta t) = x(t) - \mathrm{a}\cdot y(t)\cdot \Delta t$$
$$y(t+\Delta t) = y(t) - \mathrm{b}\cdot x(t)\cdot \Delta t$$

Hierin stellen x en y de omvang van twee legers A en B voor die met elkaar slaags raken; a is de gevechtsefficiëntie van leger A, b van leger B.

a) Kun je uitleggen waarom a de gevechtsefficiëntie van leger A wordt genoemd.
b) Maak een veldplot voor a = 0,8 en b = 0,6. Neem x en y tussen 0 en 5 eenheden.
c) Teken een aantal oplossingskrommen in de veldplot.

De veldslag eindigt als x of y gelijk is aan nul.

d) Stel dat $x(0) = 4$. Onderzoek voor verschillende startwaarden $y(0)$ de uitslag van de veldslag.
e) Voor welke waarden van $y(0)$ "wint" leger A (als a = 0,8 , b = 0,6 en $x(0) = 4$)?
f) Als $y(0) = 2$ dan verliest leger B als a = 0,8 , b = 0,6 en $x(0) = 4$. Hoe groot moet de gevechtsefficiëntie b maximaal zijn om niet te verliezen?

opdracht 2.6.3

In paragraaf 2.5 is gebleken dat er een lineair verband tussen de temperatuur van de oven en van de pizza bestaat.
Als c = 0,1 en d = -0,02 dan geldt $T_{oven} = -0{,}2\cdot\left(T_{pizza} - 6\right) + 220$.
Dit verband kun je in de eerste differentievergelijking substitueren.

a) Toon aan: $T_{\text{pizza}}(t+\Delta t) = T_{\text{pizza}}(t) + (22{,}12 - 0{,}12\cdot T_{\text{pizza}})\cdot \Delta t$
b) Bepaal de differentiaalvergelijking bij de differentievergelijking in onderdeel a.

c) Laat door controle zien: $T_{\text{pizza}}(t) = \frac{553}{3} - \frac{535}{3} \cdot e^{-0{,}12 \cdot t}$

d) Bepaal een formule voor de temperatuur van de oven.

e) Welke temperatuur krijgen de pizza en de oven "na lange tijd" ? Vergelijk dit antwoord met het resultaat bij opdracht 2.4.1b

3 Evenwicht

In veel modellen gedraagt de variabele zich in het begin vrij grillig. Maar naarmate de tijd verstrijkt verandert de variabele steeds minder en uiteindelijk gedraagt de variabele zich dan als een constante. In de modellen van hoofdstuk 2 werd de temperatuur van de oven en van de pizza uiteindelijk constant. Wiskundig zeg je dan dat de variabele naar een limiet of een evenwicht gaat. In dit hoofdstuk staat evenwichten centraal. Je zult o.a. leren hoe je evenwichten kunt berekenen als er sprake is van een variabele maar ook als er sprake is van meer variabelen. Ook zul je zien dat er modellen zijn waarin de variabelen niet naar de evenwichtswaarden gaan. maar waar de variabelen gaan "slingeren" om een evenwicht.

Inhoud van dit Hoofdstuk

3.1 Evenwichten bepalen bij één variabele

Vaak ben je in een model vooral geïnteresseerd in het gedrag na lange tijd. Je vraagt je dan af of de variabelen naar een vaste waarde gaan. Als dat het geval is dan is er een evenwichtsoplossing. Door numerieke berekeningen wordt dat gedrag goed zichtbaar. De precieze waarde van het evenwicht is echter moeilijk te zien. Die waarde(n) worden immers door de waarden van de parameters van het model.

De evenwichtswaarden kun je echter ook met de vergelijkingen van het model vinden. Dat kan op verschillende manieren.

<u>voorbeeld 1</u>
Bekijk als voorbeeld weer het bekende logische groeimodel. In dat model groeit de populatie naar de evenwichtswaarde $N(t) = 1$.

<u>manier 1</u>
Als je differentievergelijkingen gebruikt dan geldt bij evenwicht dat de nieuwe waarde gelijk is aan de oude waarde. Dus je mag stellen dat $N(t + Dt) = N(t) = N_e$.

Maar dan volgt uit $N(t + \Delta t) = N(t) + \mathrm{c} \cdot N(t) \cdot (1 - N(t)) \cdot \Delta t$ de vergelijking:

$$N_\mathrm{e} = N_\mathrm{e} + \mathrm{c} \cdot N_\mathrm{e} \cdot (1 - N_\mathrm{e}) \cdot \Delta t$$

dus

$$\mathrm{c} \cdot N_\mathrm{e} \cdot (1 - N_\mathrm{e}) \cdot \Delta t = 0$$

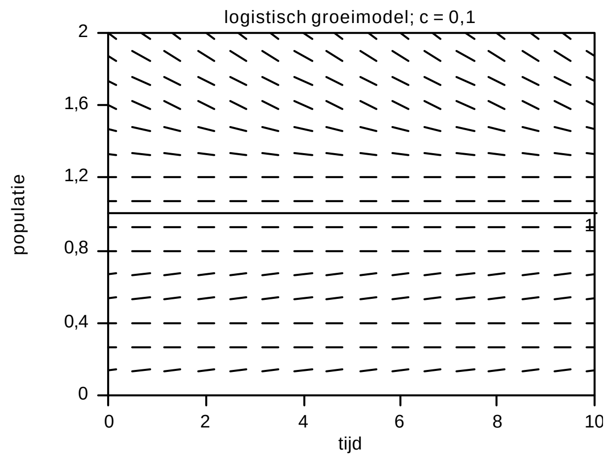
De oplossingen hiervan zijn $N_\mathrm{e} = 1$ en $N_\mathrm{e} = 0$

Overigens kun je aan de berekening niet zien naar welke evenwichts-oplossing de populatie groeit. Dat zie je aan de numerieke berekeningen of aan het richtingsveld.

<u>manier 2</u>
De differentiaalvergelijking is $N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (1 - N(t))$. In een evenwicht is er geen verandering meer en dus is de afgeleide $N'(t)$ dan gelijk aan 0:

$$N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (1 - N(t)) = 0 .$$
dus
$$N(t) = 0 \text{ of } N(t) = 1$$

En dat levert weer dezelfde evenwichtsoplossingen. In het richtingsveld zijn evenwichtsoplossingen horizontale lijnen.



In het plaatje zie je dat de lijnelementen boven de evenwichtsoplossing de oplossing “naar beneden duwen”, onder de evenwichtsoplossing “duwen de lijnelementen de oplossing naar boven” . Het evenwicht noem je dan stabiel. Alleen als je start met $N(0) = 0$ dan krijg je (de flauwe) evenwichtsoplossing 0.

<u>manier 3</u>
Als je een functievoorschrift kent dan kun je nagaan hoe de functie zich gedraagt voor "grote" t:

Als t naar oneindig gaat, dan gaat $\mathbf{e}^{-ct}$ naar 0 (bedenk c > 0) en dus gaat $N(t) = \dfrac{1}{1 + A.\mathbf{e}^{-ct}}$ naar 1.

Op deze manier weet je meteen zeker dat de variabele daadwerkelijk naar dit evenwicht toegaat.

In het volgende voorbeeld is de derde manier niet mogelijk omdat je geen directe formule voor de populatiegrootte kent.

voorbeeld 2

In een groeimodel gebruikt men de differentievergelijking:

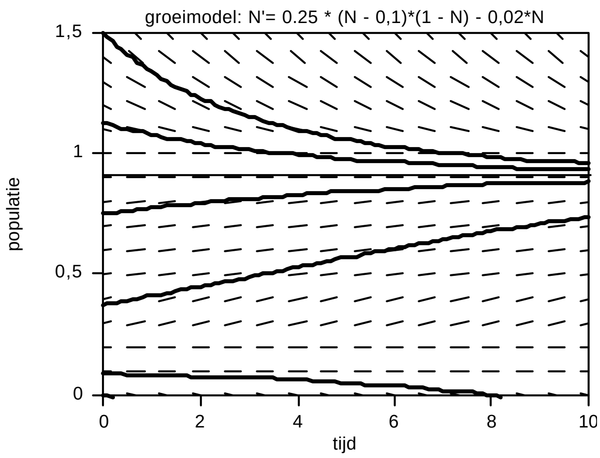
$$N(t+\Delta t) = N(t) + \mathrm{c} \cdot \big(N(t) - 0{,}1\big) \cdot \big(1 - N(t)\big) \cdot \Delta t - \mathrm{k} \cdot N(t) \cdot \Delta t$$
$$\text{met } \mathrm{c} > 0 \text{ en } 0 < \mathrm{k} < 1$$

In dit model is er sprake van afname als N < 0,1 omdat er onder die grens te weinig dieren zijn die kunnen zorgen voor genoeg aanwas: "de mannetjes en vrouwtjes vinden elkaar niet goed" (zie ook opdracht 2.2) Ook is er geen groei bij N = 1. Een modeleis uit het logistische model. De factor kN(t) houdt in dat k % van de populatie per tijdseenheid wordt gevangen.

De evenwichtsoplossingen vind je door substitutie van $N(t+\Delta t) = N(t) = N_{\mathrm{e}}$.
Je krijgt dan de vergelijking:

$$0 = \mathrm{c} \cdot \big(N_{\mathrm{e}} - 0{,}1\big) \cdot \big(1 - N_{\mathrm{e}}\big) - \mathrm{k} \cdot N_{\mathrm{e}}$$

Dit is een kwadratische vergelijking. De oplossingen zijn afhankelijk van c en k. Als c = 0,25 en k = 0,02 dan vind je met behulp van de abc-formule de oplossingen $N_{\mathrm{e}} \approx 0{,}11$ en $N_{\mathrm{e}} \approx 0{,}91$. In het veld kun je zien dat de eerste oplossing niet stabiel is en de tweede wel.



Ook wordt in de figuur duidelijk dat de populatie uitsterft als $N(0) < 0{,}11$. Als $N(0) \approx 0{,}11$ dan blijft de populatie constant en voor $N(0) > 0{,}1$ groeit de populatie naar ongeveer 0,91.

Menselijk ingrijpen zorgt er dus voor dat het evenwicht lager komt te liggen. Bij onderhandelingen over de hoeveelheid vis die gevangen mag worden zou dit model een goede rol kunnen spelen.

3.2 Opdrachten

opdracht 3.2.1
Deze opdracht gaat over het groeimodel in voorbeeld 2.

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \mathrm{c} \cdot \left(N(t) - 0{,}1\right) \cdot \left(1 - N(t)\right) \cdot \Delta t - \mathrm{k} \cdot N(t) \cdot \Delta t$$
$$\text{met } \mathrm{c} > 0 \text{ en } 0 < \mathrm{k} < 1$$

Stel je voor dat dit model gebruikt wordt om de hoeveelheid Tonijn in een bepaald gebied te beschrijven. De groeifactor c is gelijk aan 0,25. En verder is bekend dat er momenteel 0,5 eenheden Tonijn zijn.

a) Schets de oplossingskromme in het richtingsveld als k = 0,05.
b) Bereken het evenwicht voor k = 0,05
c) Voor welke k sterft de populatie uit?

Als k niet al te groot is dan zijn er twee evenwichten.

d) Bepaal formules voor die evenwichten en teken met een grafiekenprogramma de evenwichten in een grafiek. Zet k uit op de x-as.

Bij onderhandeling tussen de vissersorganisatie en overheid wordt afgesproken dat de populatie tonijnen niet onder de 0,4 mag komen.

e) Hoe groot mag k maximaal zijn?

Uit onderzoek blijkt dat de tonijnen in één grote school leven. Dat betekent volgens de vissers dat er gemakkelijk voortplanting plaatsvindt en dat de factor 0,1 in $N(t) - 0{,}1$ overbodig is.

f) Stel dat de vissers gelijk hebben, hoeveel vissen mogen ze dan per tijdseenheid vangen.

Ook met dat laatste resultaat is de vissersorganisatie niet tevreden en daarom beweren ze dat de tonijnen voldoende leefruimte hebben en dus niet logistisch maar volgens het groeimodel van Malthus groeien.

g) Bepaal het percentage dat er dan mag worden gevangen.

3.3 Evenwichten bepalen bij meer variabelen

Op dezelfde wijze als in paragraaf 3.1 kun je evenwichten van continue dynamische systemen analyseren waarbij meer variabelen een rol spelen. Je krijgt dan een stelsel vergelijkingen.

voorbeeld 1
In het model voor de pizza in de oven zijn de differentievergelijkingen.

$$\begin{cases} T_{\text{pizza}}(t+\Delta t) = T_{\text{pizza}}(t) + \text{c} \cdot \left(T_{\text{oven}}(t) - T_{\text{pizza}}(t)\right) \cdot \Delta t \\ T_{\text{oven}}(t+\Delta t) = T_{\text{oven}}(t) + \text{d} \cdot \left(T_{\text{oven}}(t) - T_{\text{pizza}}(t)\right) \cdot \Delta t \end{cases}$$

In het voorbeeld was c gelijk aan 0,1, d gelijk aan -0,02. In de tijdgrafiek van paragraaf 2.3 lijkt het erop dat beide temperaturen naar een zelfde evenwicht groeien. Dat evenwicht is ongeveer 180° Celsius. Dit evenwicht kun je ook via vergelijkingen vinden. Noem dat evenwicht T_e. Invullen in de differentievergelijkingen levert:

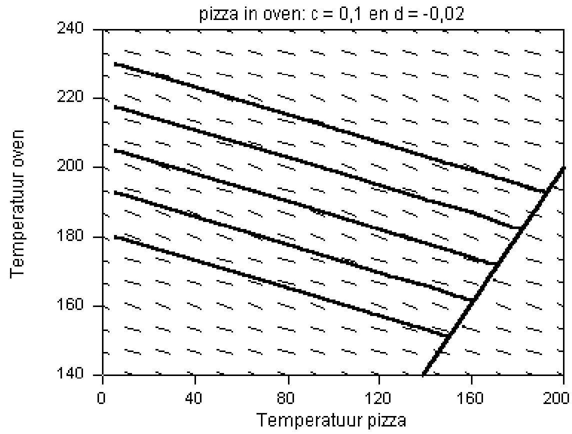
$$\begin{cases} T_\text{e} = T_\text{e} + 0{,}1 \cdot \left(T_\text{e} - T_\text{e}\right) \cdot \Delta t \\ T_\text{e} = T_\text{e} - 0{,}02 \cdot \left(T_\text{e} - T_\text{e}\right) \cdot \Delta t \end{cases}$$

Deze twee vergelijkingen zijn waar voor elke waarde van T_e. Zo'n stelsel heet afhankelijk en heeft oneindig veel oplossingen. Het stelsel levert dus geen informatie op over de evenwichtstemperatuur. In paragraaf 2.5 heb je echter ook gezien dat er lineair verband bestaat tussen de beide temperaturen:

$$T_{\text{oven}} = -0{,}2 \cdot \left(T_{\text{pizza}} - 6\right) + 220$$

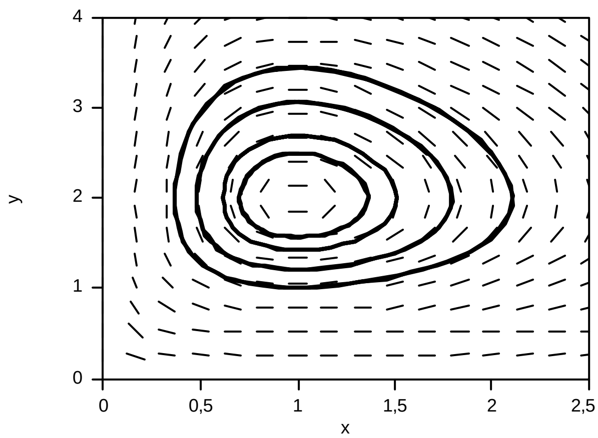
Als je in deze vergelijking substitueert $T_{\text{pizza}} = T_{\text{oven}} = T_\text{e}$ dan krijg je een lineaire vergelijking: $\text{T}_\text{e} = -0{,}2 \cdot \left(\text{T}_\text{e} - 6\right) + 220$ Deze vergelijking heeft precies één oplossing. Oplossen levert $T_\text{e} \approx 184{,}3$° Celsius.
Deze evenwichtstemperatuur wordt bepaald door de modelparameters c en d en bovendien door de begintemperaturen van de pizza en de oven. In het logistische groeimodel en de variant daarop in voorbeeld 2 van de vorige paragraaf speelt de beginwaarde geen rol.

De invloed van de begintemperaturen kun je zien als je in de veldplot de lijn $T_{\text{pizza}} = T_{\text{oven}}$ tekent. De oplossingskrommen eindigen op deze lijn, de eindpunten zijn de evenwichtstemperaturen.



voorbeeld 2
Hieronder zie je nogmaals de veldplot met een aantal xy-oplossingskrommen bij het stelsel uit paragraaf 2.5

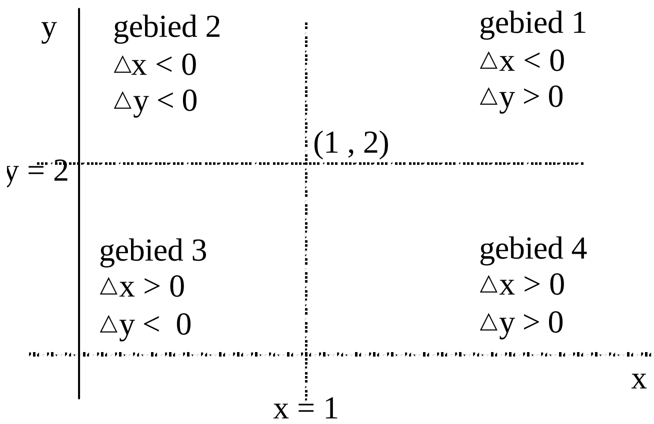
$$x(t+dt)=x(t)+x(t)\cdot\left(2-y(t)\right)\cdot dt$$
$$y(t+dt)=y(t)+y(t)\cdot\left(x(t)-1\right)\cdot dt$$



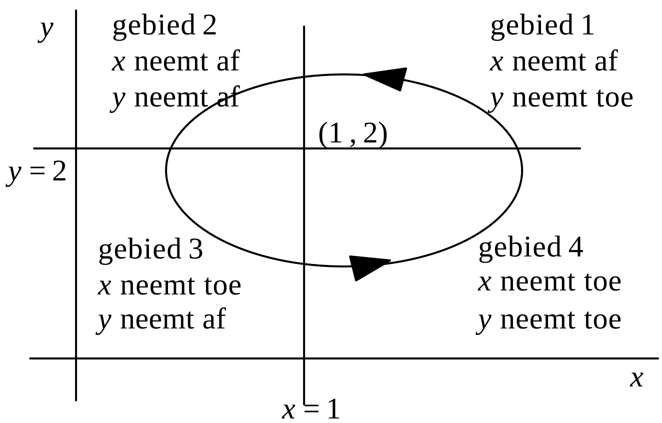
Dit keer gaan de variabelen niet naar een evenwicht toe. Toch is het zinvol om evenwichten te berekenen.
Stel dat x naar x_e en y naar y_e gaat. Deze waarden hoeven niet gelijk te zijn. Substitutie in het stelsel geeft dan:

$$\begin{cases} x_e\cdot\left(2-y_e\right)=0 \\ y_e\cdot\left(x_e-1\right)=0 \end{cases}$$

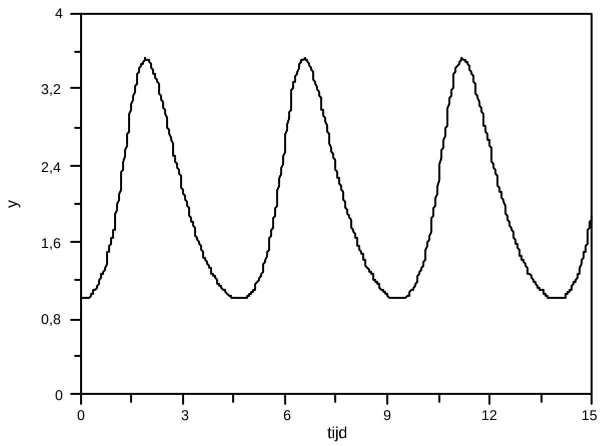
Uit de bovenste vergelijking volgt $x_e = 0$ of $y_e = 2$. Als je dat in de onderste vergelijking invult dan vind je de twee evenwichtspunten: (0 , 0) en (1 , 2). Als je start in die twee punten dan blijf je in dat punt. Het punt (0 , 0) zie je niet in de veldplot. Wel het punt (1 , 2). De oplossingskrommen beschrijven een lus om dat punt. Het gedrag van de variabelen kun je ook goed bestuderen als je de lijnen $x = 1$ en $y = 2$ tekent. Die twee lijnen verdelen het xy-vlak in vier delen.

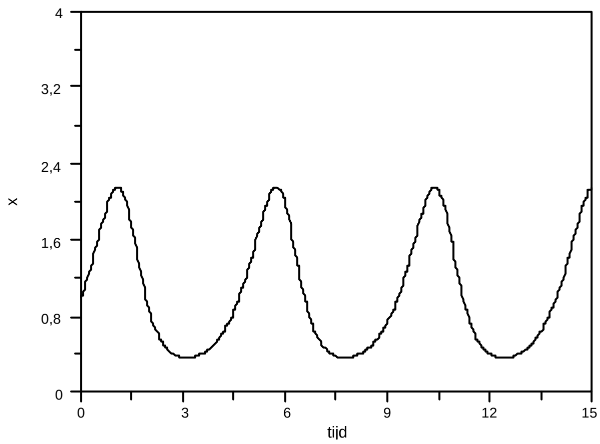


In gebied 1 is $x > 1$ en $y > 2$. Dat betekent dat in dat gebied de toename $\Delta x = x \cdot (2 - y) \cdot dt$ negatief is en de toename $\Delta y = y \cdot (x - 1) \cdot \Delta t$ positief. De kromme "loopt dus naar links en naar boven".
Op de lijn $x = 1$ is de toename van y gelijk aan nul. De kromme heeft daar een horizontale raaklijn. De kromme schiet" dan gebied 2 in. In gebied 2 neemt x nog altijd af en ook y neemt in dat gebied ook af en dus gaat de kromme naar "links en omlaag".
Op de lijn $y = 2$ heeft de kromme een verticale asymptoot. In gebied 3 neemt x weer toe maar blijft y dalen. In gebied 4 tenslotte neemt de x en de y toe totdat de kromme weer in gebied 1 komt. De oplossingskromme wordt dus tegen de wijzers van de klok in doorlopen.



Het verloop van de variabelen in de tijd kun je in de twee volgende grafieken zien. Bij die grafieken zijn x en y op tijdstip 0 gelijk aan 1. Omdat de xy-kromme gesloten is, zijn de grafieken van x en y in de tijd periodiek. Als x maximaal of minimaal is dan is y gelijk aan 2, als y maximaal of minimaal is dan is x gelijk aan 1. Het patroon van stijgen en dalen is verschoven.





In hoofdstuk 4 komen deze plaatjes terug. Ze horen bij een model dat de groei van roofdieren en prooidieren beschrijft.

3.5 Opdrachten

opdracht 3.5.1
In een bepaald model wordt het volgende stelsel gebruikt:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\big(1-x(t)+y(t)\big)\cdot\Delta t$$
$$y(t+\Delta t)=y(t)+\big(4-x(t)-y(t)\big)\cdot\Delta t$$

x en y zijn niet-negatieve getallen

a) Teken de veldplot met een (flink) aantal oplossingen. Neem x tussen 0 en 5 en y tussen 0 en 3
b) Zijn er evenwichten?
c) Hoe zien de xt - en yt -krommen eruit?

opdracht 3.5.2
In opdracht 3.6.3 ben je het model van Lancaster tegengekomen.

$$x(t+\Delta t)=x(t)-\mathrm{a}\cdot y(t)\cdot\Delta t$$
$$y(t+\Delta t)=y(t)-\mathrm{b}\cdot x(t)\cdot\Delta t$$

Hierin stellen x en y de omvang van twee legers A en B voor die met elkaar slaags raken; a is de gevechtsefficiëncy van leger A, b van leger B.

a) Bereken de evenwichten in dit model.

In het model ga je ervan uit dat er geen versterkingen mogelijk is. Een model dat daar rekening mee houdt is.

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\big(R_1(t)-\mathrm{a}\cdot y(t)\big)\cdot\Delta t$$
$$y(t+\Delta t)=y(t)+\big(R_2(t)-\mathrm{b}\cdot x(t)\big)\cdot\Delta t$$

De functies $R_1(t)$en $R_2(t)$stellen de versterkingsfuncties voor. Deze geven aan in welk tempo de legers nieuwe manschappen ontvangen

b) Maak een veldplot met oplossingskrommen voor a = 0,8 , b = 0,6 , $R_1(t)=2$ en $R_2(t)=2$. Neem x en y tussen 0 en 6.
c) Bereken de evenwichten en teken die in de veldplot
d) Onderzoek met behulp van de veldplot voor verschillende startwaarden van x en y de uitslag van de veldslag.
e) Stel dat $x(0)=4$. Voor welke $y(0)$ "wint" leger A?

4 Modellen in de biologie

Dynamische modellen worden zeel gebruikt in de biologie, in het bijzonder in de populatiedynamica. In dat onderdeel van de biologie wordt de groei van populaties bestudeerd. In hoofdstuk 1 of in je schoolboek voor wiskunde heb je al kennis gemaakt met het logistische groeimodel en het groeimodel van Malthus. In dit hoofdstuk maakt je kennis met varianten van het beroemde model van Lotka-Volterra, een model dat de interactie tussen twee diersoorten beschrijft en waarin logistische groei en Malthusiaanse groei gebruik wordt. Verder maak je kennis met een model dat de verspreiding van een epidemie beschrijft. Een onderwerp dat helaas voortdurend actueel is. Bij dat model zijn er zelfs drie variabelen: het aantal zieken, het aantal geïnfecteerden en het aantal gezonden. Het maken van een veldplot is dan onmogelijk.

Inhoud van dit Hoofdstuk

4.1 Roofdier-prooi-modellen

Met de logistische groeimodel beschrijf je de groei van een bepaalde populatie dieren of planten. In de opgaven heb je al gezien hoe je dat model uit kunt breiden. In dit hoofdstuk gebeurt dat ook. Het model wordt uitgebreid naar meer soorten. De eerste die deze vraag stelde was Humberto D'Ancona.

Humberto D'Ancona was een Italiaanse bioloog die in de twintiger jaren van deze eeuw onderzoek deed naar de populaties vissen in de Adriatische zee. D'Ancona vroeg aan zijn schoonvader Volterra, een wiskundige die leefde van 1860 tot 1940 of er een wiskundig model was dat de toename van roofvissen en de afname van prooivissen kon verklaren die hij observeerde gedurende de eerste WO (toen er vrijwel niet meer gevist werd!!!). In de maanden daarna ontwikkelde Volterra een aantal modellen voor de interactie tussen twee soorten.

Deze modellen noemt men tegenwoordig **roofdier-prooi-**modellen. Je kunt daarbij denken aan roofvissen en prooivissen, aan spinnen en vliegen, aan vossen en konijnen maar ook aan muskieten en mensen. De muskieten leven van de mens en zijn de roofdieren. De mens wordt gebruikt en is dus het prooidier.

De eerste stap is het opstellen van vergelijkingen voor de beide soorten als de andere soort afwezig is. Vanaf nu worden de prooidieren aangegeven met de letter P en de roofdieren met een R.
Je kunt bijvoorbeeld aannemen dat de prooidieren bij afwezigheid van de roofdieren logistisch groeien. Bij de vissen in de Adriatische zee is dat geen onrealistische aanname.

De vergelijking voor de prooidieren wordt dan

$$P(t+\Delta t) = P(t) + \mathrm{a} \cdot P(t) \cdot \left(1 - P(t)\right) \cdot \Delta t \quad \text{met a} > 0$$

Om het model niet meteen te ingewikkeld te maken kun je het beste aannemen dat de roofdieren uitsluitend leven van de prooidieren. Als die prooidieren er dan niet zijn, dan sterft de populatie roofdieren uit. Dat kun je eenvoudig beschrijven met de vergelijking:

$$R(t+\Delta t) = R(t) - \mathrm{b} \cdot R(t) \cdot \Delta t \quad \text{met b} > 0$$

Als je nu aanneemt dat er wel roofdieren zijn dan groeit de populatie prooidieren natuurlijk niet zo hard. Hoe meer roofdieren er zijn des te meer prooidieren er opgegeten wordt.

Dat betekent dat er in de differentievergelijking voor de prooidieren een factor moet worden opgenomen die afhankelijk is van het aantal roofdieren maar ook van het aantal prooidieren. Dat kun je als volgt inzien:

Stel dat er 1000 prooidieren zijn en 15 roofdieren en dat die prooidieren in een bepaalde tijdsperiode 30 prooidieren weten te vangen. Als er slechts 5000 prooidieren zouden zijn dan vangen de roofdieren natuurlijk geen 30 dieren meer. Het is dan namelijk veel moeilijker geworden om prooidieren te vangen. Omdat de kans op een ontmoeting tussen roofdier en prooi dan twee keer zo klein is, is het niet onredelijk om aan te nemen dat er nog maar 15 prooidieren gevangen worden. Deze overweging kun je ook maken bij verandering van het aantal roofdieren. Als er 30 roofdieren en 1000 prooidieren zijn dan vangen die roofdieren samen 60 prooidieren.

Een eenvoudig model dat rekening houdt met deze eisen krijg je als je aanneemt dat de afname van het aantal prooidieren evenredig is met het product van het aantal roofdieren en het aantal roofdieren. bovendien is die afname natuurlijk evenredig met het tijdinterval.

De nieuwe differentievergelijking wordt dan:

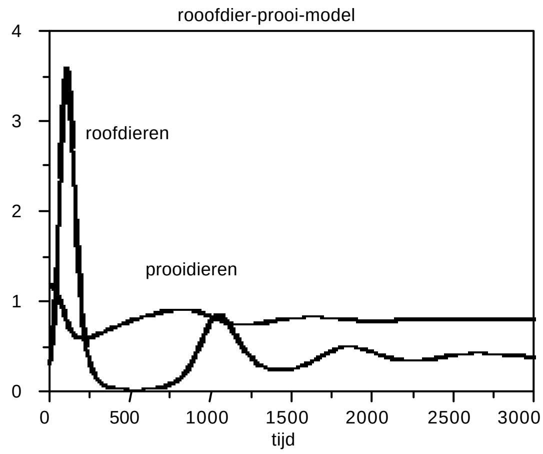
$$P(t+\Delta t) = P(t) + \mathrm{a} \cdot P(t) \cdot \left(1 - P(t)\right) \cdot \Delta t - \mathrm{c} \cdot P(t) \cdot R(t) \cdot \Delta t$$
met a, c > 0

Ook voor de toename van de roofdieren kun je het bovenstaande idee gebruiken: de toename van het aantal roofdieren is evenredig met het aantal roofdieren, het aantal prooidieren en de tijd.

$$R(t+\Delta t) = R(t) - \mathrm{b} \cdot R(t) \cdot \Delta t + \mathrm{d} \cdot P(t) \cdot R(t) \cdot \Delta t$$
met b, d > 0

Deze twee vergelijkingen worden gebruikt in een van de klassieke roofdieren-prooi-modellen. Deze modellen zijn ontwikkeld door Volterra.
Maar omdat de Amerikaanse bioloog Alfred J. Lotka in dezelfde tijd soortgelijke modellen opstelde worden de modellen nu de modellen van Lotka-Volterra genoemd.

Hieronder zie je het verloop van de populaties in de tijd voor a = 0,004 , c = 0,002 , b = 0,08 en d = 0,10.



De beginpopulaties zijn P(0) = 1,2 eenheden prooidieren en R(0) = 0,3 eenheden prooidieren.

De prooidieren nemen bij deze parameters in het begin flink af maar na een tijdje stabiliseren ze zich op een bepaald evenwicht. Dat geldt ook voor de roofdieren. Die populatie groeit eerst sterk en daalt daarna slingerend naar een evenwicht. Het evenwicht is een van de oplossingen van het stelsel:

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{a} \cdot P \cdot (1 - P) - \mathrm{c} \cdot P \cdot R \\ 0 = -\mathrm{b} \cdot R + \mathrm{d} \cdot P \cdot R \end{cases}$$

Uit de onderste vergelijking volgt $R = 0$ of $P = \mathrm{b}/\mathrm{d}$. Invullen in de bovenste vergelijking geeft de oplossingen (0 , 0) , (1 , 0) en $\left(\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}, \dfrac{\mathrm{a}(\mathrm{d}-\mathrm{b})}{\mathrm{cd}}\right)$.
Als a = 0,004 , c = 0,002 , b = 0,08 en d = 0,10 dan vind je met het achterste evenwicht $P = 0{,}8$ en R = 0,4. De waarden die je ook in de grafieken kunt aflezen.

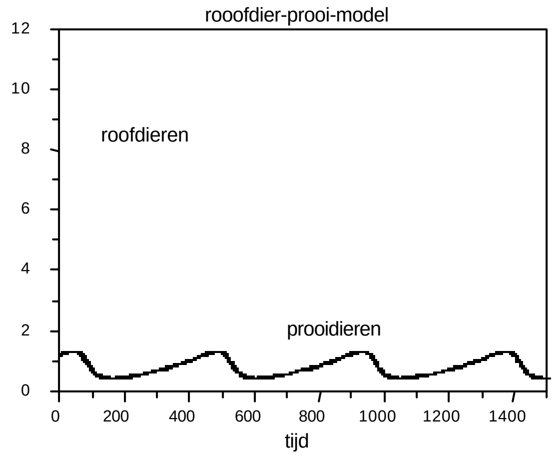
Het beginstuk van de grafieken verklaart fraai de observaties van de vispopulaties in de Adriatische zee die D'Ancona opmerkte.

Een model waarin de prooidieren exponentieel groeien in plaats van logistisch bij afwezigheid van de roofdieren is:

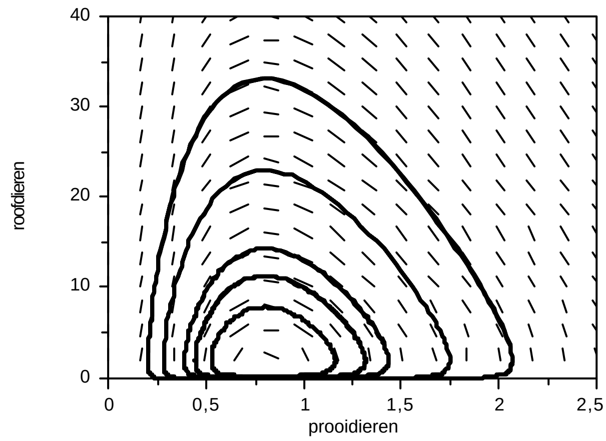
$$\begin{cases} P(t+\Delta t) &= P(t) + \mathrm{a}\cdot P(t)\cdot \Delta t - \mathrm{c}\cdot P(t)\cdot R(t)\cdot \Delta t \\ R(t+\Delta t) &= R(t) - \mathrm{b}\cdot R(t)\cdot \Delta t + \mathrm{d}\cdot P(t)\cdot R(t)\cdot \Delta t \end{cases}$$

met a, b, c en d > 0

Dit keer groeien de populaties niet naar een evenwicht maar is er sprake van een periodieke groei. In het onderstaande plaatje zie je de groei van de beide soorten. De waarden van de parameters zijn hetzelfde als bij het vorige model.



Dat periodieke karakter zie je ook fraai in de veldplot. In het onderstaande figuur zie je bovendien oplossingen voor verschillende startpopulaties



Natuurlijk is er kritiek mogelijk op deze modellen. De roofdieren raken nooit verzadigd. Als 15 roofdieren 30 van de 1000 prooidieren vangen en opeten dan zouden die 15 roofdieren er 300 vangen bij 10000 prooidieren. En bij 1000000 prooidieren vangen ze in dezelfde tijdsperiode 3000 prooidieren. Ook kun je kritiek hebben op de toename van de roofdieren. Die wordt ook steeds groter bij grotere aantallen prooidieren. Ook dat is biologisch gezien niet erg waarschijnlijk. Ook zijn er weinig roofdieren die slechts leven van een andere soort. Bij elke realistische situatie zal bestudering van het gedrag van de soorten leiden tot ingewikkeldere modellen.

4.2 Opdrachten

opdracht 4.2.1
Deze opdracht gaat o.a. over het roofdier-prooi in paragraaf 4.1

$$\begin{cases} P(t+\Delta t) &= P(t) + \text{a} \cdot P(t) \cdot (1 - P(t)) \cdot \Delta t - \text{c} \cdot P(t) \cdot R(t) \cdot \Delta t \\ R(t+\Delta t) &= R(t) - \text{b} \cdot R(t) \cdot \Delta t + \text{d} \cdot P(t) \cdot R(t) \cdot \Delta t \end{cases}$$

De parameters hebben de waarden a = 0,04 , c = 0,002 , b = 0,08 en d = 0,10. De beginpopulatie prooidieren is $P(0) = 0{,}3$ (eenheid).

a) Maak de veldplot met oplossingen erin bij dit model voor verschillende beginwaarden $R(0)$ tussen 0 en 1.
b) Bepaal het maximaal aantal prooidieren als $R(0) = 0{,}5$. Neem dt = 0,2
c) Groeien de populaties steeds naar een evenwicht? Zo ja, welk?
d) Geldt dat ook als de prooidieren exponentieel groeien bij afwezigheid van de roofdieren (en als de parameters gelijk zijn).

opdracht 4.2.2
Hieronder staat een model voor twee elkaar beconcurrerende soorten; a, b, c en d zijn niet-negatieve getallen.

$$\begin{cases} X(t+\Delta t) &= X(t) + \text{a} \cdot X(t) \cdot (1 - X(t)) \cdot \Delta t - \text{c} \cdot X(t) \cdot Y(t) \cdot \Delta t \\ Y(t+\Delta t) &= Y(t) + \text{b} \cdot Y(t) \cdot (1 - Y(t)) \cdot \Delta t - \text{d} \cdot X(t) \cdot Y(t) \cdot \Delta t \end{cases}$$

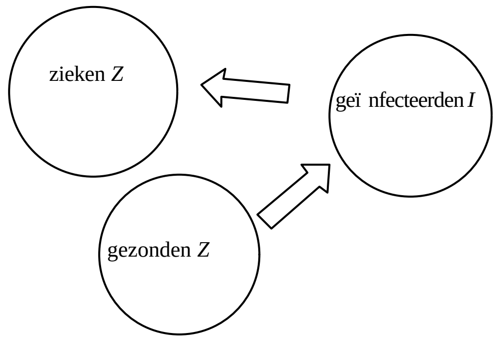
De aanwezigheid van de ene soort is nadelig van de andere soort en andersom. Uiteraard geldt $X(0)$ en $Y(0) > 0$.

a) Leg dat uit. Kun je een realistisch voorbeeld van deze situatie geven?
b) Hoe groeien de beide soorten bij afwezigheid van de andere soort.
c) Bereken alle evenwichtspunten?
d) Maak een veldplot met daarin een aantal oplossingen voor a = 0,2 , b = 0,075, c = 0,1 en d = 0,05.
e) Groeien de populaties naar een evenwicht. Zo ja, welk evenwicht?
f) En wat gebeurt er als a = 0,1?

4.3 Epidemieën

Bij roofdier-prooi-modellen is de groei van populaties aan elkaar gekoppeld. Dat geldt in zekere zin ook bij epidemieën.
Veel ziektes worden veroorzaakt door virussen. Die virussen verspreiden zich niet zelf maar worden overgebracht door een drager. Bij het griepvirus is dat een mens. Die persoon is geïnfecteerd met het virus. Dat betekent niet dat die persoon de ziekte heeft of krijgt. Het lichaam kan namelijk sterk genoeg zijn om het virus te overwinnen. Maar een geïnfecteerd iemand kan wel iemand anders met het virus besmetten en die persoon kan op zijn beurt wel ziek worden. In feite is er dus sprake van drie populaties;

1) de populatie die geïnfecteerd is en wellicht de ziekte krijgt:
   de geïnfecteerden *I*.
2) de geïnfecteerden die ook ziek zijn: de zieken *Z*
3) de (nog) niet geïnfecteerden die de ziekte (nog) niet hebben: de gezonden *G*



De vraag bij een epidemie is nu: hoe ontwikkelen de populaties *I*, *Z* en *G* zich?

Dit keer zijn er drie variabelen. De som van de drie aantallen is constant. Dat betekent dat je twee vergelijkingen nodig hebt. In de figuur zie je mogelijke overgangen van een persoon.
Een gezond persoon kan geïnfecteerd raken (en later ziek), een geïnfecteerd persoon kan ziek worden. Als je eenmaal ziek bent dan blijf je in die groep. Bij een vrij onschuldig griepepidemie wordt je natuurlijk weer gezond maar dat is een andere toestand dan "gezond" in het schema. Je bent dan immuun geraakt voor dat bepaalde griepvirus.

Een vergelijking voor *G*

De gezonden kunnen geïnfecteerd worden door de geïnfecteerde maar ook door de zieken, deze beide groepen dragen immers het virus. De kans dat je door een geïnfecteerd iemand wordt geïnfecteerd is echter veel groter dan door een ziek iemand. Immers zieken blijven vaak ziek in bed liggen terwijl geïnfecteerden vaak niet eens weten dat ze geïnfecteerd zijn en gewoon blijven rondlopen.
Voor het gemak kun je aannemen dat de besmetting door zieken verwaarloosbaar klein is. Het aantal gezonden dat geïnfecteerd raakt kun je evenredig veronderstellen met het product van het aantal gezonden en het aantal geïnfecteerde. Als er namelijk twee keer zoveel geïnfecteerden personen rondlopen worden er ook twee keer zoveel gezonden geïnfecteerd. En dat gebeurt ook bij een twee keer zo groot aantal gezonden. De differentievergelijking wordt onder deze aannamen:

$$G(t+dt) = G(t) - \mathrm{a}\cdot G(t)\cdot I(t)\cdot dt \qquad \mathrm{a} > 0$$

Een vergelijking voor *Z*

Ziek kunnen alleen de geïnfecteerden worden. Het aantal mensen dat ziek wordt is afhankelijk van de gezondheidstoestand van de bevolking. Een bepaald percentage zal ziek worden. Dat is te beschrijven met:

$$Z(t+\Delta t) = Z(t) + \mathrm{b} \cdot I(t) \cdot \Delta t \qquad \mathrm{b} > 0$$

Een vergelijking voor *I*

Het aantal geïnfecteerden ligt nu vast. De toename is gelijk aan de afname van het aantal gezonden, de afname is gelijk aan de toename van het aantal zieken. Dat levert:

$$I(t+\Delta t) = I(t) + \mathrm{a} \cdot G(t) \cdot I(t) \cdot \Delta t - b \cdot I(t) \cdot \Delta t$$

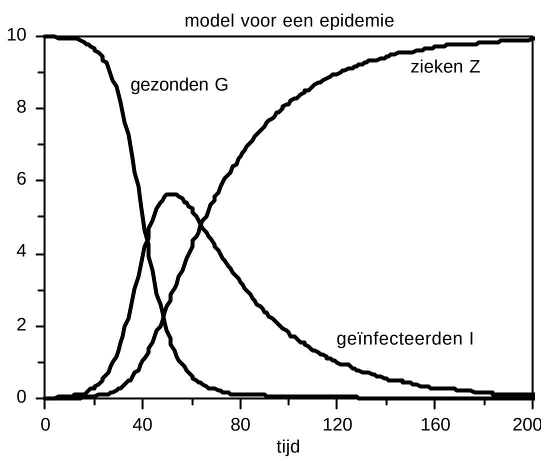
De drie differentievergelijkingen in dit model zijn dus:

$$\begin{cases} G(t+\Delta t) & = & G(t) - \mathrm{a} \cdot G(t) \cdot I(t) \cdot \Delta t \\ Z(t+\Delta t) & = & Z(t) + \mathrm{b} \cdot I(t) \cdot \Delta t \\ I(t+\Delta t) & = & I(t) + \mathrm{a} \cdot G(t) \cdot I(t) \cdot \Delta t - b \cdot I(t) \cdot \Delta t \end{cases}$$

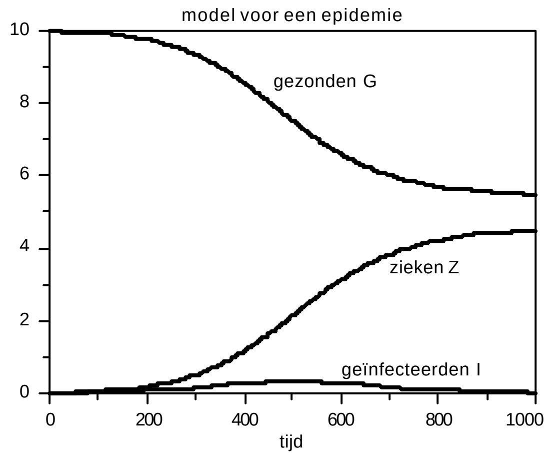
Er zijn veel evenwichten mogelijk. Uit

$$\begin{cases} 0 & = & -\mathrm{a} \cdot G \cdot I \\ 0 & = & \mathrm{b} \cdot I \\ 0 & = & +\mathrm{a} \cdot G \cdot I - b \cdot I \end{cases}$$

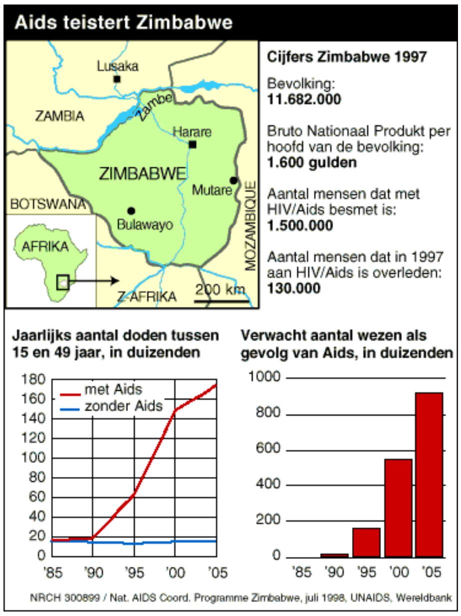
volgt $I = 0$. De andere twee variabelen zijn niet bepaald. Wel weet je dat $G + Z$ dan gelijk is aan het totale aantal mensen.
In het onderstaande plaatje staan de grafieken voor G, I en Z. De parameters die daarbij horen zijn a = 0,02, b = 0,03. De beginwaarden zijn $G(0) = 9{,}99$, $I(0) = 0{,}01$ en $Z(0) = 0$ eenheid.



Bij deze waarden van a en b wordt uiteindelijk iedereen ziek. De variabelen groeien naar de evenwichtsoplossing $I = 0$, $Z = 1$ en $G = 0$.
De overgang van gezond naar geïnfecteerd gaat sneller dan de overgang van geïnfecteerd naar ziek. Een ander beeld krijg je als a kleiner wordt. Dan groeit het aantal gezonden dat geïnfecteerd wordt minder snel. Als de overgang van geïnfecteerd naar ziek dan gelijk blijft (b gelijk)dan zullen uiteindelijk minder mensen ziek worden. Immers geïnfecteerden die ziek worden kunnen gezonden niet meer infecteren. In het onderstaande plaatje geldt a = 0,004 en b = 0,03.



Met dit eenvoudige model kun je natuurlijk niet zomaar een echte epidemie analyseren. Er zijn namelijk veel meer factoren die een rol spelen. Bijvoorbeeld:



- Zieken kunnen ook in aanraking komen met gezonden,
- Bij veel ziekten is het virus na een bepaalde tijd uitgewerkt. Een geïnfecteerd iemand kan dan niemand meer besmetten. De variabele tijd zal dan in het model verwerkt moeten worden;
- Het gebruik van medicijnen kan de kans op besmetting verkleinen;
- Ook moet je meer bevolkingsgroepen onderscheiden. Bij bepaalde ziekten is een gedeelte van de populatie gevoeliger voor infectie. Denk aan oudere mensen bij griep of aan risicogroepen bij Aids

De modellen worden dan steeds ingewikkelder. Ook is het niet eenvoudig om goede schattingen voor de modelparameters te vinden. Toch is het belangrijk dat deze schattingen gemaakt worden. Een epidemie als Aids heeft zeer grote gevolgen voor de toekomst

4.4 Opdrachten

opdracht 4.4.1
Deze opdracht gaat over het model voor een epidemie in paragraaf 4.2.

$$\begin{cases} G(t+\Delta t) & = & G(t) - \mathrm{a}\cdot G(t)\cdot I(t)\cdot \Delta t \\ Z(t+\Delta t) & = & Z(t) + \mathrm{b}\cdot I(t)\cdot \Delta t \\ I(t+\Delta t) & = & I(t) + \mathrm{a}\cdot G(t)\cdot I(t)\cdot \Delta t - b\cdot I(t)\cdot \Delta t \end{cases}$$

a) Het totaal aantal personen $N = G + I + Z$ is constant. Wat kun je dan zeggen over de som van de drie afgeleiden $G' + I' + Z'$

Neem N = 10 en stel dat er op $t = 0$ geen zieken zijn en dat 10% van de bevolking geïnfecteerd is. Neem verder aan dat a = 0,02.

b) Stel dat b = 0,01. Op welk tijdstip is het aantal geïnfecteerden maximaal?
c) Maak voor een flink aantal waarden van b tussen 0 en 0,4 de grafiek van I tegen t.

Men zegt dat er geen sprake is van een epidemie als I vanaf $t = 0$ dalend is. Boven een bepaalde drempelwaarde k voor b is er dus wel sprake van een epidemie.

d) Benader k grafisch.
e) Welk percentage van de populatie wordt bij deze drempelwaarde ziek?
f) De waarde k kun je ook met behulp van de modelvergelijkingen bepalen. Bereken k ook op die manier

opdracht 4.4.2
Hieronder staat een ander model voor een griepepidemie. De variabelen G, I en Z staan weer voor gezonden, geïnfecteerden en zieken. De parameters a, b en d zijn niet-negatief. Als d = 0 dan gaat dit model over in het model van § 4.3.

$$\begin{cases} G(t+\Delta t) & = & G(t) - \mathrm{a}\cdot G(t)\cdot I(t)\cdot \Delta t - \mathrm{d}\cdot G(t)\cdot Z(t)\cdot \Delta t \\ Z(t+\Delta t) & = & Z(t) + \mathrm{b}\cdot I(t)\cdot \Delta t \\ I(t+\Delta t) & = & I(t) + \mathrm{a}\cdot G(t)\cdot I(t)\cdot \Delta t - b\cdot I(t)\cdot \Delta t + \mathrm{d}\cdot G(t)\cdot Z(t)\cdot \Delta t \end{cases}$$

a) Welke extra aanname is er gemaakt?
b) Bepaal de evenwichten in dit model.
c) Neem d = 0,005 en a = 0,004, b = 0,03 en maak de drie tijdgrafieken.Neem als beginwaarden $G(0) = 9{,}99$, $I(0) = 0{,}01$ en $Z(0) = 0$ eenheid.Wordt iedereen ziek?
d) Idem c). Maar neem nu a = 0,02 (b = 0,03 en d = 0,005).
e) Analyseer de invloed van de parameter d op de groei van drie groepen.
f) Vergelijk dit model met het model uit paragraaf 4.3.

5 Modellen in de natuurkunde

In dit hoofdstuk gaat het over vallende en trillende voorwerpen. Bij het beschrijven van die bewegingen heb je de wetten van Newton nodig. Die wet zorgt ervoor dat je in de modellen tweede-orde differentiaalvergelijkingen tegenkomt. dat zijn differentiaalvergelijkingen waarin naast de variabelen zelf ook de eerste en tweede afgeleides staan. Je zult ook leren hoe je die vergelijkingen omschrijft naar een stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen. Met de methoden van hoofdstuk 3 kun je dan oplossingen vinden.

Inhoud van dit Hoofdstuk

5.1 Vallen

In de vorige hoofdstukken is vooral gebruik gemaakt van differentie-vergelijkingen. In de mechanica maak je meestal gebruik van differentiaalvergelijkingen. Dat gebeurt omdat de belangrijke bewegingswet van Newton in feite een differentiaalvergelijking is. Deze wet geeft het verband tussen de krachten die op het deeltje werkt en de versnelling $\boldsymbol{a}$ die het deeltje daardoor krijgt. De wet luidt in het kort:

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{m} \cdot \boldsymbol{a}$$

Hierin stelt m de massa van het deeltje voor. De kracht $\boldsymbol{F}$ is de resulterende kracht van alle krachten. De letters $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{a}$ zijn vet afgedrukt omdat de resulterende kracht en de versnelling vectoren zijn; ze hebben een grootte en een richting. De richting van de versnelling is gelijk aan de richting van de resulterende kracht.

Je kunt de beweging van het deeltje ook in een assenstelsel bestuderen. Je krijgt dan in het algemeen drie vergelijkingen. De resulterende kracht in de x-richting is dan gelijk aan de massa keer de versnelling in x-richting. Hetzelfde geldt voor de twee andere richtingen:

$$\boldsymbol{F}_x = m \cdot \boldsymbol{a}_x$$
$$\boldsymbol{F}_y = m \cdot \boldsymbol{a}_y$$
$$\boldsymbol{F}_z = m \cdot \boldsymbol{a}_z$$

Als de resulterende kracht verandert in de tijd dan verandert de versnelling ook in de tijd.

Nu is de versnelling niks anders als de verandering van de snelheid en de snelheid is op zijn beurt de verandering van de afgelegde weg. Dat betekent: voor de beweging in x-richting:

$$\boldsymbol{a}_x(t) = \boldsymbol{v}'_x(t) \text{ en } \boldsymbol{v}_x(t) = \boldsymbol{x}'(t) \text{ dus } \boldsymbol{a}_x(t) = \boldsymbol{x}''(t)$$

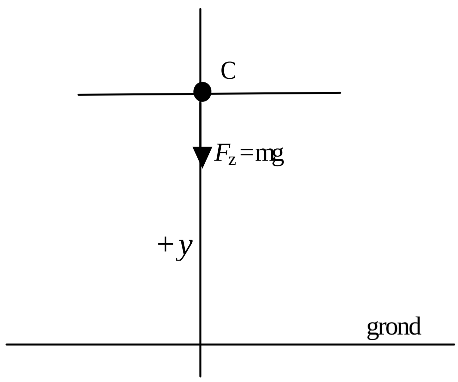
De bewegingswetten worden daarom vaak geschreven als:

$$\boldsymbol{F}_x(t) = m \cdot \boldsymbol{x}''(t)$$
$$\boldsymbol{F}_y(t) = m \cdot \boldsymbol{y}''(t)$$
$$\boldsymbol{F}_z(t) = m \cdot \boldsymbol{z}''(t)$$

Omdat er in de differentiaalvergelijking een tweede afgeleide staat heten de differentiaalvergelijkingen tweede orde differentiaalvergelijkingen. Verderop zul je zien dat je de vergelijkingen toch vaak kunt omschrijven naar een vergelijking waarin alleen de eerste afgeleide staat.

Als je weet welke krachten er gelden dan kun je met deze drie vergelijkingen de beweging van het deeltje achterhalen. In deze paragraaf bekijken we de beweging van een vallend deeltje.

model 1: geen wrijving



Als een deeltje van een bepaalde hoogte wordt losgelaten dan wordt dat deeltje door de aarde aangetrokken. De zwaartekracht is naar beneden gericht en heeft dicht bij de aarde grootte mg. Als er geen geen wind is en als je de wrijving verwaarloost dan is dat de enige kracht. Als je de oorprong O in het beginpunt kiest en de verticale richting y noemt (de +-richting naar boven) dan wordt de beweging van het deeltje beschreven door

$$\mathrm{m} \cdot \mathrm{g} = \mathrm{m} \cdot y''(t)$$

Deze differentiaalvergelijking is eenvoudig. De massa speelt geen rol en de tweede afgeleide van y is constant: $y''(t) = \mathrm{g}$. Dat betekent dat

$$y'(t) = v(t) = \mathrm{g} \cdot t + \mathrm{A} \quad \text{en dat}$$

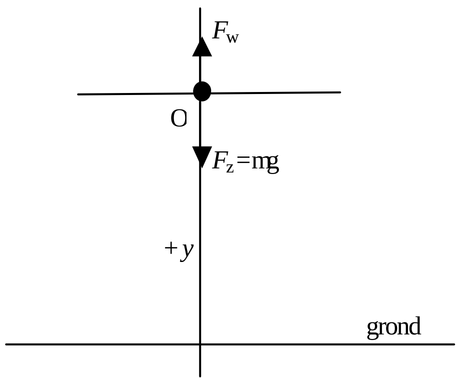
$$y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{g} \cdot t^2 + \mathrm{A}t + \mathrm{B}$$

De constante B is gelijk aan 0. Op $t = 0$ bevindt het deeltje zich immers op hoogte $y = 0$. De constante A is gelijk aan de snelheid v op tijdstip 0.

De oplossing is dus: $y(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v(0) \cdot t$. Een niet erg realistisch resultaat. De snelheid wordt steeds (lineair) groter. Een blaadje dat van 30 meter naar beneden valt, komt met een snelheid van ongeveer 22 m/s op de grond!!!!

model 2: met wrijving

Vallende voorwerpen ondervinden wrijving. Als er geen wind staat dan ontstaat de wrijving door de beweging naar beneden. De wrijvingskracht is dan naar boven gericht. Maar wat is de grootte van de wrijvingskracht?



Omdat de wrijvingskracht groter wordt als de snelheid van de steen groter wordt, is de wrijvingskracht een functie van de snelheid.

Het eenvoudigste verband dat je dan kunt veronderstellen is een lineair verband: $F_w = C \cdot v(t)$.

De evenredigheidsconstante k wordt bepaald door de dichtheid van de lucht en de vorm en het materiaal van het vallende voorwerp. Op grote hoogte zal k waarschijnlijk kleiner zijn. We nemen dan ook maar aan dat we dicht bij het aardoppervlak blijven en dat k constant is. De differentiaalvergelijking die de beweging van de steen beschrijft wordt dan:

$$m \cdot y''(t) = m \cdot g - C \cdot v(t)$$

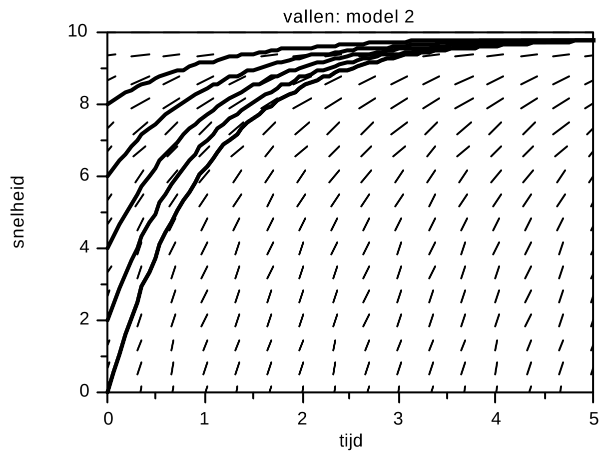
In deze vergelijking staan drie variabelen: de tijd, de snelheid v (in y-richting) en de versnelling in y-richting. De vergelijking wordt eenvoudiger als je bedenkt dat de versnelling de afgeleide van de snelheid is. Je krijgt dan het stelsel:

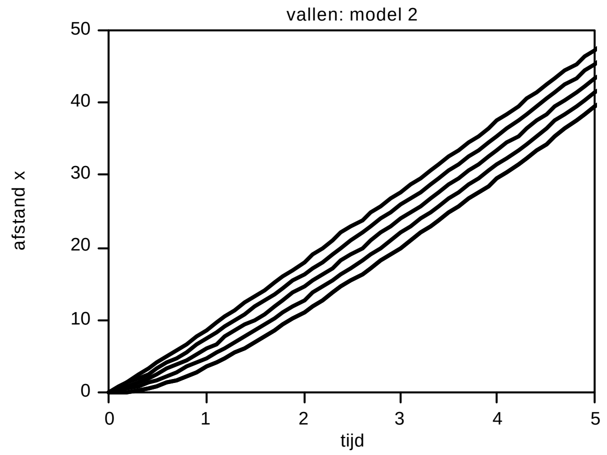
$$\begin{cases} v'(t) & = & g - \frac{C}{m} \cdot v(t) \\ y'(t) & = & v(t) \end{cases}$$

De differentievergelijkingen ziet er dan als volgt uit:

$$\begin{cases} v(t + \Delta t) = v(t) + \left(g - \frac{C}{m} \cdot v(t) \right) \cdot \Delta t \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v(t) \cdot \Delta t \end{cases}$$

Hieronder zie je voor verschillende beginsnelheden en voor C / m = 1 de grafieken van de snelheid v en de afgelegde weg y in de tijd.



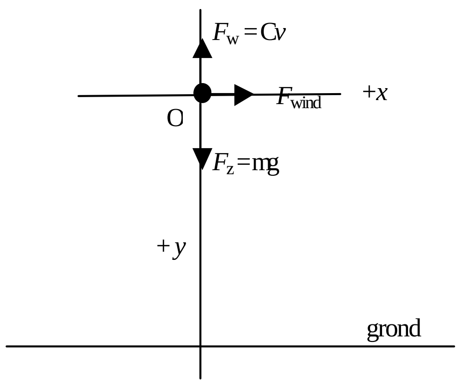


De snelheid gaat in alle gevallen naar ongeveer 10 m / s. Dat kun je ook als volgt inzien. De wrijvingskracht wordt steeds groter. Als hij gelijk is aan de zwaartekracht mg dan heffen de beide krachten elkaar op. De versnelling wordt dan nul en het deeltje valt verder met constante snelheid. Die limietsnelheid volgt uit $\mathrm{m} \cdot \mathrm{g} - \mathrm{C} \cdot v = 0$ dus de limietsnelheid is mg / C.
Als C / m = 1 dan is de limietsnelheid gelijk aan de grootte van g en dat is dus ongeveer 9,8 m / s.

model 3 met wrijving en een extra zijkracht

Als er wind staat dan ondervindt het vallende deeltje nog een extra kracht. Voor de eenvoud nemen we aan dat de windkracht constant in richting en grootte is en steeds naar het oosten gericht is.

Dit keer moet je de beweging in twee richtingen opsplitsen. In de verticale richting, de y-richting, gelden de formules uit model 2:



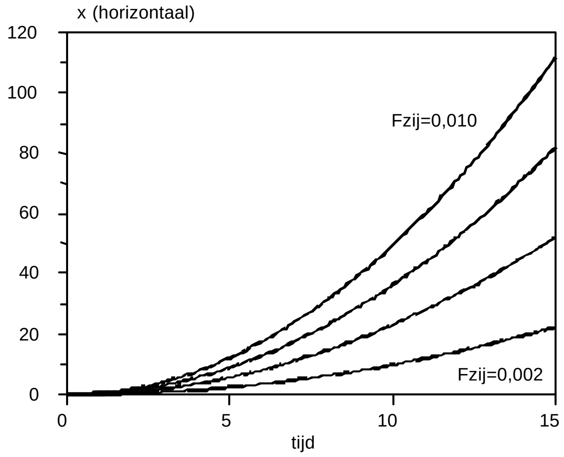
$$\begin{cases} \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} - \mathrm{C} \cdot v_y(t) & = & \mathrm{m} \cdot v'_y(t) \\ y'(t) & = & v_y(t) \end{cases}$$

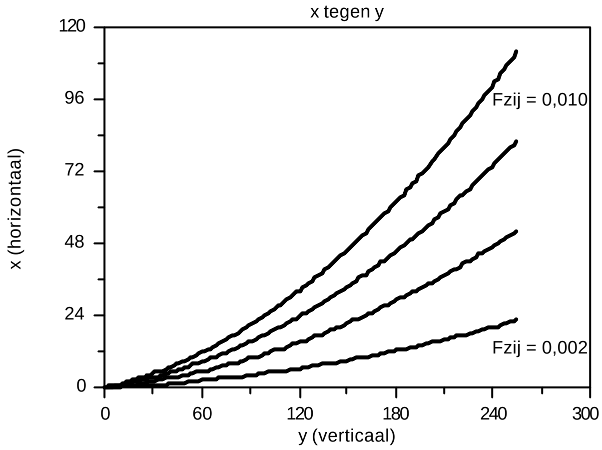
En in horizontale richting; de x-richting geldt

$$\begin{cases} F_{\text{zijwind}} & = & \mathrm{m} \cdot v'_x(t) \\ x'(t) & = & v_x(t) \end{cases}$$

Dit keer zijn er vele grafieken mogelijk. Snelheid in x-richting en in y-richting tegen tijd, afstanden in beide richtingen tegen tijd.

Hieronder zie je twee van de grafieken.





De interessantste grafiek is de rechtergrafiek. Die grafiek laat zien hoe het deeltje afgedreven wordt. Hieronder zie je voor verschillende waarden voor de zijdelingse kracht de grafiek. Steeds geldt dat m = 0,010 kg en C = 0,005 N/(m/s).

Als het deeltje van 240 meter hoogte naar beneden valt dan wordt het ongeveer 20 meter afgedreven (als F_{zij} = 0,002 N). Als de zijkracht toeneemt dan wordt de afwijking groter.

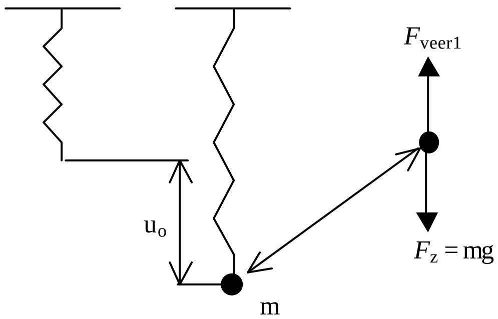
Dit derde model kun je zien als een uitbreiding van de andere modellen. Als F_{zij} = 0 dan gaat het model over in model 2 en als je C = 0 kiest dan ben je terug bij model 1.

Overigens kun je deze modellen alleen maar gebruiken als het vallende voorwerp zich dicht bij de aarde bevindt. Bij grote afstanden wordt de afstand tot het middelpunt van de aarde belangrijk. De wrijvingskracht speelt dan geen rol meer.

5.2 Trillen

In de vorige paragraaf zijn differentiaalvergelijkingen opgesteld voor vallende voorwerpen. Als je het voorwerp aan een veer of een touw hangt en in beweging brengt dan gaat het voorwerp trillen of slingeren om een evenwichtstand.

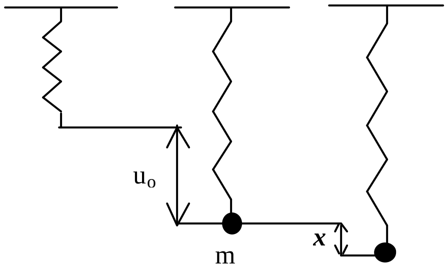
In de tekening zie je twee momentopnamen. In de linkertekening hangt een veer aan het plafond. In de rechtertekening hangt aan die veer een massa m. Het geheel is in rust en de veer is een afstand u_0 ten opzichte van de eerste situatie uitgerekt. Dit noem je de evenwichtsstand.



Op het deeltje werken twee krachten. Ook dat zie je in de bovenstaande tekening. Naar beneden werkt de zwaartekracht. De grootte van die kracht is mg. De tweede kracht is de zogenaamde veerkracht. Die kracht ontstaat omdat de massa aan de veer trekt. Daardoor trekt de veer op zijn beurt aan de massa. Het is dus een reactiekracht en hij werkt in deze situatie naar boven. In de evenwichtsstand zijn de zwaartekracht en de veerkracht aan elkaar gelijk tegengesteld. Er geldt dus

$$F_z = m \cdot g = F_{veer1}$$

Als je de veer uit de evenwichtsstand trekt dan gaat hij op en neer bewegen. Hieronder zie je in de rechtertekening een een momentopname.

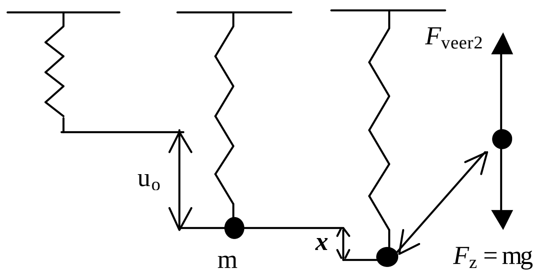


De massa beweegt naar beneden en zit tussen de evenwichtsstand en de onderste uiterste stand. De afstand x is de afstand tussen de evenwichtsstand en de plaats van de massa. De +-richting is naar beneden gekozen.

Als je nu weet welke krachten er werken dan kun je de beweging van de massa beschrijven. Het meest eenvoudige model is een model waarin je wrijving verwaarloost.

model 1: geen wrijving

Als je de wrijving verwaarloost dan werken er ook nu weer twee krachten. Naar beneden de zwaartekracht met grootte mg. Naar boven werkt een veerkracht. Deze veerkracht is groter dan de oorspronkelijke veerkracht F_{veer1}, de veer is immers x centimeter extra uitgerekt.



Een eenvoudige modelaanname is nu dat de veerkracht evenredig is met de afstand x. Uit experimenteel onderzoek is gebleken dat dat klopt als de uitrekking niet al te groot is. Deze wet noemt men de wet van Hooke. De evenredigheidsconsttante heet de veerconstante.
De nieuwe veerkracht F_{veer2} heeft dus grootte $F_{veer1} + C \cdot x$.

De resulterende kracht is dus:

$$m \cdot g - \left(F_{veer1} + Cx\right) = m \cdot g - m \cdot g - C \cdot x = -C \cdot x$$

Er geldt immers $F_{veer1} = m \cdot g$. De beweging van het deeltje wordt dus beschreven door de differentiaalvergelijking

$$m \cdot x''(t) = -C \cdot x(t)$$

Dit is een voorbeeld van een tweede-orde differentiaalvergelijking. Net als bij het model van paragraaf 5.1 kun je overstappen naar een stelsel differentiaalvergelijkingen.

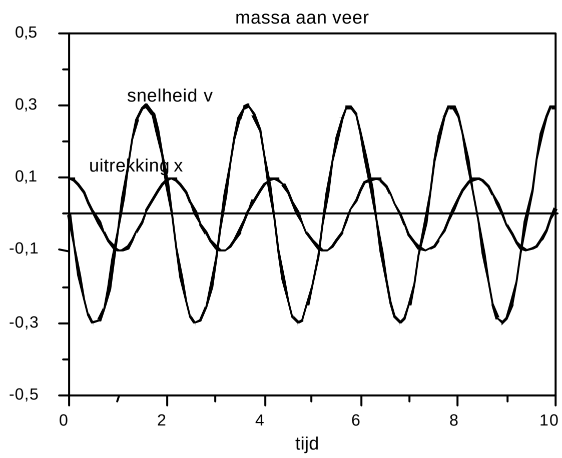
Je krijgt dan:

$$\begin{cases} v'(t) = \dfrac{-\mathrm{C}}{\mathrm{m}} \cdot x(t) \\ x'(t) = v(t) \end{cases}$$

Toch is er een groot verschil met het stelsel in de vorige paragraaf. Nu staan er in de eerste vergelijking twee grootheden: de snelheid en de uitrekking x. Je kunt bij die vergelijking geen richtingsveld meer tekenen. Dat kun je ook anders inzien: als je de tweede afgeleide in een punt kent dan weet je nog niks over de eerste afgeleide!
De differentievergelijkingen in dit model zijn.

$$\begin{cases} v(t+\Delta t) = v(t) + \dfrac{-\mathrm{C}}{\mathrm{m}} \cdot x(t) \cdot \Delta t \\ x(t+\Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t \end{cases}$$

Hieronder zie je in één plaatje de grafiek van de snelheid v en de grafiek van de uitrekking x. Op tijdstip $t = 0$ wordt de massa losgelaten op 0,1 meter van de evenwichtsstand. De massa is m = 0,010 kg en de veerconstante bedraagt C = 0,09 N/m.



Beide grafieken lijken op een sinusoide. De periode is ongeveer 2 seconden. Met behulp van substituties in de vergelijkingen kun je aantonen dat het inderdaad zuivere sinusoiden zijn

Als de uitrekking een zuivere sinusoide is, dan is het voorschrift van de vorm $x(t) = \mathrm{A} \cdot \sin(B \cdot t + \theta)$. Hieruit volgt dat:

$$v(t) = x'(t) = \mathrm{AB} \cdot \cos(\mathrm{B} \cdot t + \theta) \quad \text{en}$$
$$v'(t) = x''(t) = -\mathrm{AB}^2 \cdot \sin(\mathrm{B} \cdot t + \theta)$$

Deze oplossingen moeten echter wel voldoen aan de differentiaalvergelijking $\mathrm{m} \cdot x''(t) = -\mathrm{C} \cdot x(t)$. Er geldt dus:

$$-\mathrm{m} \cdot \mathrm{AB}^2 \cdot \sin(\mathrm{B} \cdot t + q) = -\mathrm{CA} \cdot \sin(\mathrm{B} \cdot t + q) \text{ dus}$$
$$-\mathrm{m} \cdot \mathrm{AB}^2 = -\mathrm{CA}$$

Hieruit volgt dat $\mathrm{B}^2 = \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}$. Voor de situatie die bij de grafiek hoort geldt $\mathrm{B} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{\dfrac{0{,}09}{0{,}01}} = 3$.

De waarden van A en q zijn nog niet bepaald, die worden door de begin-waarden $v(0)$ en $x(0)$ bepaald. In het voorbeeld geldt:

$$v(0) = \mathrm{AB} \cdot \cos(0 + q) = 3\mathrm{A} \cdot \cos(q) = 0$$
en
$$x(0) = \mathrm{A} \cdot \sin(0 + q) = 0{,}1$$

De amplitudo A is ongelijk aan 0, uit de eerste vergelijking volgt dan $q = \dfrac{p}{2}$.
En dan volgt uit de tweede vergelijking dat A = 0,1 m.
De formule voor de uitrekking x is dus in het voorbeeld:

$$x(t) = 0{,}1 \cdot \sin\left(3 \cdot t + \frac{p}{2}\right).$$

De periode van deze sinusoide is $\dfrac{2p}{3} \approx 2.1$ s. Op dezelfde wijze kun je aantonen dat in het algemeen geldt dat,

$$x(t) = x(0) \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{C}{m}} \cdot t + \frac{p}{2}\right)$$

de oplossing is van de vergelijking $m \cdot x''(t) = -C \cdot x(t)$ met voorwaarde $v(0) = 0$

Volgens deze oplossing zou de veer eindeloos op en neer blijven bewegen. Dat kan natuurlijk niet. In werkelijkheid komt de massa tot stilstand door wrijving. Ook die factor kun je in het model betrekken.

model 2: met wrijving

Net als in paragraaf 5.1 nemen we aan dat de wrijving tegengesteld is aan de richting van bewegen en in grootte evenredig is met de snelheid. Stel dat het deeltje naar beneden beweegt. Naar beneden werkt dan weer de zwaartekracht. Naar boven werken nu twee krachten: de wrijvingskracht met grootte k.v en de veerkracht F_{veer2} . De resulterende kracht wordt dit keer:

$$\begin{aligned} F_{res} &= m \cdot g - (F_{veer1} + C \cdot x) - k \cdot v \\ &= m \cdot g - m \cdot g - C \cdot x - k \cdot v \\ &= -C \cdot x - k \cdot v \end{aligned}$$

De beweging van het deeltje wordt nu dus beschreven door de differentiaalvergelijking

$$m \cdot x''(t) = -C \cdot x(t) - k \cdot x'(t)$$

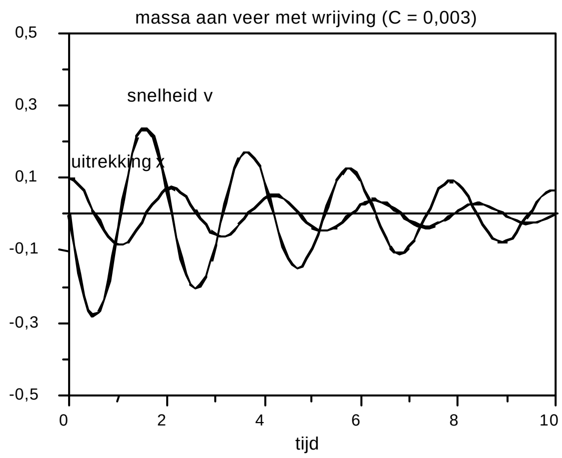
of anders geschreven:

$$m \cdot x''(t) + k \cdot x'(t) + C \cdot x(t) = 0$$

Dit is een voorbeeld van een tweede-orde differentiaalvergelijking waarin de functie x, en zijn eerste en tweede afgeleide staan. Deze vergelijking komt overeen met het stelsel

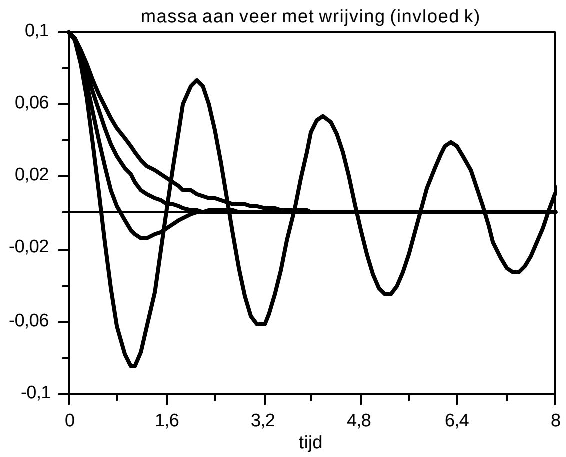
$$\begin{cases} v'(t) = \dfrac{-C}{m} \cdot x(t) + \dfrac{-k}{m} \cdot v(t) \\ x'(t) = v(t) \end{cases}$$

Hieronder zie je de oplossing. De veerconstante C is weer 0,09 N/m, de massa is weer 0,010 kg en ook geldt weer $x(0) = 0,1$ m en $v(0) = 0$ m/s



De oplossing is geen sinusoide meer. De toppen komen namelijk steeds lager te liggen. Dat betekent dat de massa steeds minder ver om de evenwichtsstand beweegt. Deze beweging noem je een gedempte trilling.

Als de wrijvingscoefficient groter wordt dan is er helemaal geen slingering meer om de evenwichtsstand. Datzelfde effect ontstaat ook als de massa groter wordt. In de onderstaande grafiek zie je de invloed van de parameter k. Dit keer is de grafiek van de snelheid achterwege gelaten.



Een formule voor de uitrekking is dit keer niet zo eenvoudig te zien en af te leiden.

5.3 Opdrachten

opdracht 5.3.1
Op een koude dag begint het te hagelen. De hagelstenen vallen uit een wolk die op 1000 meter hoogte hangt. De massa van de hagelsteen bedraagt 0,10 kg.

a) Stel de differentiaalvergelijking op voor de snelheid van de hagelsteen Je mag aannemen dat de wrijving evenredig is met de snelheid van de steen; noem de evenredigheidsconstante C.

b) Laat zien dat $v(t) = \dfrac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{g}}{\mathrm{C}} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{C}t}{\mathrm{m}}}$ voldoet aan die eerste orde dv en bepaal de constante A.

Neem g = 9,8 m/s^2, C = 0,08 N / (m/s).

c) *x* is de afgelegde weg van een hagelsteen. Bepaal het functievoorschrift van *x*(t) en plot de grafiek van *x*.
d) Na hoeveel seconden valt de steen op de grond als hij van 1000 m hoogte valt? En met welke snelheid valt de steen op de grond?

opdracht 5.3.2

De massa van het hagelsteentje uit opdracht 5.3.1 neemt door verdamping af. Veronderstel dat dat exponentieel gebeurt: $m(t) = m(0) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{k}t}$. De massa neemt dan af en daardoor neemt de snelheid minder snel toe.

a) Hoe groot wordt de snelheid maximaal als k = 0,01. De beginmassa $m(0)$ blijft 0,10 kg.
b) Na hoeveel seconden en met welke snelheid valt de steen nu bij benadering op de grond?
c) Onderzoek grafisch de invloed van de parameter k.

Als je aanneemt dat de massaverandering evenredig met de oppervlakte van het hagelsteentjes is dan kun je voor een bolvormig hagelsteentje afleiden dat $m(t) = (-\mathrm{a} \cdot t + \mathrm{b})^3$ met a en b > 0.

d) Bepaal de parameters a en b als de massa na 30 seconden 0,05 kg is en m(0) = 0,08 kg.
e) Bepaal de maximale snelheid van het steentje in dit model.

opdracht 5.3.3

De trillingen in paragraaf 5.2 heten vrije trillingen. Als er op het deeltje die aan een veer hangt een extra uitwendige kracht wordt uitgeoefend dan heet de trilling "gedwongen".
Neem aan dat de extra kracht gegeven wordt door $F(t) = \cos(\mathrm{a} \cdot t)$.

Verder geldt: m = 0,25 kg, C = 1,0 N/m en k = 0 N/(m/s).

a) Stel een differentiaalvergelijking op die de beweging van de massa vastlegt.
b) Maak de x-t-grafiek voor a = 0,5 en voor a = 1. De beginvoorwaarden zijn $x(0) = 0{,}10$ m en $x'(0) = 0$ m/s. Bepaal ook in elk geval de maximale uitwijking.
c) Als $\mathrm{a} = \frac{p}{2}$ dan krijg je een sinusoide. Bereken de periodetijd.
d) Herhaal onderdeel b voor een aantal andere waarden van a. Hoe groot kan de uitwijking van de massa maximaal worden? Maak grafieken!! Hoe noemt men dit verschijnsel?

6 Modellen in de scheikunde

In dit hoofdstuk komen modellen aan de orde die de vorming of verspreiding van chemische stoffen beschrijven. In "reactievergelijkingen" wordt een model opgesteld voor de vorming van stoffen bij een gegeven reactievergelijking.
Ook in paragraaf 6. 2 "verspreidingsmodellen" gaat het over chemische stoffen. In die paragraaf vraag je je af hoe de stof zich over verschillende delen van een systeem, bijvoorbeeld het menselijk lichaam, verspreidt.

Inhoud van dit Hoofdstuk

6.1 Reactievergelijkingen

In de scheikunde spelen reactievergelijkingen een belangrijke rol. Stel dat je twee vloeistoffen A en B tot je beschikking hebt en dat uit de reactie van A met B stof X ontstaat volgens de reactievergelijking $\mathrm{A} + \mathrm{B} \to \mathrm{X}$.

Deze reactievergelijking houdt in dat 1 molecuul van stof A reageert met 1 molecuul van stof B, en dat daardoor 1 molecuul van stof X gevormd wordt. Je kunt ook zeggen dat je voor de vorming van x eenheden van stof X, x eenheden van stof A en x eenheden van stof B nodig hebt. Als eenheid wordt in de scheikunde overigens meestal de mol genomen.

Als je op $t = 0$, a moleculen van stof A bij b moleculen van stof B voegt ontstaat er stof X. Dit proces houdt op als stof A of B op is.
De vraag die men nu kan stellen is: hoe neemt de hoeveelheid stof X in de tijd gezien toe?
Als we de hoeveelheid stof C met de functie $x(t)$ beschrijven volgt uit de gegevens dat $x(0) = 0$. Je kunt ook wel de eindhoeveelheid voorspellen. Je moet dan wel twee gevallen onderscheiden. Als a groter is dan b dan is stof B als eerste op en geldt $x_{\mathrm{eind}} = \mathrm{b}$. Als b groter is dan a dan is stof A als eerste op en geldt $x_{\mathrm{eind}} = \mathrm{a}$. Maar wat kun je over de hoeveelheden op de tussenliggende tijdstippen zeggen?

Als je op tijdstip $t = 0$ de stoffen A en B bij elkaar voegt is er relatief veel stof A en B. Deze stoffen kunnen dan (na roeren) gemakkelijk met elkaar in contact komen: de moleculen van stof A "vinden gemakkelijk" moleculen van stof B om samen tot stof X te reageren. Na enige tijd zijn de hoeveelheden van A en B afgenomen.

In het mengsel bevindt zich nu ook stof X. De moleculen van stof A en stof B kunnen elkaar nu "minder snel vinden": er zijn per tijdseenheid minder ontmoetingen tussen A en B.
Het lijkt niet onredelijk om aan te nemen dat het aantal moleculen van stof X dat in een korte tijdsperiode ontstaat evenredig is met het totaal aantal mogelijke ontmoetingen tussen de moleculen van stof A en B in die tijdsperiode.

Een rekenvoorbeeld bij dit model: als tijdseenheid nemen we een minuut. Stel dat er op $t = 0$, 100 moleculen van stof A en 300 moleculen van stof B aanwezig zijn en dat de evenredigheidsconstante 1 / 2000 = 0,0005 per minuut is. In de eerste minuut zijn er dan 100.300 mogelijke "ontmoetingen" tussen de moleculen van stof A en stof B. Dit houdt in dat er naar verwachting 0,0005.100.300 = 15 moleculen van stof X gevormd worden. Aan het einde van minuut 1 zijn er dus 85 moleculen A, 285 moleculen B en 15 moleculen X. In de volgende minuut zijn er dan 85.285 mogelijke ontmoetingen, hetgeen weer 0,0005.85.285 ≈12 moleculen X oplevert. Dus in totaal zijn er dan 15 + 12 = 27 moleculen van stof X etc.

Bij deze berekening doe je alsof er tijdens elke minuut geen moleculen omgezet worden. Het aantal mogelijke ontmoetingen is in werkelijkheid kleiner. De beschouwde tijdsperiode is te groot. Noem de tijdsperiode Δt .
In de eerste tijdsperiode zijn er dan mogelijke "ontmoetingen" en worden er $0{,}0005 \cdot 100 \cdot 300 \cdot \Delta t = 15 \cdot \Delta t$ moleculen van X gemaakt. Na Δt minuten zijn er dan $100 - 15 \cdot \Delta t$ moleculen van A en $300 - 15 \cdot \Delta t$ moleculen van B etc.

Nog algemener: als het aantal moleculen op een bepaald tijdstip $x(t)$ is, dan zijn er $100 - x(t)$moleculen van stof A en moleculen van stof B.

In Δt minuten zijn er dan $\left(100 - x(t)\right) \cdot \left(300 - x(t)\right) \cdot \Delta t$ mogelijke ontmoetingen en worden er $0{,}0005 \cdot \left(100 - x(t)\right) \cdot \left(300 - x(t)\right) \cdot \Delta t$ moleculen van stof X gevormd. Dit aantal moet je optellen bij $x(t)$om het aantal moleculen op $t + \Delta t$ te vinden. Dat levert de differentievergelijking:

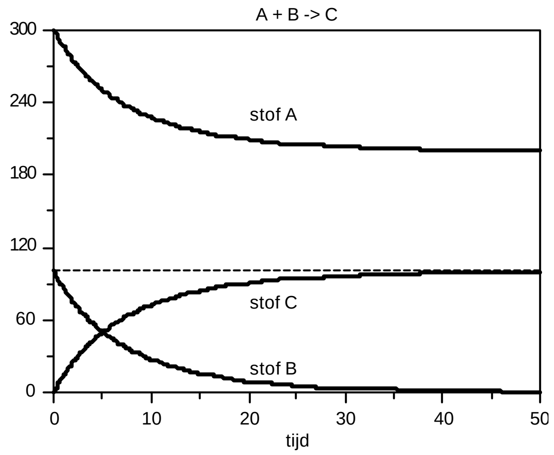
$$x(t + \Delta t) = x(t) + 0{,}0005 \cdot \left(100 - x(t)\right) \cdot \left(300 - x(t)\right) \cdot \Delta t$$

De differentiaalvergelijking wordt:

$$x'(t) = 0{,}0005 \cdot \left(100 - x(t)\right) \cdot \left(300 - x(t)\right)$$

Dit is een eerste orde differentiaalvergelijking. In de scheikunde noemt men een proces dat zich zo gedraagt een tweede-orde proces (vanwege de term x^2). Een beetje verwarrend met het wiskundige begrip orde van een differentiaalvergelijking.

De oplossing zie je in de grafiek hieronder. De hoeveelheid x stijgt naar de horizontale asymptoot $x = 100$.



In de grafiek zie je ook de afname van de stoffen A en B. Die hoeveelheden zijn bekend als x bekend is. Elk geproduceerd molecuul van stof X kost immers een molecuul van stof A en een molecuul van stof B.

Als je die hoeveelheden resp. aangeeft met $a(t)$ en $b(t)$dan geldt dus:

$$a(t) = 300 - x(t)$$
$$b(t) = 100 - x(t)$$

Als je in het voorafgaande verhaal respectievelijk de beginhoeveelheden 100, 300 en de evenredigheidsconstante 0,0005 vervangt door $a(0)$, $b(0)$en k, dan wordt het reactieproces beschreven door:

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{k} \cdot \left(a(0) - x(t)\right) \cdot \left(b(0) - x(t)\right) \\ a(t) = a(0) - x(t) \\ b(t) = b(0) - x(t) \end{cases}$$

De evenredigheidsconstante k is afhankelijk van de stoffen die je bij elkaar voegt en allerlei externe omstandigheden zoals de druk en de temperatuur.

Als je aan beide kanten in de twee onderste vergelijkingen differentieert dan krijg je differentiaalvergelijkingen voor de afname van stof A en van stof B. Je beschrijft het proces dan met een stelsel differentiaalvergelijkingen.

$$\begin{cases} x'(t) & = \mathrm{k} \cdot \left(a(0) - x(t)\right) \cdot \left(b(0) - x(t)\right) & = \mathrm{k} \cdot a(t) \cdot b(t) \\ a'(t) & = -x'(t) & = -\mathrm{k} \cdot a(t) \cdot b(t) \\ b'(t) & = -x'(t) & = -\mathrm{k} \cdot a(t) \cdot b(t) \end{cases}$$

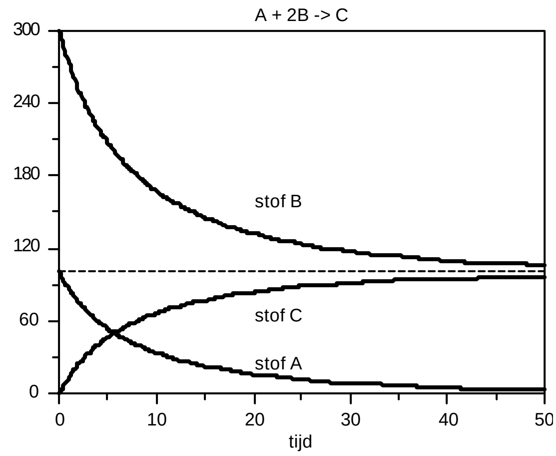
Als de reactievergelijking verandert dan verandert ook de differentiaalvergelijking. Bekijk bijvoorbeeld het reactieproces met de reactievergelijking $A + 2B \rightarrow X$

Dit keer reageert 1 molecuul met 2 moleculen. Stof B wordt twee keer zo snel opgebruikt. Als er nu $x(t)$ moleculen van stof X gevormd zijn dan zijn er nog $a(t) = a(0) - x(t)$ moleculen van stof A en nog maar $b(t) = b(0) - 2 \cdot x(t)$ moleculen van stof B.

Het product van de aanwezige hoeveelheden van stof A en B op tijdstip t is nu dus $a(t) \cdot b(t) = (a(0) - x(t)) \cdot (b(0) - 2 \cdot x(t))$. Als je dezelfde modelaannamen maakt dan wordt deze reactie beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$x'(t) = \mathrm{k} \cdot (a(0) - x(t)) \cdot (b(0) - 2 \cdot x(t))$$

Hieronder zie je de oplossing voor $a(0) = 100$, $b(0) = 300$ en k = 1/2000. Als je de grafiek vergelijkt met de vorige grafiek dan zie je dat de hoeveelheid stof C minder snel stijgt.



Ook nu kun je het proces met een stelsel van drie differentiaalvergelijkingen beschrijven.

In werkelijkheid zijn de meeste chemische processen veel ingewikkelder. Een reactie leidt vaak tot producten die onmiddellijk weer in een andere reactie betrokken raken. Bijvoorbeeld:

$$A + 2B \rightarrow X$$
$$X + A \rightarrow Y$$

Ook is in het voorafgaande verhaal steeds van een aflopende reactie uitgegaan. Het is ook mogelijk dat de ontstane stof weer uiteenvalt in de oorspronkelijke stoffen. Het tempo waarin dat gebeurt hoeft niet gelijk te zijn aan het tempo waarin de stof gevormd wordt.

Dat wordt in het onderstaande voorbeeld aangegeven door de verschillende getallen k_1 en k_2.

$$A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} X$$

En ook is het mogelijk dat een stof zichzelf produceert. Een voorbeeld daarvan is de reactie.

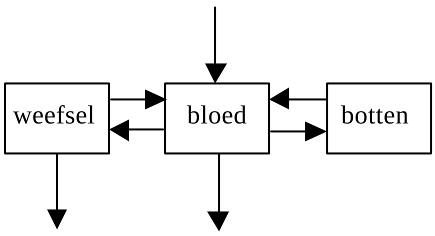
$$A + X \rightarrow 3X$$

Zo'n proces heet autokatalyse. In alle gevallen moet het model aangepast worden. In de opgaven kom je deze voorbeelden weer tegen

6.2 Verspreidingsmodellen

Lood is een gevaarlijke stof die in het menselijke lichaam terecht kan komen via vergiftigd voedsel en water. Ook in uitlaatgassen en in verflucht kan lood zitten. Als het lood eenmaal in de bloedsomloop terecht gekomen is, dan wordt het verder getransporteerd en komt het terecht in allerlei weefsels en in de botten. Via de nagels, de haren en via transpiratie wordt een bepaald percentage lood weer door het lichaam uitgestoten. En gelukkig breken de nieren ook een bepaalde hoeveelheid lood uit de bloedsomloop af. Dat lood komt dus weer in de buitenwereld terecht.

Vanuit de weefsels en de botten wordt overigens ook een bepaald percentage lood weer terug in de bloedsomloop gebracht. In het onderstaande schema zie je wat er met het lood gebeurt. Voor de eenvoud worden de diverse onderdelen beschouwd als afgesloten eenheid. Zo'n eenheid noemt men een compartment.

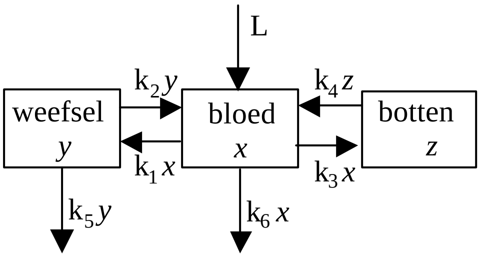


In dit verspreidingsmodel zijn er drie compartments: het bloed, het weefsel en de botten. De horizontale pijlen in het schema geven aan dat er tussen die onderdelen uitwisseling kan plaatsvinden. De verticale pijlen geven de stromen in en uit het lichaam aan.

In dit model zijn er drie variabelen;

x : de hoeveelheid lood in het bloed,
y : de hoeveelheid lood in het weefsel,
z : de hoeveelheid lood in de botten.

Uit onderzoek is gebleken dat snelheid waarmee het lood vanuit het ene deel naar het andere deel stroomt bij benadering evenredig is met de hoeveelheid die uit het compartment stroomt. De term $k_1 x$ in het schema geeft bijvoorbeeld aan dat het aantal microgram per dag dat van het bloed naar de organen stroomt gelijk is aan $k_1 \cdot x$



En de term $k_5 y$ geeft aan dat het aantal microgram lood per dag dat vanuit de weefsels uit het lichaam gebracht wordt (via de nieren) gelijk is aan $k_5 \cdot y$. Met L wordt de instroomsnelheid van het lood aangegeven. Hoe ziet het model er nu verder wiskundig uit?

Op tijdstip $t = 0$ zit er in de bloedsomloop $x(t)$ microgram lood. In Δt tijdseenheden komt er van buitenaf $L \cdot \Delta t$ mg lood bij.
Uit de weefsels komt $k_2 \cdot y(t) \cdot \Delta t$ en uit de botten komt $k_4 \cdot z(t) \cdot \Delta t$ erbij.
Ook gaat er in die tijdseenheid lood naar andere delen: $k_3 \cdot x(t) \cdot \Delta t$ naar de botten, $k_1 \cdot x(t) \cdot \Delta t$ naar de weefsels en $k_6 \cdot x(t) \cdot \Delta t$ naar buiten. Er geldt dus:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \left(L + k_2 \cdot y(t) + k_4 \cdot z(t) - k_1 \cdot x(t) - k_3 \cdot x(t) + k_6 \cdot x(t)\right) \cdot \Delta t$$

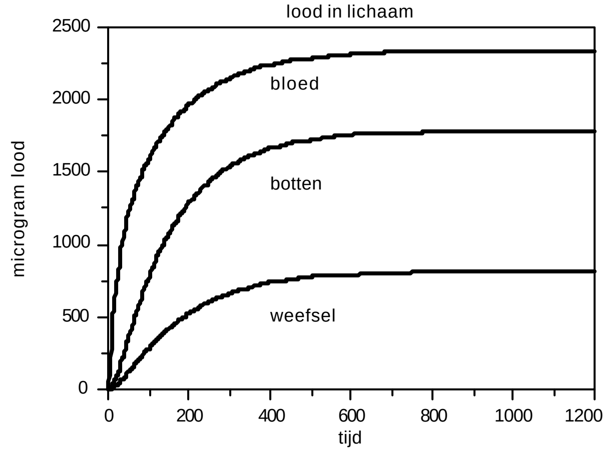
De differentiaalvergelijking voor de hoeveelheid lood in het bloed is dus.

$$x'(t) = L + k_2 \cdot y(t) + k_4 \cdot z(t) - \left(k_1 + k_3 + k_6\right) \cdot x(t)$$

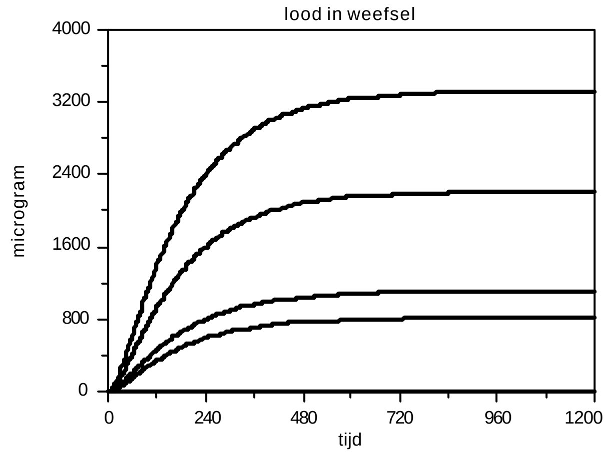
Op dezelfde wijze kun je de veranderingen in de weefsels en in de botten opstellen. Het verspreidingsproces wordt beschreven door het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x'(t) = L + k_2 \cdot y(t) + k_4 \cdot z(t) - \left(k_1 + k_3 + k_6\right) \cdot x(t) \\ y'(t) = k_1 \cdot x(t) - \left(k_2 + k_5\right) \cdot y(t) \\ z'(t) = k_3 \cdot x(t) - k_4 \cdot z(t) \end{cases}$$

Hieronder zie je de hoeveelheden in de diverse onderdelen. De parameters zijn k_1 = 0,0039 ; k_2 = 0,0111 ; k_3 = 0,0124 ; k_4 = 0,0162 ; k_5 =0,000035 en k_6 = 0,0211. De waarde van L is 49,3 μg (microgram) per dag. Deze waarden zijn in een klinisch onderzoek met menselijke vrijwilligers rond 1970 in Los Angeles bepaald.



Vooral een te hoog loodgehalte in het weefsel is het gevaarlijk. In de onderstaande grafiek zie je voor verschillende waarden van L de hoeveelheid lood in het weefsel. Hoe groter L des te hoger de eindwaarde.



Deze studies hebben ertoe geleid dat er loodvrije benzine ontwikkeld is en ook in verf wordt tegenwoordig vrijwel geen lood meer toegevoegd.

6.3 Opdrachten

opdracht 6.3.1
In paragraaf 6.1 is een model opgesteld voor de reactievergelijking gegeven door $A + B \rightarrow X$ A + B ® X. Ga weer uit van de getallen $a(0) = 300$, $b(0) = 100$ en k = 1/2000. De oplossing was een stijgende functie naar de asymptoot $x = 100$.

b) Ga na of er een p bestaat zó, dat de functie met voorschrift $x(t) = 100 - 100 \cdot e^{-pt}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking.

c) Laat zien dat bij de oplossing het voorschrift $x(t) = \dfrac{300 \cdot \left(e^{\frac{t}{10}} - 1\right)}{3 \cdot e^{\frac{t}{10}} - 1}$ hoort.

opdracht 6.3.2
Een chemische reactie wordt beschreven door de reactievergelijking

$$A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} X$$

(zie ook het einde van paragraaf 6.1). De hoeveelheden van stof A, B en X op tijdstip t zijn resp. $a(t)$, $b(t)$en $x(t)$. Je mag aannemen dat het tempo waarin stof X omgezet wordt evenredig is met de aanwezige hoeveelheid van stof X.

a) Maak aannemelijk dat $x'(t) = k_1 \cdot a(t) \cdot b(t) - k_2 \cdot x(t)$.
b) Maak aannemelijk dat de hoeveelheid stof A beschreven wordt $a'(t) = -k_1 \cdot a(t) \cdot b(t) + k_2 \cdot x(t)$
c) Geef ook een differentiaalvergelijking voor stof B.

Neem aan dat $a(0) = 300$, $b(0) = 100$, $x(0) = 0$ en dat $k_1 = 1/2000$ en $k_2 = 1/1000$.

d) Laat in een grafiek de vorming van de stoffen zien. Vergelijk de grafiek met de eerste grafiek in paragraaf 6.1. Hoeveel stof X wordt er gevormd?
e) Wat verandert er als k_2 groter wordt, bijvoorbeeld $k_2 = 1/10$. Hoeveel stof X wordt er nu gevormd?

opdracht 6.3.3
Een autokatalyse (zie einde paragraaf 6.1) wordt beschreven door de reactievergelijking $A + X \rightarrow 3X$

Op tijdstip $t = 0$ is 300 eenheden stof A en 100 eenheden stof X aanwezig. De hoeveelheden van A en van X worden resp. beschreven door $a(t)$ en $x(t)$.

a) Stel een model op voor dit proces.
b) Maak een grafiek waarin je de invloed van de parameter uit je model op de hoeveelheid stof X ziet.

Op $t = 1$ is a gelijk aan 200 eenheden

c) Bepaal $x(1)$.
d) Bepaal (grafisch) $x(2)$.

opdracht 6.3.4
Deze opdracht gaat over het compartmentmodel voor lood in het lichaam uit paragraaf 6.2. De differentiaalvergelijkingen waren in dat model

$$\begin{cases} x'(t) = L + \mathrm{k}_2 \cdot y(t) + \mathrm{k}_4 \cdot z(t) - \left(\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_3 + \mathrm{k}_6\right) \cdot x(t) \\ y'(t) = \mathrm{k}_1 \cdot x(t) - \left(\mathrm{k}_2 + \mathrm{k}_5\right) \cdot y(t) \\ z'(t) = \mathrm{k}_3 \cdot x(t) - \mathrm{k}_4 \cdot z(t) \end{cases}$$

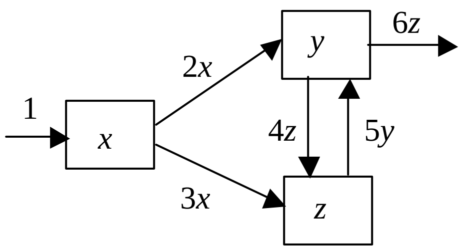
De parameters zijn k_1 = 0,0039 ; k_2 = 0,0111 ; k_3 = 0,0124 ; k_4 = 0,0162 ; k_5 =0,000035 ; k_6 = 0,0211 en L = 49,3 µg

a) Bepaal de evenwichtswaarden met behulp van een stelsel vergelijkingen.

Er bestaan medicijnen waarmee men de uitstroom via de nieren kan vergroten.

b) Onderzoek met behulp van tabellen en grafieken wat er gebeurt als k_6 kleiner wordt.

opdracht 6.3.4
Hieronder zie je een schematische weergave van een compartmentmodel. De hoeveelheden in de compartimenten zijn x, y en z. De pijlen naast de compartments geven de transportrichting aan. Het tempo waarin dat plaatsvindt staat ernaast.

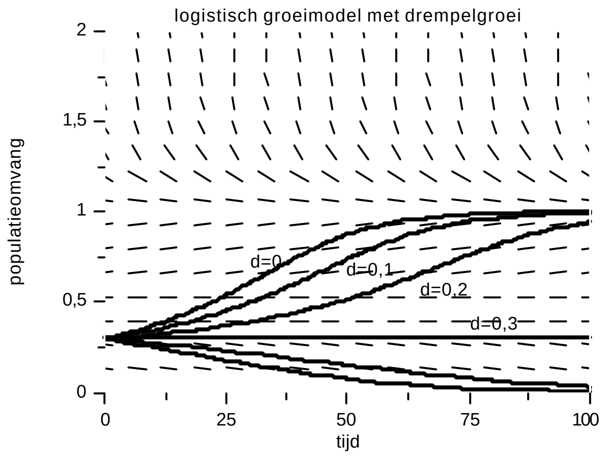


a) Stel een stelsel differentiaalvergelijkingen op voor het onderstaande systeem.
b) Bepaal de evenwichten van dit systeem.

Antwoorden

Opdracht 1.2.2

Hieronder zie je de oplossingkrommen voor d = 0, d = 0,1, d = 0,2, d = 0,3 , d = 0,4 en d = 0,5. Steeds is N(0) = 0,25. Als d > N(0) dan sterft de populatie uit en als d < N(0) dan groeit de populatie naar de evenwichtswaarde 1.
Als d = N(0) dan blijft de populatiegrootte constant



Opdracht 2.2.1

a) na ongeveer 32 minuten
b) c ≈ 0,045

Opdracht 2.2.2

De constante c in $T'(t) = c \cdot (T_{omgeving} - T(t))$ is ongeveer 0,056. Als je aanneemt dat de dode gestorven is zonder koorts dan ligt de lichaamstemperatuur tussen 36,5 en 37,5 graden Celsius. Als je uitgaat van 37 graden dan is de man ongeveer 4,2 uur voor de vondst door de politie overleden.

Opdracht 2.2.3

a) A = $T_{omgeving}$ en B = $T(0)$ - $T_{omgeving}$
b) vraag uit 2.2.1b: $t = \dfrac{-500 \cdot \ln(60/107)}{9} \approx 32{,}14$ minuten

vraag uit 2.2.1b: $c = \dfrac{-\ln(60/107)}{13} \approx 0{,}0445$

Opdracht 2.4.1

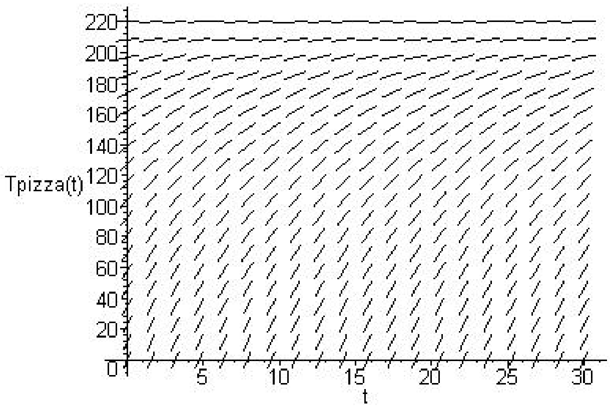
a) ≈ 6,2 minuten
b) ≈184°

Opdracht 2.4.2

a) $T_{\text{oven}} = 220 + 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{5} \cdot \pi \cdot t\right)$

b) $T_{\text{pizza}}(t + \Delta t) = T_{\text{pizza}}(t) + c \cdot \left(220 + 3 \cdot \sin(0{,}2 \cdot \pi \cdot t) - T_{\text{pizza}}(t)\right) \cdot \Delta t$

c)



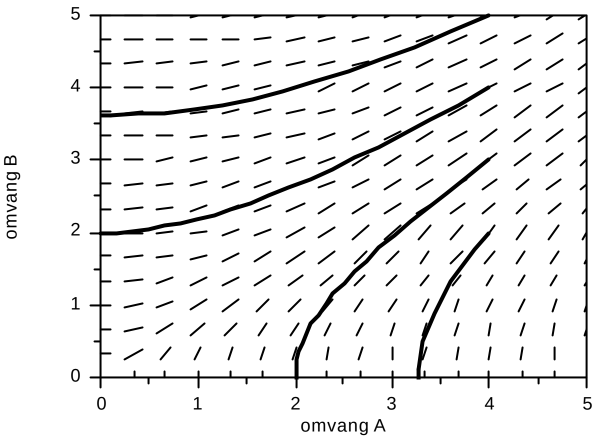
d) De temperatuur gaat een beetje schommelen rond 220°

Opdracht 2.6.1

d/c ≈ -0,12, c ≈ 0,05, d ≈ -0,006

Opdracht 2.6.2

b) en c)



d) In de bovenstaande plot geldt steeds $x(0) = 4$. Te zien is dat leger A "wint" als $y(0) \leq 3$, als $y(0) \geq 4$ dan "wint" leger B zeker.

e) Als $y(0) \leq 3{,}65$ dan "wint" leger A

f) b mag maximaal 0,45 zijn.

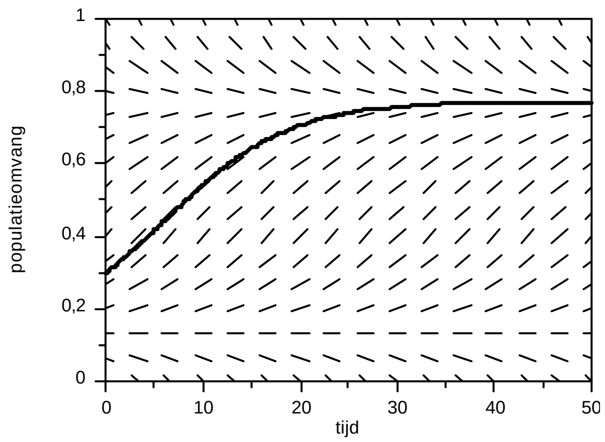
Opdracht 2.6.3

d) $T_{\text{oven}}(t) = \frac{553}{3} + \frac{107}{3} \cdot e^{-0{,}12 \cdot t}$

e) $\frac{553}{3} \approx 184{,}3\,°\text{C}$

Opdracht 3.2.1

a)

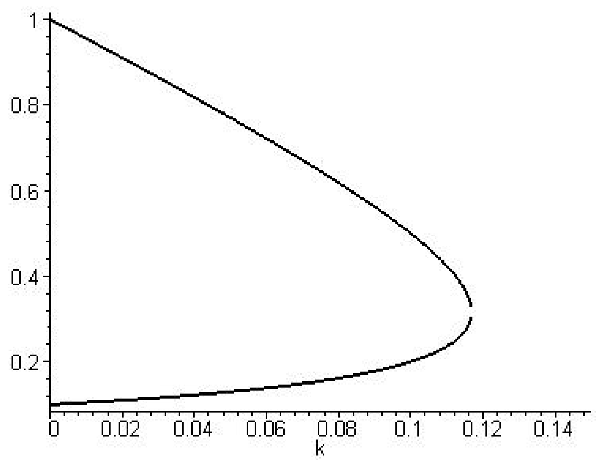


b) N ≈ 0,77

c) De populatie sterft uit als k kleiner is dan (ongeveer) 0,1169

d) De evenwichten liggen bij $\frac{11}{20} - 2k + \frac{\sqrt{81 - 880k + 1600k^2}}{20}$ en

$\frac{11}{20} - 2k - \frac{\sqrt{81 - 880k + 1600k^2}}{20}$



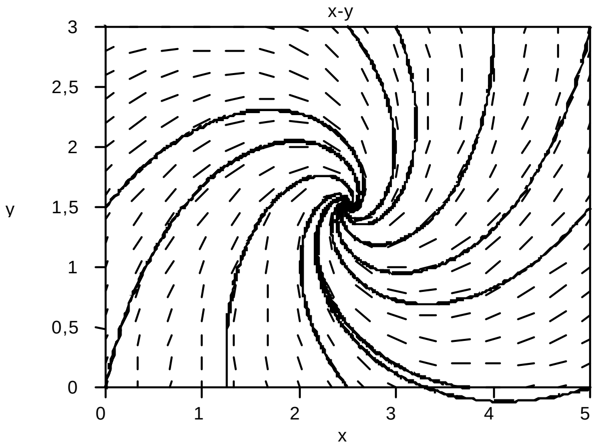
e) k = 0,1125 dus maximaal11,25%

f) k = 0,15 dus maximaal 15%

g) k = 0,25 dus maximaal 25%

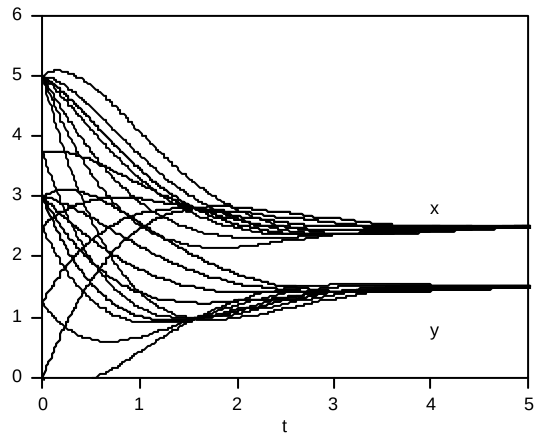
Opdracht 3.5.1

a)



b) Het evenwicht is het punt (5/2 , 3/2).

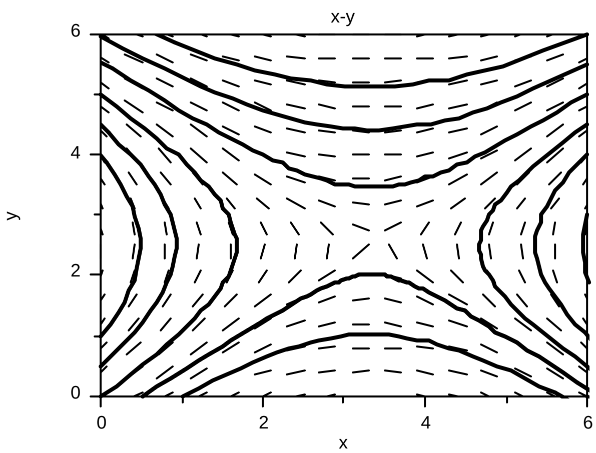
c) x gaat naar 2,5, y gaat naar 1,5



Opdracht 3.5.2

a) het evenwichtspunt is (0 , 0)

b)



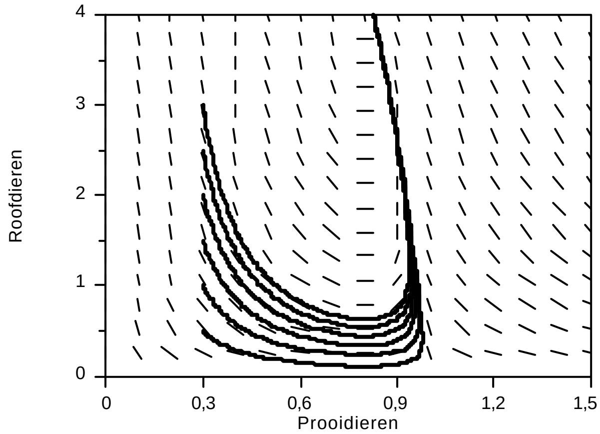
c) het evenwichtspunt is (10/3 , 5/2)

d) als $x(0) = 5$ en $y(0) = 1$ dan is y eerder 0 en dus "wint" leger A

e) Als $y(0) < 5{,}06$ dan "wint" leger A.

Opdracht 4.2.1

a)



b) Ongeveer 0,98 eenheden

c) Ja, naar $P = 0,8$ en $R = 4$.

d) Nee, dan gaan de populaties schommelen

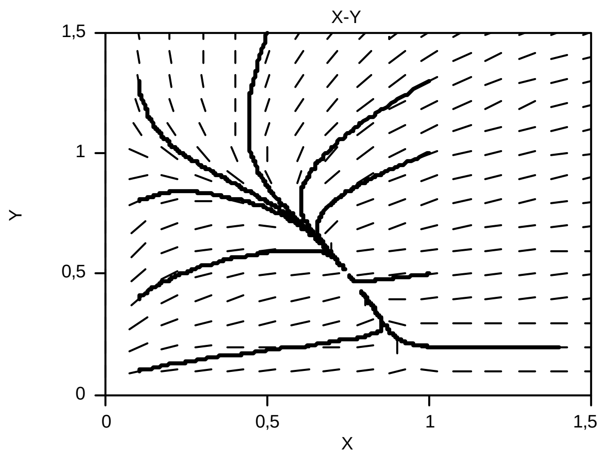
Opdracht 4.2.2

a) De factor $c \cdot X(t) \cdot Y(t) \cdot \Delta t$ is negatief en zorgt er dus voor een afname in de periode $[t, t + \Delta t]$.

b) Logistisch.

c) De evenwichten zijn (0 , 0) , (0 , 1), (1 , 0) en $\left(\frac{b(a-c)}{ab-cd}, \frac{a(b-d)}{ab-cd}\right)$

d)



e) De populaties groeien naar het evenwicht (0,75 , 0,5)

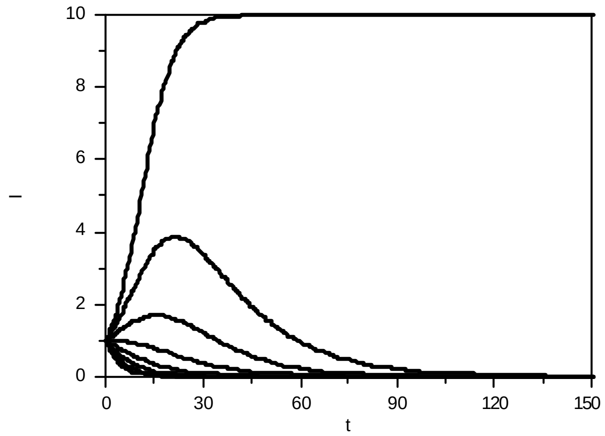
f) Dan sterft X uit en groeit Y naar 1.

Opdracht 4.4.1

a) gelijk aan 0

b) I wordt maximaal (ongeveer) 2. dat gebeurt op (ongeveer) $t = 28$.

c)



d) k is ongeveer 0,18

e) ongeveer 50%

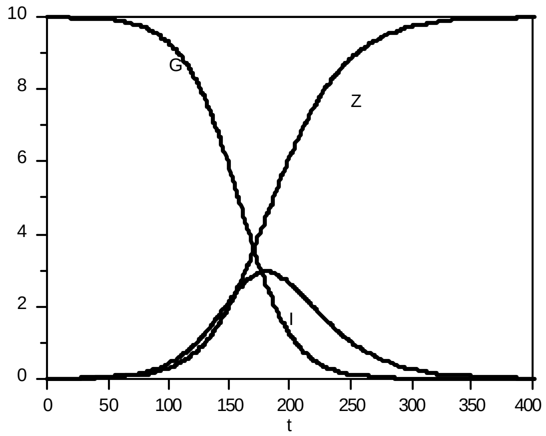
f) Als $b > a \cdot G(0) = 0.18$

Opdracht 4.4.2

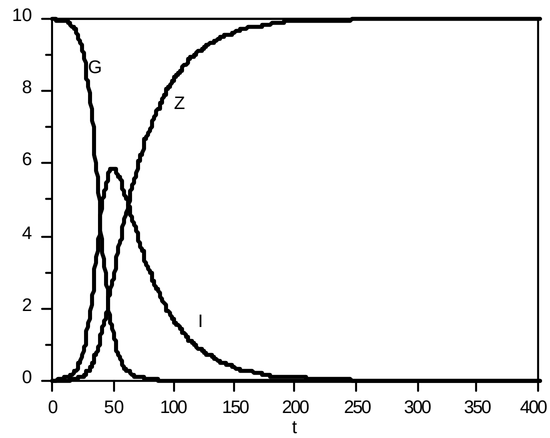
a) Nu vindt er ook besmetting plaats door de contacten tussen gezonden en zieken.

b) De evenwichtsoplossing is: $G = 0$, $I = 0$ en $Z = 1$.

c) Ja, iedereen wordt uiteindelijk "ziek".



d) Ook nu wordt iedereen "ziek" (alleen eerder)

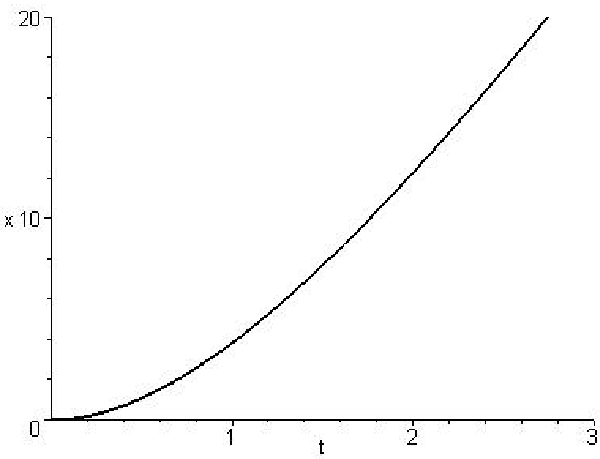


Opdracht 5.3.1

a) $v'(t) = g - \frac{C}{m} \cdot v(t)$

b) $A = \frac{-m \cdot g}{C}$

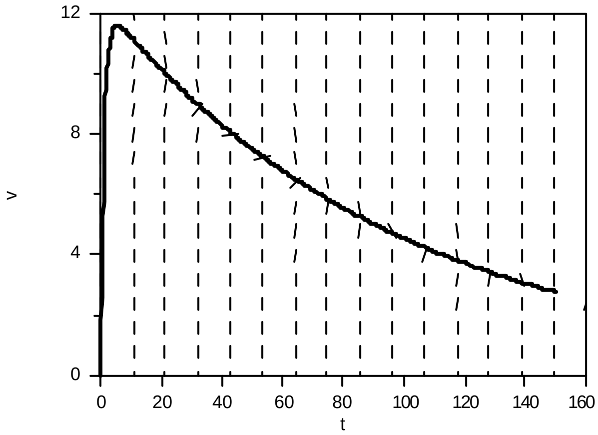
c) $x(t) = 12{,}25 \cdot t + 15{,}3125 \cdot \left(e^{-0{,}8t} - 1\right)$



d) Op $t \approx 83$ s valt de steen op de grond met een snelheid van 12,25 m/s.

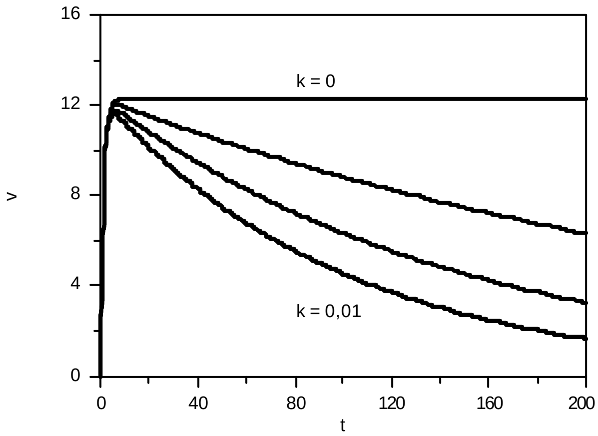
Opdracht 5.3.2

a) De snelheid wordt nu maximaal ≈11,2 m/s



b) Na 171 s

c)



d) a ≈ 0,0021 en b ≈ 0,43

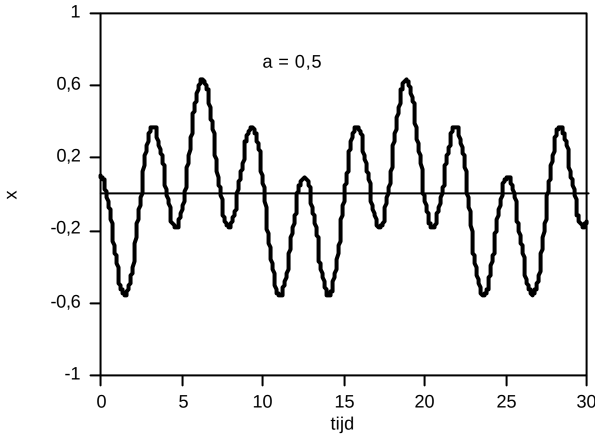
e) De snelheid wordt nu maximaal ≈ 9,2 m/s

Opdracht 5.3.3

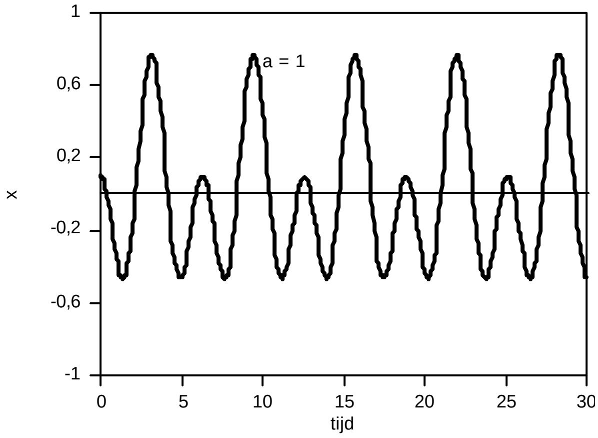
a) $\mathrm{m}x''(t) + \mathrm{k}\ x'(t) + \mathrm{C}\ x(t) = \cos(\mathrm{a}t)$

of $\begin{cases} v'(t) = \dfrac{-\mathrm{k}}{\mathrm{m}} x(t) - \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}} v(t) - \dfrac{\cos(\mathrm{a}t)}{m} \\ x'(t) = v(t) \end{cases}$

b)



a = 0,5: maximale uitwijking ≈ 0,63 m



a = 1: maximale uitwijking ≈ 0,77 m

c) π ≈ 3,14 s

d) Als a = 2 dan wordt de amplitudo "oneindig" groot. Interferentie!

Opdracht 6.3.1

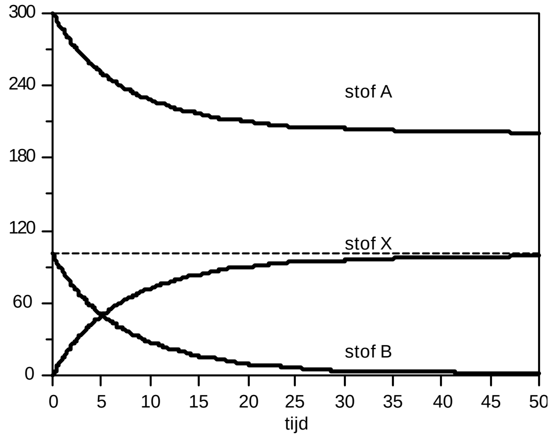
a) nee, dat getal p bestaat niet.

b) Het voorschrift voldoet aan de differentiaalvergelijking en $x(0) = 0$.

Opdracht 6.3.2

c) $b'(t) = -k_1 \cdot a(t) \cdot b(t) + k_2 \cdot x(t)$

d) x wordt uiteindelijk 100

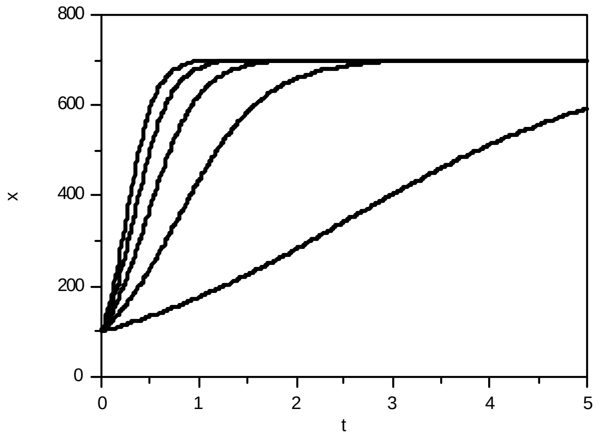


e) Dit keer neemt x minder snel toe. De eindhoeveelheid is ongeveer 55

Opdracht 6.3.3

a) $x'(t) = 2k \cdot a(t) \cdot x(t)$

b) De hoeveelheid x groeit naar 700. De onderste grafiek hoort bij "kleine" k, de bovenste bij "grote" k.



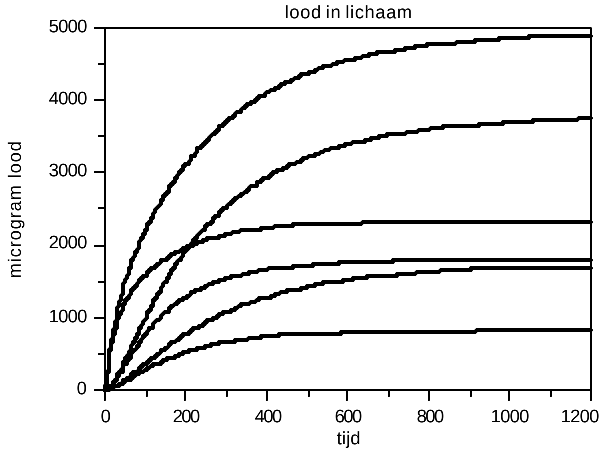
c) $x(1)$ = 300

d) $x(2) \approx 540$

Opdracht 6.3.4

a) x = 47,54, y = 0,1833, z = 0,5800

b) de concentraties worden op elk tijdstip in elk compartment hoger.
De onderste drie grafieken horen bij k_6 = 0,0211, de bovenste drie bij k_6 = 0,01.



Opdracht 6.3.5

a) $\begin{cases} x'(t) = 1 - 5x(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4z(t) - 5y(t) \\ z'(t) = 2x(t) + 5y(t) - 10z(t) \end{cases}$

b) Het evenwicht is x = 1/5, y = 1/6, z = 19/75