

math inside

Steeds snellere numerieke
methoden

verrassende wiskunde

© LIME BV
Esp 405
5633 AJ Eindhoven

T +31 40 75 16 116
E info@limebv.nl
I www.limebv.nl



Deze teksten vallen onder een Creative Commons Naams-vermelding-Niet-Commercieel-GeenAfgeleideWerken 3.0 Unported-licentie.



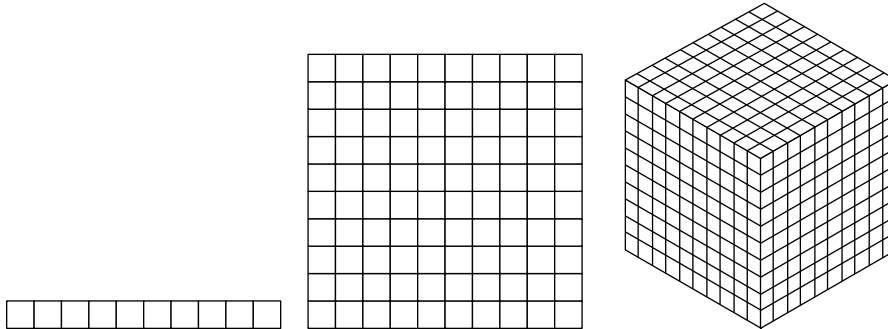
A SIOUX COMPANY

INNOVATION THROUGH COMPUTATION

Steeds snellere numerieke methoden

De snelheidstoename van de wiskundige software, gebaseerd op de zogenaamde 'lineaire solvers', heeft gelijke tred gehouden met de versnelling op hardwaregebied die bekend staat als Moore's law. De numerieke methoden van dit moment zijn, net zoals de hardware, een factor 16 miljoen keer sneller dan de slimste methode van 36 jaar geleden.

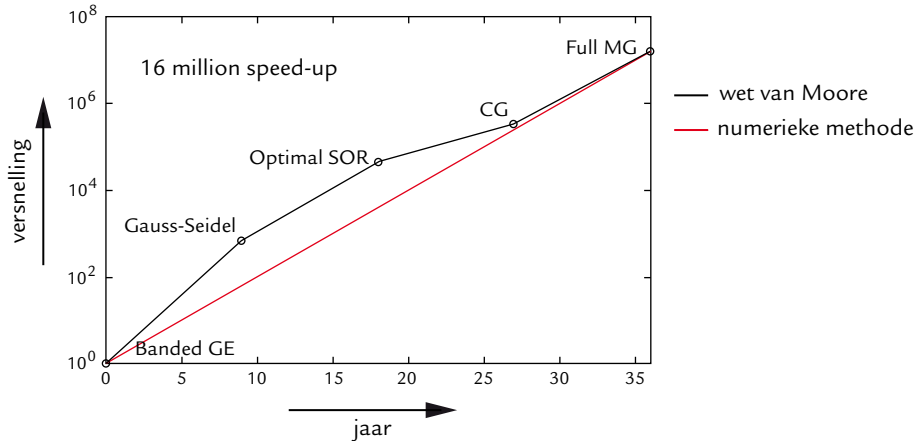
Een wiskundig model bestaat doorgaans uit relaties tussen een groot aantal variabelen of onbekenden. Een typisch voorbeeld is de vraag hoe de warmte van een staaf verdeeld is als bekend is hoe warm de uiteinden van de staaf zijn. In gedachten knipt de wiskundige de staaf in een aantal kleinere stukjes. Dit aantal wordt bijvoorbeeld aangeduid met N . Dan gebruikt hij een relatie die kan worden afgeleid uit de zogenaamde warmtevergelijking en die aangeeft hoe de warmte in één zo'n stukje gerelateerd is aan die van de andere stukjes. Wiskundig leidt dit tot een probleem waarbij er N relaties zijn voor de N 'onbekende' waarden op elk van de stukjes. Als deze relaties onder elkaar worden opgeschreven, rij na rij, ontstaat voor de coëfficiënten een matrix met N rijen en N kolommen, dus N^2 elementen. Een bekende oplosmethode gaat terug op **Gauss**.



Voor deze methode zijn ongeveer N^3 flops nodig. Een flop (floating point operation) is een rekenenheid die het aantal elementaire rekenstappen in een rekenproces aangeeft en daarmee dus de complexiteit van een wiskundig probleem. Als een flop ongeveer 10^{-10} seconde kost is dit voor $N=100$ in een-tienduizendste seconde klaar. Als de staaf in het voorbeeld hierboven wordt vervangen door een vierkante plaat en in iedere richting in honderd stukjes wordt verdeeld, worden het N^2 kleine vierkantjes met daarop de 'onbekende' temperatuur – dus een matrix met N^4 elementen – en kost het proces van het bepalen nu op de in totaal 10.000 kleine vierkantjes ongeveer anderhalve minuut. Een kubus tenslotte, met weer per richting 100 stukjes, levert N^3 onbekenden op en N^6 elementen en daarmee een rekentijd van ongeveer vier maanden. Dit laatste is duidelijk onacceptabel voor praktische toepassingen.

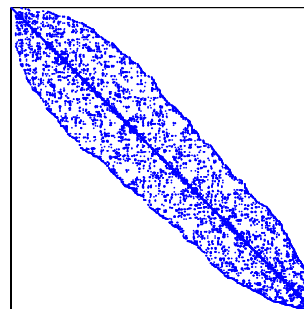
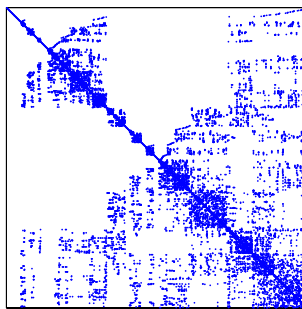
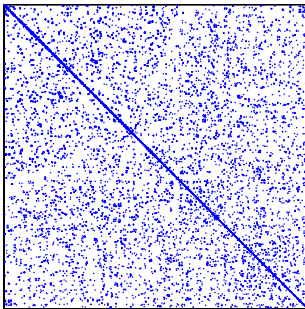
In de loop der tijden zijn er door wiskundigen steeds slimmere methoden bedacht voor het oplossen van allerlei problemen. Deze hebben minder complexiteit en zijn dus veel sneller. Het gebruik hiervan vereist wel enige kennis van zaken. De meest efficiënte methode die bedacht is heeft een complexiteit die ongeveer gelijk is aan het aantal onbekenden. Dit is het best mogelijke resultaat.

De toename in snelheid houdt gelijke tred met de wet van Moore, zie onderstaande grafiek.



Met behulp van snelle methoden (zie M(ulti) G(rid) in de grafiek) kan het hierboven genoemde kubusprobleem in minder dan een seconde uitgerekend worden.

Ook zijn er methoden bedacht om een probleem zodanig te (her)formuleren dat de matrix een mooie structuur heeft en het probleem dus sneller uitgerekend kan worden. Onderstaande plaatjes geven de distributie van elementen ongelijk aan nul weer.



Carl Friedrich Gauß

* 1777 Braunschweig – † 1855 Göttingen

Gauß studeerde aan het Collegium Carolinum (nu Technische Universiteit Braunschweig) en de Universiteit van Göttingen. De rest van zijn leven bleef hij in Göttingen, waar hij hoofd van de sterrenwacht werd. In 1818 werd hij daarnaast hoofd van de landmeetkundige dienst van Hannover. Gauß heeft op een breed gebied van de wiskunde baanbrekend werk verricht. Hij was wellicht de laatste universele wiskundige en wordt wel ‘de prins der wiskunde’ genoemd. Het was geen gemakkelijk man, zowel voor zichzelf als voor anderen. Zo hield hij in een zakboekje al zijn ‘vondsten’ bij en publiceerde ze pas als hij ze goed genoeg vond. Een gevolg daarvan was dat hij soms in conflict kwam met collega’s die over dezelfde onderwerpen publiceerden.

