

math inside

Model orde reductie

verrassende wiskunde

© LIME BV
Esp 405
5633 AJ Eindhoven

T +31 40 75 16 116
E info@limebv.nl
I www.limebv.nl

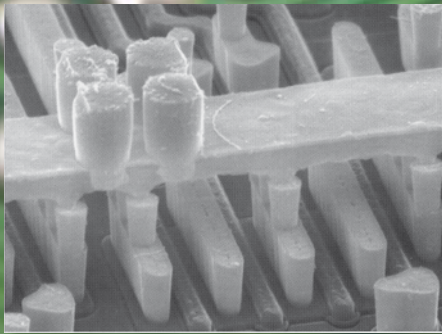
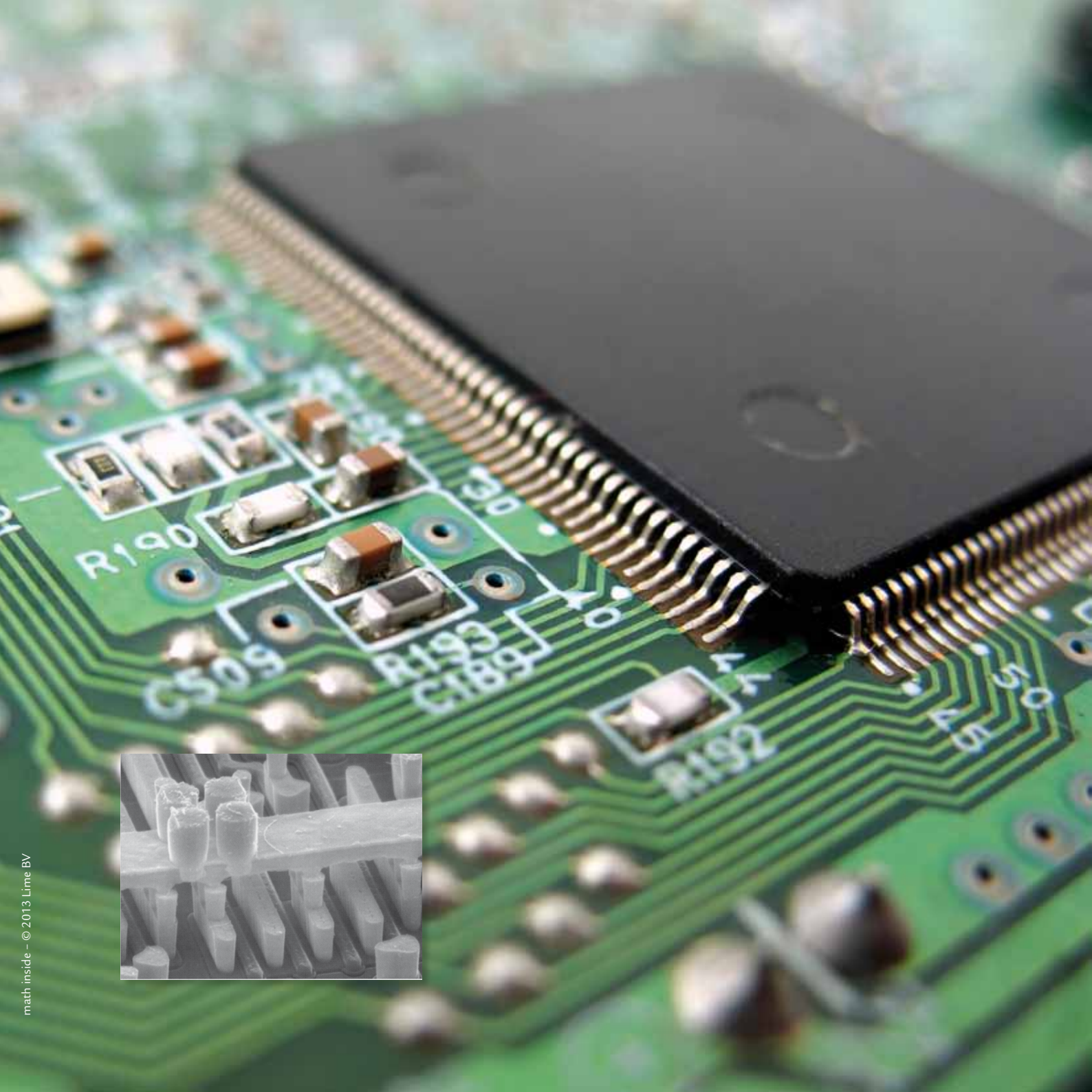


Deze teksten vallen onder een Creative Commons Naams-vermelding-Niet-Commercieel-GeenAfgeleideWerken 3.0 Unported-licentie.



A SIOUX COMPANY

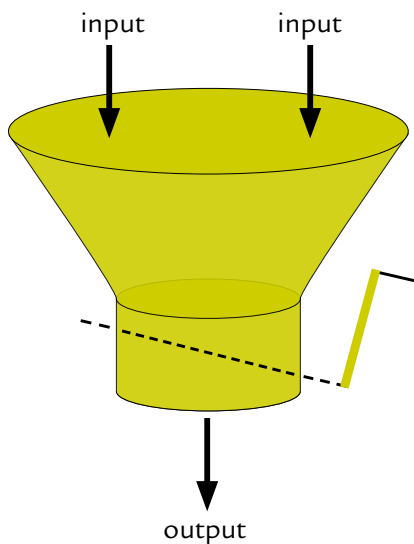
INNOVATION THROUGH COMPUTATION



Model orde reductie

Met het voortschrijden van de rekenkracht van computers en numerieke algoritmen is het mogelijk om steeds complexere problemen op te lossen. Was het vroeger al heel mooi als het lukte het elektrische gedrag van elektronische schakelingen te simuleren, tegenwoordig worden ook de eventuele ongewenste stralingseffecten, de temperatuurhuishouding en mechanische aspecten meegenomen in de berekeningen. Men wil zelfs een optimaal ontwerp van de schakeling kunnen berekenen die dan ook nog zo min mogelijk materiaal gebruikt.

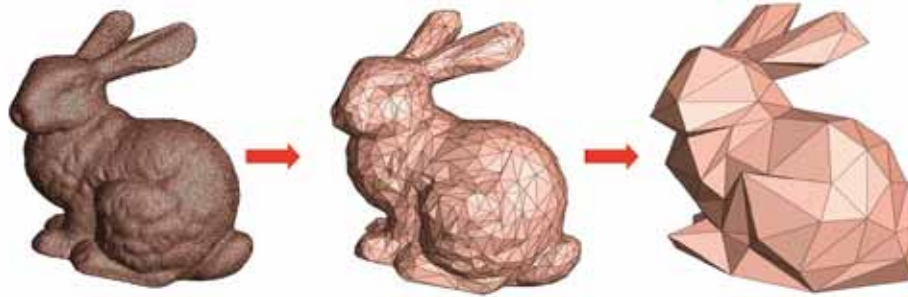
De consequenties hiervan zijn verregaand. Algoritmen en software voor individuele aspecten van een probleem moeten aan elkaar worden gekoppeld, wat leidt tot enorme aantallen vergelijkingen met zeer veel variabelen en een grote hoeveelheid ontwerpparameters. Vaak is het echter niet nodig al deze systemen met grote nauwkeurigheid aan elkaar te koppelen.



Bij het hiervoor genoemde voorbeeld van de elektronische schakelingen is het pas sinds kort nodig om de invloed die de verbindingsdraden op elkaar hebben te analyseren, omdat ze door de miniaturisatie steeds dicht bij elkaar komen te liggen en daardoor voor problemen met zogenaamde overspraak kunnen zorgen. Vaak is echter een globale benadering van het gedrag voldoende om de invloed die verschillende deelaspecten op elkaar hebben te analyseren en nagenoeg optimale ontwerpen door te rekenen.

Dit kan met behulp van model orde reductie. Hiermee probeert men de complexe modellen sterk te vereenvoudigen om de relaties tussen invoer en uitvoer op een efficiënte wijze te kunnen bepalen.

De ideeën om karakteristieke eigenschappen (en daaruit de dominante) te bepalen gaan terug tot Beltrami en **Sylvester**. De nauwkeurigheid van het benaderde model kan worden aangepast. Hieronder wordt dit schematisch weergegeven: links een gedetailleerd plaatje van een konijn, rechts een zeer vereenvoudigde weergave. Toch zal eenieder onmiddellijk beamen dat het meest rechtse plaatje een konijn voorstelt.

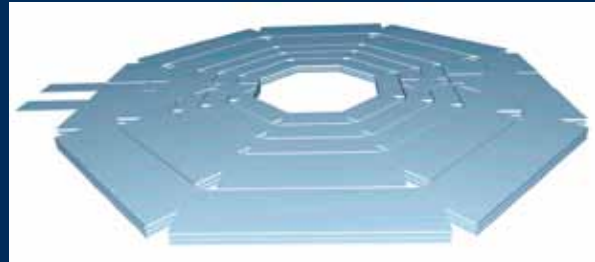


Zo werkt het ook voor praktische problemen. Traditionele numerieke methoden zullen vaak leiden tot een complex model met zeer veel detailinformatie, terwijl toepassing van model orde reductie leidt tot een veel eenvoudiger model waarin desalniettemin de karakteristieke eigenschappen van het probleem behouden zijn. De elektronische industrie speelt een belangrijke rol in het toepassen en ontwikkelen van model orde reductie-technieken. Dit heeft alles te maken met de noodzaak om het gedrag van individuele onderdelen van een elektronische schakeling zeer compact weer te kunnen geven, aangezien de uiteindelijke simulatie waar ontwerpers in geïnteresseerd zijn, soms wel uit miljoenen van die componenten bestaat.

Eenzelfde reductiemethode is noodzakelijk als men de werking van het zogenaamde substraat analyseert in een elektronische chip. Zo'n substraat kan ook weer in detail worden gesimuleerd met behulp van de Maxwell-vergelijkingen, maar het blijkt in de praktijk voldoende om slechts de resistieve werking van het substraat in beschouwing te nemen. Het substraat wordt dan ook vaak voorgesteld door een complex, en vooral (te) groot, netwerk van weerstanden. Model orde reductie biedt hier een oplossing voor het reduceren van het netwerk. Zie onderstaande tabel:

oorspronkelijk aantal weerstanden	gereduceerd aantal weerstanden	
Netwerk 1	8007	1505
Netwerk 2	161183	14811

Model orde reductie is oorspronkelijk ontstaan in de meet- en regeltechniek, maar is qua formulering typisch een wiskundig probleemgebied. Dankzij het gebruik van moderne rekenmethoden is er de laatste jaren flinke vooruitgang geboekt.



Een spoel bestaat uit vele windingen en het gedrag kan nauwkeurig worden voorspeld door gebruik te maken van complexe numerieke simulaties, namelijk het oplossen van de Maxwellvergelijkingen. Hiermee wordt dan, in zeer veel detail, het elektromagnetische gedrag van deze spoel bepaald. Ontwerpers willen echter graag een model dat is geformuleerd in termen van elektrische circuits, waar zij dagelijks mee werken. Model orde reductie kan worden gebruikt om zo'n compact elektronisch model automatisch te genereren.

James Joseph Sylvester

* 1814 Londen – † 1897 Oxford

Sylvester studeerde wiskunde in Cambridge. Als jood onderschreef hij niet de Thirty Nine Articles van de Church of England, en kon zodoende daar geen diploma krijgen. In 1838 werd hij hoogleraar aan het University College London and kreeg hij zijn BA en MA van het Trinity College in Dublin. Van 1841 tot 1843 verbleef hij in de VS om als privaat docent terug te keren naar Engeland, waar hij onder meer aan Florence Nightingale les gaf.

Van 1855 tot 1869 was hij hoogleraar wiskunde aan de Royal Military Academy in Woolwich. In 1877 aanvaarde hij een benoeming aan de pas opgerichte Johns Hopkins Universiteit in Baltimore. In 1883 keerde hij weer terug naar Engeland om hoogleraar te worden in Oxford. Sylvester heeft een grote bijdrage geleverd aan de matrix theorie. Hij bedacht het concept “discriminant” en ontdekte de discriminant van een derde graads vergelijking.

