math inside

Discretiseren en oplossen van vergelijkingen

verrassende wiskunde

© LIME BV
Esp 405
5633 AJ Eindhoven

T +31 40 75 16 116
E info@limebv.nl
I www.limebv.nl

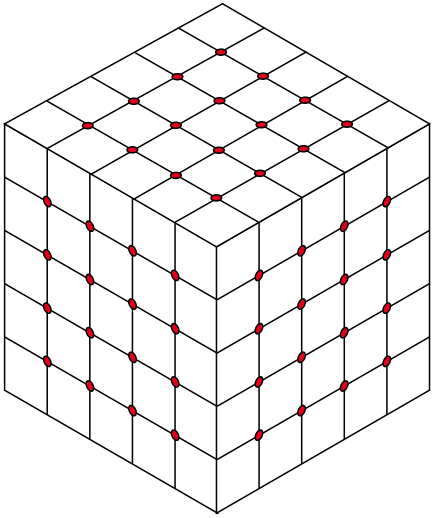
Deze teksten vallen onder een Creative Commons Naams-vermelding-Niet-Commercieel-GeenAfgeleideWerken 3.0 Unported-licentie.

LIME
A SIOUX COMPANY

INNOVATION THROUGH COMPUTATION

Discretiseren en oplossen van vergelijkingen

Veel technische problemen kunnen wiskundig gemodelleerd worden met behulp van zogenaamde differentiaalvergelijkingen. In zo'n vergelijking komen grootheden als temperatuur, snelheid, druk of spanning en stroom voor.



Zo'n differentiaalvergelijking geldt dan voor een zeker gebied, bijvoorbeeld voor een kamer waarin men de temperatuur wil berekenen. De temperatuur is afhankelijk van de plaats in dit gebied; de plaats noemt men dan de (onafhankelijke) variabele en de temperatuur, en andere grootheden de afhankelijke variabelen. De plaatsvariabele is driedimensionaal (lengte, breedte en hoogte bijvoorbeeld), maar door het model te vereenvoudigen kunnen soms ook twee of één dimensies volstaan. Een andere fundamentele onafhankelijke variabele is de tijd (bij het opwarmen van de kamer bijvoorbeeld). Een differentiaalvergelijking wordt altijd discreet gemaakt. Dat betekent dat er punten bepaald worden, een zogenaamd rooster, waarop de grootheden (afhankelijke variabelen) uitgerekend worden.

Algoritme

Het woord algoritme is afgeleid van Al-Khwärizmï, een Perzische wis- en sterrenkundige, die in 825 AD een verhandeling schreef '*Over het rekenen met Hindu getallen*' (onze 'Arabische' cijfers komen uit India!). De verhandeling werd in de twaalfde eeuw in het Latijn vertaald als '*Algoritmi de numero Indorum*', wat eigenlijk betekende "*Over de getallen van de Indiers van Algoritmus*". 'Algoritmi' was bedoeld als de tweede naamval (bezittelijke vorm) van de naam van de auteur. Omdat het meervoude dezelfde uitgang heeft als de tweede naamval kwam daardoor het misverstand de wereld in dat 'Algoritmi' het Latijnse meervoud van 'Algoritmus' zou zijn, wat dan 'rekenmethoden' zou betekenen. Maar het heeft niets van doen met het woord ritme en is overigens ook niet onzijdig, maar mannelijk, hoewel Van Daale hiervan niet op de hoogte blijkt te zijn. Vergelijk het met het Duitse Algorithmus, dat wel mannelijk is, maar net als in het Engels met een vreemde h in het woord, een gevolg van contaminatie met het Griekse woord αριθμος (arithmos) hetgeen getal betekent.

math inside – © 2013 Lime BV

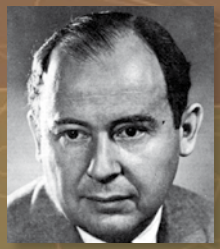
Dit is noodzakelijk voor de numerieke aanpak van de vergelijkingen. Zo zijn er bijvoorbeeld eindige differenties, eindige elementen en eindige volumemethoden. Doorgaans leveren deze zogenaamde discrete vergelijkingen op hun beurt weer grote stelsels vergelijkingen op die aparte aandacht vragen om numeriek opgelost te worden. Het discretiseren en oplossen wordt aangeduid met de term scientific computing.
De aldus bepaalde discrete vergelijkingen worden in een algoritme, een rekenvoorschrift, verwerkt dat geschikt is voor evaluatie op een computer. Het efficiënt gebruiken van de methoden is een leidend thema, maar ook het onder controle houden van de alom tegenwoordige afrondfouten. In wezen is scientific computing een heel oud vak, maar pas na de Tweede Wereldoorlog, toen snelle computers geleidelijk aan ter beschikking kwamen, is scientific computing zich sterk gaan ontwikkelen. Met de daarop gebaseerde software kunnen tal van problemen nu doorgerekend worden. Maar nogal wat praktijkproblemen vragen een eigen aanpak, waardoor standaard softwarepakketten niet geschikt blijken of te traag zijn.

De moderne scientific computing begint in 1947 bij het verschijnen van een artikel van **von Neumann** en Herman Goldstine, 'Numerical Inverting of Matrices of High Order'. Het is een van de eerste artikelen dat het verschijnsel afrondfout bestudeert. Ieder getal wordt door de computer zo goed mogelijk benaderd, maar doorgaans betekent dit dat er een afrondfout gemaakt wordt, omdat een computer maar een beperkt aantal cijfers van een getal kan representeren. Daardoor wordt er niet meer exact gerekend en kan de berekening onnauwkeurig worden. Bij het toepassen van de bekende 'abc-formule' bij het oplossen van $ax^2 + x - 1 = 0$, verkrijgt men de volgende getallen voor de positieve wortel x :

a	x (berekend)	x (exact)
1.0E-04	9.9990002127E-01	9.9990002000E-01
1.0E-06	9.9999942904E-01	9.9999900000E-01
1.0E-08	9.9998942460E-01	9.9999999000E-01
1.0E-10	1.0004441719E+00	9.9999999990E-01
1.0E-12	9.0949470177E-01	1.0000000000E+00
1.0E-14	0.0000000000E+00	1.0000000000E+00

math inside – © 2013 Lime BV

John von Neumann (Hongaars: Neumann János)



✳ 1903 Boedapest - ✝ 1957 Washington DC

Von Neumann promoveerde in de wiskunde aan de universiteit van Budapest. In 1937 emigreerde hij naar de VS. Hij heeft op diverse gebieden van de wiskunde en de informatica zeer belangrijke bijdragen geleverd. Hij wordt algemeen beschouwd als een van de belangrijkste wiskundigen van de twintigste eeuw. Von Neumann werkte onder meer aan het Manhattanproject voor de ontwikkeling van de eerste atoombom. Hij was betrokken bij de bouw van de ENIAC, de eerste elektronische computer. Daarnaast was hij de grondlegger van de speltheorie.

math inside – © 2013 Lime BV