

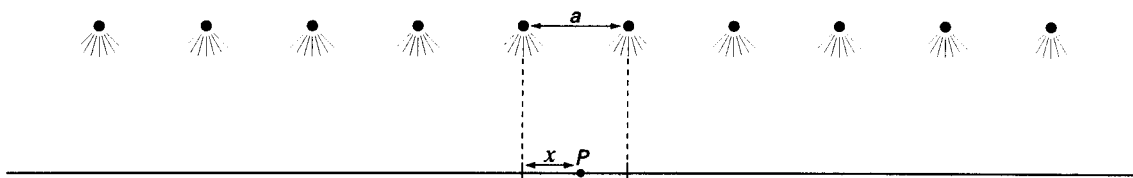
## Opgave 3 Wegverlichting

Een belangrijke eis die aan wegverlichting gesteld wordt, is dat het overal langs de te verlichten weg ongeveer even licht is, en niet bijvoorbeeld halverwege tussen twee lampen veel donkerder dan vlak onder een lamp.

Om aan te geven hoe licht het op een bepaalde plaats is, gebruikt men het begrip *verlichtingssterkte* (gemeten in *lux*).

Voor een aan te leggen weg heeft men diverse mogelijkheden voor de afstand tussen opeenvolgende lampen onderzocht. Telkens is voor een aantal punten van het weggedeelte tussen twee lampen de verlichtingssterkte berekend. Hierbij is  $a$  de afstand tussen twee lampen (in meters), en geeft  $x$  aan hoeveel meter men verwijderd is van het punt recht onder een van de lampen. Zie figuur 2.

figuur 2



Het resultaat van de berekeningen staat in tabel 1.

tabel 1

$x \backslash a$	6	8	10	12	14	16	18	20
0	321,1	245,4	199,7	170,5	151,2	138,0	128,8	122,3
1	321,2	245,2	199,3	169,8	150,2	136,9	127,6	121,0
2	321,2	244,8	198,0	167,8	147,6	133,7	124,1	117,3
3	321,2	244,3	196,5	165,0	143,8	129,2	119,0	111,7
4	321,2	244,1	195,3	162,4	139,7	124,0	113,0	105,2
5	321,2	244,3	194,8	160,4	136,1	119,0	106,9	98,4
6	321,1	244,8	195,3	159,7	133,7	114,9	101,6	92,1
7		245,2	196,5	160,4	132,8	112,3	97,4	86,8
8		245,4	198,0	162,4	133,7	111,4	94,8	82,8
9			199,3	165,0	136,1	112,3	93,9	80,4
10			199,7	167,8	139,7	114,9	94,8	79,5
11				169,8	143,8	119,0	97,4	80,4
12				170,5	147,6	124,0	101,6	82,8
13					150,2	129,2	106,9	86,8
14					151,2	133,7	113,0	92,1
15						136,9	119,0	98,4
16						138,0	124,1	105,2
17							127,6	111,7
18							128,8	117,3
19								121,0
20								122,3

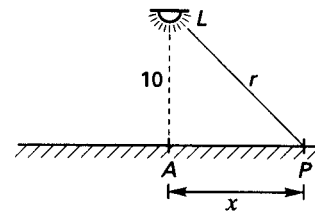
Volgens tabel 1 zou het plaatsen van lampen met een onderlinge afstand van 6 meter zorgen voor een ideale gelijkmatige verlichting. Dit is echter economisch niet haalbaar. Het verschil tussen de grootste en de kleinste waarde van de verlichtingssterkte mag niet meer zijn dan 20% van de grootste waarde.

- 4p 10  Voor welke waarden van  $a$  in tabel 1 is voldaan aan deze voorwaarde? Licht je antwoord toe.

De waarden in tabel 1 zijn verkregen door eerst te berekenen hoe groot de verlichtingssterkte is die elke lamp afzonderlijk op een bepaalde plaats oplevert, en daarna de uitkomsten op te tellen.

Voor het berekenen van de verlichtingssterkte bij één lamp gebruikt men het volgende model. Uitgangspunt is een lamp die op 10 meter hoogte boven het wegdek hangt, en waarvan het licht zich in alle richtingen naar beneden kan verspreiden. Zie figuur 3.

figuur 3



De afstand van de lamp tot een punt  $P$  op het wegdek noemen we  $r$  (in meters). De verlichtingssterkte in punt  $P$  noemen we  $S$  (in lux). Voor  $S$  geldt:

$$S = \frac{100\,000}{r^3}$$

Punt  $A$  bevindt zich recht onder de lamp,  $x$  is de afstand in meters tussen punt  $A$  en punt  $P$ .

- 5p **11**  Bereken  $x$  als de verlichtingssterkte in  $P$  de helft is van die in  $A$ . Rond het antwoord af op gehele decimeters.

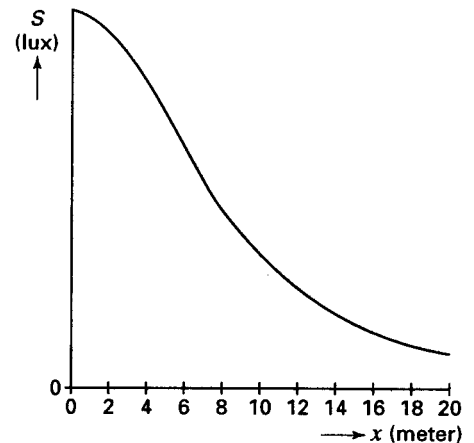
Men kan  $S$  ook als functie van  $x$  opvatten. De afgeleide functie  $\frac{dS}{dx}$  is een maat voor de verandering van de verlichtingssterkte (in lux/meter) als men zich over het wegdek van het punt  $A$  verwijderd. Er geldt:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-300\,000 \cdot x}{(100 + x^2)^2 \cdot \sqrt{100 + x^2}}$$

- 5p **12**  Toon dit aan.

In figuur 4 is de grafiek van  $S$  als functie van  $x$  getekend.

figuur 4



Iemand vraagt zich af of er een punt is waar  $\frac{dS}{dx}$  kleiner is dan  $-8$  lux/m.

Hij probeert vergeefs deze vraag te beantwoorden door een vergelijking op te lossen. Met behulp van figuur 4 en de formule voor  $\frac{dS}{dx}$  is echter snel na te gaan dat er inderdaad zo'n punt bestaat.

- 3p **13**  Laat dit zien.