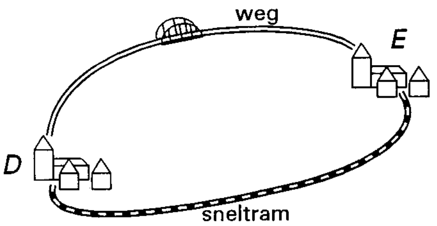
Opgave 2 Reizen in de spits

In de spits zijn files en langzaam rijdènd verkeer normale verschijnselen geworden. De aanleg van extra wegen en het wegnemen van knelpunten lijken voor de hand liggende oplossingen. In deze opgave blijkt dat zulke oplossingen soms verrassende gevolgen hebben.
Als model nemen we een situatie waarin 10 000 reizigers zich tijdens de spits moeten verplaatsen van stad D naar stad E. Zij kunnen dat doen met de sneltram of met hun eigen auto (één persoon per auto). Op de autoroute is een brug een belangrijk knelpunt. Zie figuur 3.

figuur 3 *De steden D en E met hun verbindingen*



We letten alleen op reistijden.

De reistijd (T_1) in minuten van D naar E per sneltram hangt af van het aantal passagiers (p). Bij een groter passagiersaanbod worden er meer trams ingezet. Dit heeft tot gevolg dat de reistijd afneemt doordat de daarin verwerkte wachttijd minder wordt.
T_1 kan benaderd worden met de formule $T_1 = 20 - 0{,}0005p$

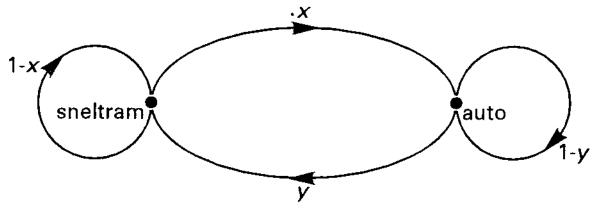
De reistijd (T_2) in minuten van D naar E per auto hangt af van de capaciteit van de brug en van het aantal reizigers (a) dat van de auto gebruik maakt.
T_2 kan benaderd worden met de formule $T_2 = 5 + c \cdot a$
Hierbij is c een constante die kleiner is naarmate de capaciteit van de brug groter is. Aanvankelijk geldt $c = 0{,}0052$.

Stel eens dat 6000 van de 10 000 reizigers gebruik maken van de sneltram.

4p **6** □ Bereken de reistijd per sneltram en de reistijd per auto.

Iedere reiziger streeft naar een zo kort mogelijke reistijd voor zichzelf.
Dit heeft tot gevolg dat er op den duur een evenwichtssituatie ontstaat waarbij de reizigersstroom zodanig over de twee keuzemogelijkheden verdeeld is dat de twee reistijden even groot zijn. In de evenwichtssituatie maken 7872 van de 10 000 reizigers gebruik van de sneltram.
Ook in deze evenwichtssituatie zullen er toch voortdurend reizigers zijn die de volgende dag een ander vervoermiddel nemen. Dit kan worden weergegeven in de volgende graaf:

graaf



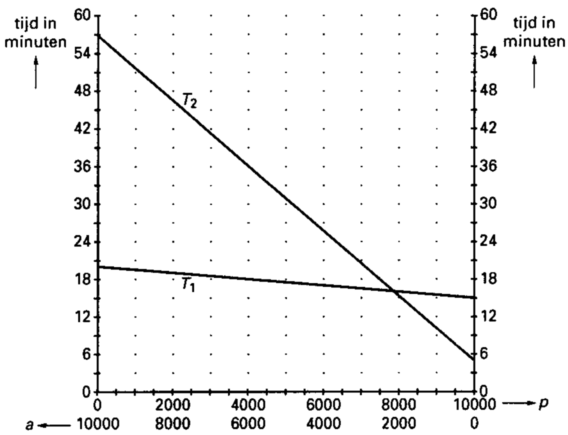
Hierin zijn x en y overgangskansen.

Neem aan dat in deze evenwichtssituatie dagelijks in totaal 200 reizigers een ander vervoermiddel kiezen dan de vorige dag.

4p **7** □ Bereken de overgangskansen x en y in vier decimalen nauwkeurig.

In figuur 4 zijn de reistijd per tram (T_1) en de reistijd per auto (T_2) uitgezet tegen de reizigersaantallen. Er is te zien dat T_1 afneemt als p groter wordt en dat T_2 toeneemt als a groter wordt. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 4 *Reistijden*



De brug wordt verbreed, waardoor c afneemt van 0,0052 naar 0,0016. Meer reizigers zullen daardoor kiezen voor de auto. Op den duur zal er een nieuwe evenwichtssituatie ontstaan met weer gelijke reistijden voor alle reizigers. Het verrassende hierbij is echter dat iedereen in de nieuwe evenwichtssituatie een langere reistijd heeft dan voorheen!

3p **8** □ Verklaar het bovenstaande met behulp van de figuur op de bijlage.

5p **9** □ Bereken de nieuwe reistijd.

Bovenstaand effect staat bekend als de paradox van Downs-Thomson. De paradox ontstaat doordat iedere reiziger alleen maar op zijn eigen reistijd let bij het kiezen van het vervoermiddel. Bij zijn keuze speelt geen rol dat hij andere reizigers extra reistijd kan aandoen.
Het zou beter zijn als de reizigersstroom zich zo zou verdelen dat de totale reistijd van alle reizigers samen (T_{totaal}) minimaal is.
In dat geval is immers de gemiddelde reistijd per reiziger zo klein mogelijk.

4p **10** □ Toon aan dat T_{totaal} als volgt kan worden uitgedrukt in c en a:
$T_{\text{totaal}} = (c - 0{,}0005)a^2 - 5a + 150\,000$ (T_{totaal} in minuten)

Voor de verbreding van de brug was T_{totaal} minimaal als 532 reizigers met de auto gingen. De minimale waarde van T_{totaal} was in dat geval 148 670 minuten.
De minimale waarde van T_{totaal} na verbreding van de brug is kleiner dan de minimale waarde van T_{totaal} voor de verbreding.

4p **11** □ Toon dit met behulp van een berekening aan.

Bijlage bij vraag 8

Vraag 8